В.І. РОМАНЕНКО,[1] Н.В. КОРНІЛОВСЬКА[2]

[1] Інститут фізики НАН України
(Просп. Науки, 46, Київ 03680; e-mail: vr@iop.kiev.ua)
[2] Херсонський національний технічний університет
(Бериславське шосе, 24, Херсон 73008)

УДК 519.2, 53.08

ПРО ТОЧНІСТЬ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕНЕСЕННЯ ПОХИБОК ЗА АНАЛІТИЧНИМИ ФОРМУЛАМИ ДЛЯ ОБЕРНЕНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Оцінено точність розрахунку перенесення похибок при перетворенні $x \to y = f(x)$ при нормальному розподілі випадкової величини x на основі формул для перенесення похибок, отриманих для оберненого перетворення $y \to x$ з розподіленою за нормальним законом випадковою величиною y. Показано, що у загальному випадку точність розрахунку середнього значення і дисперсії випадкової величини y має перший порядок за дисперсією випадкової величини x.

Ключові слова: перенесення похибки, дисперсія, середнє значенння, нормальний розподіл.

1. Вступ

При опрацьовуванні результатів фізичного експерименту часто виникає необхідність обчислення точності отриманих результатів за відомою точністю вимірюваних величин. Наприклад, у ренгеноструктурному аналізі виміряні кути дифракції ренгенівських променів використовують для обчислення постійної кристалічної ґратки. Формули для обчислення точності розрахованих величин добре відомі і бездоганно працюють, якщо похибка (саредньоквадратичне відхилення σ_x) вимірюваної величини x настільки мала, що у межах цієї похибки залежність результату $y = f(x)$ від вимірюваної величини можна всважати лінійною [1]. В той самий час не виключена можливість досить великої дисперсії величини, що вимірюється. Це може помітно змінити оцінку похибки величини y, яка обчислюється на основі експериментальних даних. Очевидно, у випадку функції розподілу $F(x)$ величини x, для якої аналітично обчислюються інтеграли $\int_{-\infty}^{\infty} x^n F(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^n F(x)dx$ $(n = 1, 2)$, середнє значення (математичне сподівання) та дисперсія величини y виражаються через характеристики розподілу $F(x)$, а, отже, можна в принципі виразити математичне сподівання $\bar{y}$ і дисперсію σ_y^2 величини y через математичне сподівання $\bar{x}$ і дисперсію σ_x^2 величини x. Такі обчислення проведені, наприклад, для $y = \cos x$ [2], $y = x^2$ [3] у випадку нормального розподілу x і для $y = \sqrt{x}$ [4] у випадку стандартного (з нульовим математичним сподіванням) нормального розподілу x. Якщо ж вказані інтеграли не можна обчислити аналітично, а інтеграли $\int_{-\infty}^{\infty} y^n G(y)dy$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)^n G(y)dy$ $(n = 1, 2)$ можна, де $g(y) = x$ – обернена до $f(x)$ функція, а $G(y)$ – функція розподілу y, ми знову отримаємо співвідношення, які пов'язують $\bar{x}$, σ_x^2 з $\bar{y}$, σ_y^2 [2, 3]. Це було зроблено у роботах [2] для $y = \arccos(x)$ та [3] для $y = \sqrt{x}$ (обернені перетворення мають вигляд $x = \cos y$, $x = y^2$). Слід зазначити, що для нелінійної функції $f(x)$ (і, відповідно, $g(y)$) вигляд функції розподілу випадкової величини y відрізняється від вигляду розподілу випадкової величини x. Наприклад, якщо випадкова величина x була розподілена за нормальним законом, то розподіл випадкової величини y нормальним вже не буде. В той самий час у роботах [2, 3] пропонується використовувати формули, отримані при оберненому перетворенні $y \to x$ за припущення про нормальний розподіл y, для розрахунку $\bar{y}$ і σ_y^2 при перетворенні $x \to y = f(x)$ нормально розподіленої величини x, ігноруючи той факт, що при перетворенні $y \to x$ розподіл x не нормальний. На жаль, похибка, що виникає при підміні не нормального розподілу x нормальним у роботах [2, 3] не обговорюється. Оскільки ідея запропонованого в цитованих роботах методу в цілому нам видається цікавою, варто оцінити похибку такого методу розрахунку.

Робота побудована так: у наступному розділі описана схема розрахунку точності статистичних характеристик розподілу величини $y = f(x)$, сам розрахунок викладено у розділі 3, у четвертому розділі наведено приклад розрахунку для $f(x) = \sqrt{x}$ та його порівняння з чисельним розрахунком, в кінці роботи сформульовано короткий висновок.

2. Схема розрахунку

Оцінювати точність розрахунку статистичних характеристик $y = f(x)$ за аналітичними формулами, отриманими для оберненого перетворення $x = g(y)$, будемо таким чином.

1. Уважаємо, що випадкова величина x характеризується нормальним розподілом із середнім значенням $\bar{x}$ та дисперсією σ_x^2. Змінна y пов'язана з x співвідношенням $y = f(x)$, яке можна записати у вигляді ряду Тейлора.

2. Розраховуємо середнє значення $\bar{y}$ та дисперсію σ_y^2 величини y.

3. Уважаємо, що випадкова величина y характеризується нормальним розподілом із середнім значенням $\overline{y_a}$ та дисперсією $\sigma_{y_a}^2$. Величина x пов'язана з y співвідношенням $x = g(y)$, яке можна записати у вигляді ряду Тейлора.

4. Розраховуємо середнє значення $\overline{x_a}$ та дисперсію $\sigma_{x_a}^2$ величини x. Очевидно, розподіл x не буде нормальним.

5. Ототожнюємо величини $\overline{x_a}$ та $\sigma_{x_a}^2$, які характеризують не нормальний розподіл величини x для перетворення $y \to x = g(y)$ нормально розподіленої величини y, з $\bar{x}$ та σ_x^2 (саме це ототожнення, яке є основою робіт [2, 3], призводить до обмеження точності наведених в [2, 3] формул).

6. Порівнюємо $\bar{y}$ з $\overline{y_a}$ та σ_y^2 з $\sigma_{y_a}^2$. Відмінність цих величин і дасть похибку запропонованого в [2, 3] методу розрахунку математичного сподівання та дисперсії при перетворенні $x \to y = f(x)$ з використанням аналітичних формул для цих величин при оберненому перетворенні $y \to x = g(y)$ нормально розподіленої величини y.

3. Точність перенесення похибок $x \to y = f(x)$ на основі результатів для $y \to x$

Нехай випадкова величина x характеризується функцією нормального розподілу із середнім значенням $\bar{x}$ та дисперсією σ_x^2 (σ_x – середньоквадратичне відхилення):

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]. \tag{1}$$

Для цієї функції розподілу у випадку цілого n справедливі співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{2n+1} F(x)\,dx = 0, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{2n} F(x)\,dx = (2n-1)!!\sigma_x^{2n} \quad (n \geq 1), \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

Змінна y пов'язана з x співвідношенням $y = f(x)$, яке також можна записати у вигляді ряду Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\bar{x})^n, \tag{5}$$

де

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} f(x)\Big|_{x=\bar{x}}. \tag{6}$$

3.1. Середнє значення та дисперсія при перетворенні $y = f(x)$

Беручи до уваги формули (2) і (3), знаходимо середнє значення $\bar{y}$ функції $y = f(x)$ при розподілі випадкової величини x за законом (1):

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^n F(x)\,dx = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}(2n-1)!!\,\sigma_x^{2n}. \tag{7}$$

З точністю до четвертого порядку по σ_x маємо

$$\bar{y} = a_0 + a_2\sigma_x^2 + 3a_4\sigma_x^4. \tag{8}$$

Обчислимо тепер дисперсію y (середній квадрат відхилення від середнього значення):

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y-\bar{y})^2 F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 F(x)\,dx - \bar{y}^2. \tag{9}$$

Середнє значення y^2

$$\overline{y^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 F(x)\,dx \tag{10}$$

можна також записати у вигляді

$$\overline{y^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n a_m \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{n+m} F(x)\,dx \tag{11}$$

або

$$\overline{y^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} a_n a_{m-n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{m} F(x)\,dx. \tag{12}$$

Беручи до уваги формули (2) і (3), останню рівність можна також подати як

$$\overline{y^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\infty} a_n a_{2m-n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{2m} F(x)\,dx. \tag{13}$$

Тут квадратні дужки означають виділення цілої частини числа. Останній вираз можна записати у вигляді

$$\overline{y^2} = a_0 a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_0 a_{2m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{2m} F(x)\,dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\infty} a_n a_{2m-n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{2m} F(x)\,dx. \tag{14}$$

Звідси та з (3) випливає

$$\overline{y^2} = a_0 a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_0 a_{2m} (2m-1)!!\sigma_x^{2m} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\infty} a_n a_{2m-n} (2m-1)!!\sigma_x^{2m}. \tag{15}$$

З точністю до σ_x^4 останній вираз має вигляд:

$$\overline{y^2} = a_0 a_0 + (2a_0 a_2 + a_1^2)\sigma_x^2 + 3(2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2)\sigma_x^4. \tag{16}$$

Беручи до уваги (8), (9) і (16), маємо

$$\sigma_y^2 = a_1^2\sigma_x^2 + 2(a_2^2 + 3a_1 a_3)\sigma_x^4. \tag{17}$$

Отримані вирази для $\bar{y}$ (8) та σ_y^2 (17) повністю збігаються з отриманими для $f(x) = x^2$ ($a_0 = \bar{x}^2$, $a_1 = 2\bar{x}$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 0$) у роботі [3] і збігаються з точністю до σ_x^4 з отриманими для $f(x) = \cos x$ ($a_0 = \cos\bar{x}$, $a_1 = -\sin\bar{x}$, $a_2 = -\frac{1}{2}\cos\bar{x}$, $a_3 = \frac{1}{6}\sin\bar{x}$, $a_4 = \frac{1}{24}\cos\bar{x}$) у роботі [2].

3.2. Середнє значення та дисперсія при перетворенні $x = g(y)$

Розглянемо тепер обернену до $y = f(x)$ функцію $x = g(y)$. Вважаємо, що випадкова величина y розподілена за нормальним законом

$$G(y) = \frac{1}{\sigma_{y_a}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-\overline{y_a})^2}{2\sigma_{y_a}^2}\right] \tag{18}$$

із середнім значенням $\overline{y_a}$ та дисперсією $\sigma_{y_a}^2$ (σ_{y_a} – середньоквадратичне відхилення). Нехай розклад функції $g(y)$ в ряд Тейлора має вигляд

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y-y_0)^n, \tag{19}$$

де

$$b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dy^n} g(y)\Big|_{y=y_0}, \quad y_0 = f(\bar{x}) = a_0. \tag{20}$$

Далі обчислюємо середнє значення $\overline{x_a}$ та дисперсію $\sigma_{x_a}^2$ значень функції $x = g(y)$. Звернемо увагу на те, що точка y_0, поблизу якої записано розвинення функції $g(y)$ в ряд Тейлора (19), у загальному випадку не збігається з максимумом розподілу $G(y)$, який досягається при $y = \overline{y_a}$. У зв'язку з цим зручно $g(y)$ записати у вигляді

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - \overline{y_a} + \delta)^n, \tag{21}$$

де $\delta = \overline{y_a} - y_0$, і користуватися при обчисленні $\overline{x_a}$ та $\sigma_{x_a}^2$ інтегралами

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y-\overline{y_a})^{2n+1} G(y)\,dy = 0, \tag{22}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y-\overline{y_a})^{2n} G(y)\,dy = (2n-1)!!\sigma_{y_a}^{2n} \ (n \geq 1), \tag{23}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(y)\,dy = 1. \tag{24}$$

З точністю до четвертого порядку за σ_{y_a} маємо

$$\overline{x_a} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(y) g(y) dy = b_0 + b_1\delta +$$
$$+ b_2(\delta^2 + \sigma_{y_a}^2) + b_3(\delta^3 + 3\delta\sigma_{y_a}^2) +$$
$$+ b_4(\delta^4 + 6\delta^2\sigma_{y_a}^2 + 3\sigma_{y_a}^4). \tag{25}$$

Дисперсію $\sigma^2_{x_a}$ розраховуємо за формулою:

$$\sigma^2_{x_a} = \overline{x^2_a} - \overline{x_a}^2, \tag{26}$$

де

$$\overline{x^2_a} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(y)g(y)^2 dy. \tag{27}$$

З точністю до четвертого порядку за σ_{y_a} маємо, вважаючи δ того ж порядку малості,

$$\sigma^2_{x_a} = b_1^2\sigma^2_{y_a} + 4b_1b_2\delta\sigma^2_{y_a} + 2\sigma^4_{y_a}(3b_1b_3 + b_2^2) + \\ + 2\sigma^2_{y_a}\delta^2(3b_1b_3 + 2b_2^2). \tag{28}$$

3.3. Зв'язок коефіцієнтів у рядах Тейлора для функцій $y = f(x)$ і $x = g(y)$

Для подальших обчислень слід знайти зв'язок сукупності коефіцієнтів b_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ із сукупністю коефіцієнтів a_n $(n = 1, 2, 3, 4)$, які визначаються рівнянням (6) через похідні функції $f(x)$. Цей зв'язок знаходимо з тотожності

$$g(f(x)) = x, \tag{29}$$

яка, переписана через ряди Тейлора для функцій $f(x)$ і $g(x)$, набуває вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x - \bar{x})^m - a_0\right)^n = x. \tag{30}$$

Прирівнюючи члени при однакових ступенях x у правій і лівій частині рівняння (30), можна знайти рівняння, що визначають сукупність коефіцієнтів b_n через відому сукупність коефіцієнтів a_n. Для обчислень зручно ввести $\xi = x - \bar{x}$ і прирівнювати до нуля суму членів при кожному ступені ξ у правій і лівій частині рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\xi^m\right)^n = \bar{x} + \xi. \tag{31}$$

Перші п'ять рівнянь мають вигляд:

$$b_0 = \bar{x}, \tag{32}$$

$$b_1a_1 = 1, \tag{33}$$

$$a_1^2b_2 + a_2b_1 = 0, \tag{34}$$

$$a_1^3b_3 + 2a_1a_2b_2 + a_3b_1 = 0, \tag{35}$$

$$a_1^4b_4 + 3a_1^2a_2b_3 + 2a_1a_3b_2 + a_2^2b_2 + a_4b_1 = 0. \tag{36}$$

Вони дають:

$$b_0 = \bar{x}, \tag{37}$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \tag{38}$$

$$b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \tag{39}$$

$$b_3 = \frac{-a_1a_3 + 2a_2^2}{a_1^5}, \tag{40}$$

$$b_4 = \frac{-a_1^2a_4 + 5a_1a_2a_3 - 5a_2^3}{a_1^7}. \tag{41}$$

3.4. Похибки в обчисленні середнього значення та дисперсії у запропонованому в [2, 3] методі

Для розрахунку похибок обчислення $\bar{y}$ і σ_y ототожнимо величини $\bar{x}_a$ та σ_{x_a}, які характеризують не нормальний розподіл величини x для перетворення $y \to x = g(y)$ нормально розподіленої величини y, з $\bar{x}$ та σ_x. Як зазначалося вище, саме це ототожнення, яке є основою робіт [2, 3], призводить до обмеження точності наведених в [2, 3] формул. Далі порівняємо $\bar{y}$ з $\overline{y_a}$ і σ^2_y з $\sigma^2_{y_a}$. Різниці значень цих величин і дадуть похибку запропонованого в [2, 3] методу розрахунку математичного сподівання та дисперсії випадкової величини $y = f(x)$. Обчислення проводимо з точністю до четвертого порядку за σ_x.

Розв'язок рівнянь

$$\overline{x} = b_0 + b_1\delta + b_2(\delta^2 + \sigma^2_{y_a}) + b_3(\delta^3 + 3\delta\sigma^2_{y_a}) + \\ + b_4(\delta^4 + 6\delta^2\sigma^2_{y_a} + 3\sigma^4_{y_a}), \tag{42}$$

$$\sigma^2_x = b_1^2\sigma^2_{y_a} + 4b_1b_2\delta\sigma^2_{y_a} + 2\sigma^4_{y_a}(3b_1b_3 + b_2^2) + \\ + 2\sigma^2_{y_a}\delta^2(3b_1b_3 + 2b_2^2) \tag{43}$$

для δ і σ_{y_a} шукаємо у вигляді

$$\delta = d_1 + d_2 + d_3 + d_4, \tag{44}$$

$$\sigma^2_{y_a} = s_2 + s_4, \tag{45}$$

де вважаємо величини d_n і s_n порядку σ^n_x. Підставляючи (44), (45) в (42) і (43) та прирівнюючи коефіцієнти при членах з однаковим порядком малості у правій і лівій частині рівнянь, маємо, беручи до уваги рівняння (37)–(41):

$$d_1 = 0, \tag{46}$$

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2019. Т. 64, № 3

$$d_2 = a_2\sigma_x^2, \tag{47}$$

$$d_3 = 0, \tag{48}$$

$$d_4 = 3a_4\sigma_x^4 - 6\frac{a_2 a_3}{a_1}\sigma_x^4, \tag{49}$$

$$s_2 = a_1^2\sigma_x^2, \tag{50}$$

$$s_4 = 6a_1 a_3\sigma_x^4 - 10a_2^2\sigma_x^4, \tag{51}$$

що дає

$$\overline{y_a} = a_0 + a_2\sigma_x^2 + 3a_4\sigma_x^4 - 6\frac{a_2 a_3}{a_1}\sigma_x^4, \tag{52}$$

$$\sigma_{y_a}^2 = a_1^2\sigma_x^2 + 6a_1 a_3\sigma_x^4 - 10a_2^2\sigma_x^4. \tag{53}$$

Порівнюючи (52) і (53) з (8) і (17), бачимо, що похибки середнього значення і дисперсії випадкової змінної y, пов'язаної з нормально розподіленою випадковою змінною x співвідношенням $y = f(x)$, обчислених запропонованим в [2, 3] методом, становлять відповідно

$$\overline{y_a} - \bar{y} = -6\frac{a_2 a_3}{a_1}\sigma_x^4, \tag{54}$$

$$\sigma_{y_a}^2 - \sigma_y^2 = -12a_2^2\sigma_x^4. \tag{55}$$

4. Обговорення результатів

Для ілюстрації отриманих результатів порівняємо середнє значення і дисперсію випадкової величини $y = f(x) = \sqrt{x}$, отриманих різними способами:

1) чисельним інтегруванням виразів (7) і (9);
2) за формулами роботи [3];
3) за отриманими нами формулами (8) і (17);
4) за отриманими нами формулами (52) і (53).

Крім того, наведемо розраховану нами оцінку точності запропонованого в [2, 3] методу переносу похибок за формулами (54) і (55).

Для обчислення $\bar{y}$, $\overline{y_a}$, $\overline{\sigma_y^2}$, $\overline{\sigma_{y_a}^2}$ треба знати коефіцієнти розкладу функції $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора поблизу середнього значення $\bar{x}$ випадкової величини x. Користуючись (6), маємо

$$a_0 = \sqrt{\bar{x}}, \tag{56}$$

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}, \tag{57}$$

$$a_2 = -\frac{1}{8\bar{x}\sqrt{\bar{x}}}, \tag{58}$$

$$a_3 = \frac{1}{16\bar{x}^2\sqrt{\bar{x}}}, \tag{59}$$

$$a_4 = -\frac{5}{128\bar{x}^3\sqrt{\bar{x}}}. \tag{60}$$

Наведемо також формули для середнього значення і дисперсії, отримані у роботі [3]:

$$\overline{y_{\text{Rode}}} = \sqrt[4]{\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\sigma_x^2}, \tag{61}$$

$$\overline{\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2} = \bar{x} - \sqrt{\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\sigma_x^2}. \tag{62}$$

Порівнювати результати розрахунків за наведеними вище формулами будемо з $\overline{y_{\text{Numerical}}}$ і $\overline{\sigma_{y_{\text{Numerical}}}^2}$, отриманими при чисельному інтегруванні виразів (7) і (9) з точністю 10^{-10}, вважаючи $f(x) = \sqrt{|x|}$. Далі на ці результати чисельного інтегрування будемо посилатися як на "точні" значення. Похибку визначаємо як різницю між величиною, що обчислюється, і відповідним їй результатом чисельного інтегрування.

В таблиці наведено результати обчислення середнього значення і дисперсії після перетворення $y = \sqrt{x}$ для розподіленої згідно з (1) випадкової величини з $\bar{x} = 25$, $\sigma_x = 5$. Як і слід було очікувати, найближче до точних значень лежать $\bar{y}$ і $\overline{\sigma_y^2}$. Похибки обчислення $\overline{y_{\text{Rode}}}$ і $\overline{y_a}$ приблизно однакові, так само, як і похибки обчислення $\overline{\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2}$ і $\overline{\sigma_{y_a}^2}$. Це означає, що вирази для $\overline{y_a}$ (52) і $\overline{\sigma_{y_a}^2}$ (53) добре описують залежності (61) і (62), отримані у роботі [3]. Їх різниці за вказаних параметрів становлять $\overline{y_{\text{Rode}}} - \overline{y_a} = -2{,}2 \cdot 10^{-6}$, $\overline{\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2} - \overline{\sigma_{y_a}^2} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$. З наведених у таблиці даних також випливає, що підміна нормального розподілу на не нормальний, для якого справедливі формули (52), (53) і (61), (62), зроблена в роботах [2,3], вносить похибки $\overline{y_a} - \overline{y} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ і $\overline{\sigma_{y_a}^2} - \overline{\sigma_y^2} = -7{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Зазначимо, що ілюстративний приклад, наведений в [3] як додатковий аргумент на підтримку запропонованого в [2,3] методу розрахунку переносу

Результати обчислення середнього значення і дисперсії величини $y = \sqrt{x}$ для $\bar{x} = 25$, $\sigma_x = 5$

Величина	Значення	Похибка
$\overline{y_{\text{Rode}}}$	4,9748103	$8{,}7 \cdot 10^{-4}$
$\bar{y}$	4,9740625	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$
$\overline{y_a}$	4,9748125	$8{,}7 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\sigma_{y_{\text{Numerical}}}^2}$	0,2599280	0
$\overline{\sigma_{y_{\text{Rode}}}^2}$	0,2512627	$-8{,}7 \cdot 10^{-3}$
$\overline{\sigma_y^2}$	0,2587500	$-1{,}2 \cdot 10^{-3}$
$\overline{\sigma_{y_a}^2}$	0,2512500	$-8{,}7 \cdot 10^{-3}$

похибок на основі обернених функцій, для яких інтеграли в (7), (9) обчислюються аналітично, виглядає переконливо. Причина дуже проста – використані при розрахунку параметри $\bar{x} = 40{,}45$, $\sigma_x = 0{,}89$ відповідають досить малому відношенню $\sigma_x/\bar{x} = 2{,}2 \cdot 10^{-2}$. У цьому разі можна чекати, що одного — двох членів розкладу $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора буде цілком достатньо для досить точного обчислення середнього значення і дисперсії. Проведені нами розрахунки для цих значень статистичних параметрів дають $\overline{y_{\rm Rode}} - \overline{y_{\rm Numerical}} = 1{,}4 \cdot 10^{-7}$, $\overline{\sigma^2_{y_{\rm Rode}}} - \overline{\sigma^2_{y_{\rm Numerical}}} = -1{,}8 \cdot 10^{-6}$.

5. Висновок

Проведений нами аналіз точності перенесення похибок при перетворенні $y = f(x)$ на основі формул, отриманих для оберненої функції $x = g(y)$ за умови нормального розподілу випадкової величини y означає, що запропонований в [2, 3] метод обчислення середнього значення і дисперсії випадкової величини y при розрахунку дисперсії не має, взагалі кажучи, переваг перед звичайним методом розкладення функції $f(x)$ в ряд Тейлора з врахуванням тільки нульового і першого членів [1]. В той самий час він дає точнішу, з точністю до σ_x^2, величину середнього значення, що еквівалентно врахуванню другого члена у ряді Тейлора. Як видно з формул (52)–(55), винятком є випадок, коли друга похідна $f(x)$ при $x = \bar{x}$ дорівнює нулю. У цьому разі запропонований в [2, 3] метод дає середнє значення і дисперсію принаймні з точністю до σ_x^4.

1. Д. Худсон. *Статистика для физиков.* Мир (1970).
2. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій $\cos x$ та $\arccos x$. *УФЖ* **61**, 355 (2016).
3. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій x^2 та $\sqrt{x}$. *УФЖ* **62**, 184 (2017).
4. П. Кособуцький. Аналітичні співвідношення обчислення математичного сподівання і середньої квадратичної похибки стандартно $N(0, \sigma_X)$ розподіленої випадкової величини, підданої перетворенню $\sqrt{x}$. *УФЖ* **63**, 215 (2018).

Одержано 04.02.19

V.I. Romanenko, N.V. Kornilovska

ON THE ACCURACY OF ERROR PROPAGATION CALCULATIONS BY ANALYTIC FORMULAS OBTAINED FOR THE INVERSE TRANSFORMATION

S u m m a r y

The accuracy of error propagation calculations is estimated for the transformation $x \to y = f(x)$ of the normally distributed random variable x. The estimation is based on the formulas for the error propagation obtained for the inverse transformation $y \to x$ of the normally distributed random variable y. In the general case, the calculation accuracy for the mean value and the variance of the random variable y is shown to be of the first order of magnitude in the variance of the random variable x.