

О.М. Березький

Теоретико-груповий підхід до синтезу складних зображень

Предложен теоретико-групповой подход к синтезу сложных симметрических и асимметрических изображений и разработаны алгоритмы их синтеза. Для программной реализации этих алгоритмов использованы интегрированная среда программирования *Visual C++ Express Edition* и открытая библиотека функций компьютерного зрения *Open CV*.

A group-theoretical approach is suggested to the synthesis of complex: symmetric and asymmetric images and the algorithms of their synthesis are developed. For the software implementation of these algorithms the Visual C++ Express Edition integrated programming environment and the Open CV opened library of functions of the computer vision are used.

Запропоновано теоретико-груповий підхід до синтезу складних симетричних та асиметричних зображень і розроблено алгоритми їх синтезу. Для програмної реалізації цих алгоритмів використано інтегроване середовище програмування *Visual C++ Express Edition* та відкриту бібліотеку функцій комп'ютерного зору *Open CV*.

Вступ. Комп'ютерна графіка (КГ) є одним із динамічних напрямів штучного інтелекту, яка здобула широке застосування в різних галузях людського життя. Починаючи з поліграфії, КГ широко розповсюдилась у *web*-дизайні, мультимедіа, 3D-графіці і комп'ютерній анімації, відеомонтажі. До інженерного й наукового застосування КГ можна віднести системи автоматизованого проектування, автоматизовані системи наукових досліджень, комп'ютерний зір, авіаційну та космічну картографію, медицину та ін. При візуалізації об'єктів і процесів у наведених прикладних системах актуальними є задачі синтезу зображень.

Загалом алгоритми синтезу зображень можна поділити на два класи. Алгоритми, які реалізують методи *першого* класу, базуються на попиксельному синтезі [1] і синтезують зображення у рядку, шукаючи та копіюючи піксели із подібними локальними сусідами. Фрагмент-базовані алгоритми створюють зображення шляхом копіювання фрагментів з різними зміщеннями [2].

Методи *другого* класу використовують функціональний (або процедурний) підхід до синтезу зображення [3]. Вони використовують функції (алгоритми, процедури) для побудови зображення. Характерним для них є використання певної формалізованої моделі зображення. Серед відомих функціональних алгоритмів можна виділити такі, що побудовані на випадкових марківських полях [4] та базовані на фракталах [5].

Але, крім задач синтезу, актуальними є задачі аналізу (розпізнавання) зображень. Тому при розробці алгоритмів синтезу та аналізу необхідно мати математичний апарат, який би дозволяв з єдиних теоретичних позицій будувати алгоритми синтезу та аналізу зображень.

Ефективний опис зображень дозволяє аналізувати (розпізнавати) різні класи синтезованих зображень. Виходячи з цього, актуальною задачею є синтез класів складних зображень різної природи. В роботі [6] запропоновано підхід до розпізнавання зображень на основі неперервно-групової теорії. Автор використав групи Лі для розпізнавання зображень облич, рукописних текстів, звукової інформації та економного зберігання і передачі рухомих зображень.

В статті запропоновано теоретико-груповий підхід, який базується на теорії кристалографічних груп [7], який дозволяє з єдиних теоретичних позицій будувати алгоритми синтезу та аналізу складних зображень.

Теорія симетрії знайшла широке використання в мистецтві у побудові орнаментів [8, 9] з регулярною структурою. Інші дослідження показали, що теорію кристалографічних груп можна застосувати для синтезу квазірегулярних і нерегулярних структур [10].

Даною статтею започатковується цикл, присвячений аналізу та синтезу симетричних і асиметричних зображень з регулярною й нерегулярною структурою і застосовуються при синтезі й аналізі зображень-орнаментів та біомедичних зображень. Вона присвячена синтезу симетричних та асиметричних зображень.

Основні положення теоретико-групового підходу

Наведемо необхідні відомості з теорії груп.

Група – це деяка множина G разом з заданою на ній бінарною операцією (позначається, як правило, мультиплікативно: $((g, h) \rightarrow gh)$, що задовольняє умови [11]:

- асоціативність: $(xy)z = x(yz)$;
- існування нейтрального елемента: існує $e \in G$: $ex = xe = x$;
- існування оберненого елемента: для кожного x існує x^{-1} такий, що $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Нехай G – група. Підмножину $H \subseteq G$ називають підгрупою, якщо $gh \in H$, $g^{-1} \in H$, для кожних $g, h \in H$.

Підгрупу $H \subset G$ називають нормальною, якщо для кожного $h \in H$ і кожного $g \in G$ маємо $g^{-1}hg \in H$.

Центром групи G називають підгрупу H елементів, що комутують з усіма іншими:

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ для кожного } x \in G\}.$$

Підгрупи G_1, G_2 називаються спряженими (позначення $G_1 \sim G_2$), якщо існує $g \in A_n$ таке, що $G_1 = gG_2g^{-1}$.

Через \mathbf{R}^n позначимо n -вимірний евклідовий простір

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Якщо $x \in \mathbf{R}^n$, то $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ – норма вектора x .

Нехай G – група. Дією групи G на \mathbf{R}^n називають відображення $(g, x) \rightarrow gx: G \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Якщо $\|gx - gy\| = \|x - y\|$ для кожного $g \in G$ і $x, y \in \mathbf{R}^n$, то G діє ізометріями на \mathbf{R}^n , або G – групи рухів простору \mathbf{R}^n .

Розглянемо випадок, коли G – підгрупа групи A_n афінних перетворень простору \mathbf{R}^n .

Група G при цьому називається дискретною, якщо виконано умову: існує $C > 0$ таке, що для кожного $x \in \mathbf{R}^n$ і кожного $g \in G$, $g \neq e$, $\|x - gx\| > C$.

Орбітою точки $x \in \mathbf{R}^n$ називають множину $\{gx \mid g \in G\}$.

Фундаментальною областю для групи G називають довільну множину представників по одному з кожної орбіти. Як правило, для застосувань фундаментальну область вибирають обмеженою.

Множина $A \subseteq \mathbf{R}^n$ обмежена, якщо

$$\text{diam } A = \sup \{\|x - y\| \mid x, y \in A\} < \infty.$$

Класифікація кристалографічних груп. Кристалографічні групи [12] – це дискретні групи рухів евклідового простору, що мають обмежену фундаментальну область.

В \mathbf{R}^2 існує 17 кристалографічних груп з точністю до еквівалентності [12].

Смугою називаємо множину

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| \leq 1\}.$$

В \mathbf{R} існує сім різних груп. Якщо G, H – групи, то відображення $f: G \rightarrow H$ називають гомоморфізмом, коли $f(g_1, g_2) = f(g_1)f(g_2)$ для кожних $g_1, g_2 \in G$. Якщо при цьому f взаємно однозначне відображення, то f називають ізоморфізмом, а групи G, H – ізоморфними [12].

Підгрупа паралельних переносів є нормальною в кристалографічній групі G . Ця група дорівнює своєму централізаторові і ізоморфна групі \mathbf{Z}^n цілочисельних векторів в \mathbf{R}^n [12].

Для нормальної підгрупи $H \subset G$ розглянемо сім'ю суміжних класів, тобто сім'ю $\{gH \mid g \in G\}$. Якщо така сім'я скінченна, то підгрупу H називають підгрупою скінченного індексу в G . Відомо, що підгрупа L трансляцій (лінійних переносів) є підгрупою скінченного індексу в кристалографічній групі G .

Отже, в кристалографічних групах смуги та площини можна виділити підгрупи трансляцій. Ці групи є одновимірними та двовимірними відповідно.

Відомо [11], що існує підгрупа H групи G така, що виконуються умови:

- L – нормальна підгрупа в G ;
- кожен елемент g групи G однозначно зображується у вигляді добутку $g=lh$, де $l \in L$, $h \in H$;
- виконується умова $hLh^{-1}=L$ для кожного $h \in H$.

У цьому випадку застосовують позначення $G=L \times H$ і кажуть, що G є напівпрямим добутком L і H . Фундаментальну область групи L називають *рапортом*.

Метод синтезу симетричних зображень

Складними назвемо зображення, які мають певну структуру і будуються на основі менш структурованих зображень. До складних плоских зображень віднесемо класи симетричних зображень, побудованих на основі груп симетрії на смугі та площині. Інший великий клас складних зображень представлено асиметричними зображеннями, що отримуються на основі симетричних.

Нехай задано поле зору

$$F = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq N, 0 \leq y \leq m \}. \quad [12]$$

Визначимо елементарне зображення Im_e як найменшу несиметричну частину поля зору F . $\text{Im}_e \subset F$. Над заданим зображенням можна виконати геометричні перетворення (паралельний перенос, центральну симетрію, осьову симетрію, ковзне відображення і поворот). Множини, які будуються на основі наведених геометричних перетворень T_1, T_2, \dots, T_n утворюють групи перетворень. Роль операції множення виконує композиція перетворень. Для того щоб певна множина геометричних перетворень була групою, необхідно і достатньо виконання аксіом абстрактної групи перетворень.

Наведемо позначення і породжувальні перетворення груп смуги та площини (позначення прийнято згідно з міжнародною системою позначень плоских кристалографічних груп [13]). Групи площини такі: $p1$ – з двома паралельними переносами; $p2$ – з трьома центральними симетріями; pt – з двома осьовими симетріями і паралельним переносом; pg – з двома ков-

зними симетріями з паралельними осями; cm – з осьовою і ковзною симетрією з паралельними осями; ptm – з симетрією відносно чотирьох сторін прямокутника; ptg – з однією осьовою і двома центральними симетріями; pgg – з двома ковзними симетріями з перпендикулярними осями; ctm – з двома осьовими симетріями з перпендикулярними осями і однією центральною; $p4$ – з центральною симетрією і поворотом на 90° ; $p4m$ – з симетрією відносно трьох сторін прямокутного рівнобедреного трикутника; $p4g$ – з осьовою симетрією і поворотом на 90° ; $p3$ – з двома поворотами на 120° ; $p31m$ – з осьовою симетрією і поворотом на 120° ; $p3m1$ – з симетрією відносно трьох сторін рівнобічного трикутника; pb – з центральною симетрією і поворотом на 120° ; pbt – з симетрією відносно трьох сторін прямокутного трикутника з кутом 30° .

Наведемо позначення і породжувальні перетворення для груп смуги. Вони будуть такими: $p1$ – з тільки паралельним переносом; pg – з ковзною симетрією; $p1m$ – з двома осьовими симетріями; $p2$ – з двома центральними симетріями (напівоборотами); ptg – з одною осьовою і одною центральною симетрією; pt – з одним паралельним переносом і однією осьовою симетрією; ptm – з трьома осьовими симетріями.

Рапортом Rp назвемо зображення, отримане з елементарного рисунку шляхом застосування комбінацій геометричних перетворень.

$$S(\text{Im}_e) = Rp = \{ S(x, y) \mid (x, y) \in \text{Im}_e \}. \quad \text{Im}_s \subset Rp \subset F.$$

Симетричним назвемо зображення, отримане в результаті паралельних переносів рапорту вздовж осі OX (для смуги) і осей OX і OY (для площини). $\text{Im}_s = L(Rp) = \{ L(x, y) \mid (x, y) \in Rp \}.$

$$Rp \subset \text{Im}_s \subset F.$$

Використавши наведені означення, зобразимо узагальнену структуру синтезу симетричних зображень (рис. 1).

Метод синтезу симетричних зображень базується на алгоритмах опису елементарних зображень, алгоритмах формування рапортів груп симетрії та їх трансляцій на смугі або площині.

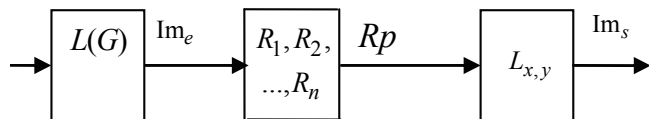


Рис. 1. Узагальнена структура синтезу симетричних зображень

Отже, під час синтезу необхідно сформува-ти елементарне зображення, використавши при цьому мову граматики $L(G)$, над яким викона-ти породжуючі перетворення, що синтезують рапорт і, зробивши паралельні переноси в од-ному або в двох напрямках (смуга, площа), отримати симетричне зображення [9, 14].

Синтез симетричного зображення передба-чає зберігання відстаней у відповідних точках при геометричних перетвореннях в рапорті та при його паралельних переносах. Рівняння по-родження симетричного зображення в опера-торній формі, яке впливає із наведеної струк-тури, представимо наступним чином:

$$\text{Im}_s = L_{x,y}(R_n(R_{n-1}(\dots R_1(\text{Im}_e))))$$

де $L_{x,y}$ – оператор трансляцій вздовж осей OX та OY , R_1, R_2, \dots, R_n – оператори породжуючих перетворень під час формування рапорту R_p . Елементарний рисунок будується з використан-ням мови, яка ґрунтується на запропонованій граматиці [9]. Компактно симетричне зобра-ження можна подати в матричній формі. Використаємо матрицю перетворень порядку 3×3 в загальному випадку для площини однорідних

координат, що має вигляд:

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

де a, b, c і d – коефіцієнти масштабування, обертання, відображення і зсуву відповідно, m і n задають зміщення, а p і q – одержання проєкцій. Елемент s проводить пропорційне масштабування [15]. В загальному випадку безвідносно до групи симетрії рівняння симетричного зображення має вигляд:

$$\text{Im}_s = T_L[T_n(T_{n-1}(T_{n-2} \dots T_1(X)))]$$

де X – координатний вектор елементарного рисунку; T_1, T_2, \dots, T_n – матриці породжуючих перетворень рапорту; T_L – матриця трансляцій вздовж OX та OY .

Метод синтезу асиметричних зображень

Для отримання асиметричних зображень ви-користаємо симетричні із *спотворенням* пара-метрів формування їх складових.

Спотворення – це цілеспрямоване неізо-метричне перетворення параметрів формування групи симетрії. Може бути *структурне* і *па-раметричне*. Структурне спотворення змінює вигляд перетворення симетрії. Параметричне – змінює значення параметрів (в допустимих ме-жах) за збереження виду симетрії. Розглянемо параметричні спотворення.

Введемо наступні види спотворень:

D_m – зміна масштабу елементарного рисун-ку (однорідне масштабування); D_x – зміщення по OX ; D_y – зміщення по OY ; $D_{R\alpha}$ – поворот на кут α ; $D_{x,y}$ – зміщення вздовж осей OX та OY ; $D_{x,y,R\alpha}$ – зміщення вздовж осей OX та OY і поворот на кут α ; $D_{m,R\alpha}$ – зміна масштабу і поворот на кут α ; D_γ – зміщення в напрямку $(\cos \gamma, \sin \gamma)$; $D_{x,y,m,R\alpha}$ – зміщення вздовж осей OX та OY , зміна масштабу і поворот на кут α . Названі спотворення, що стосуються рапорту, позначимо через D_{R_p} . Для спотворення транс-ляцій рапорту в загальному випадку може ви-користовуватися довільна функція $f(x, y)$, тоб-то $D_{f(x,y)}$, яку позначимо через D_L .

Асиметричне зображення Im_{as} отримано із симетричного шляхом спотворення парамет-рів його формування. Це означає, що відстань між відповідними точками асиметричного зо-браження не є константою, а може бути задана в загальному випадку у вигляді функції. Уза-гальнену структуру синтезу асиметричних зо-бражень представлено на рис. 2.

Враховуючи введені спотворення, рівняння породження асиметричного зображення для загального випадку в операторній формі мож-на подати так:

$$\text{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y} (D_{x,y} D_{R,\alpha} R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (D_m \text{Im}_e))))$$

Відповідно в матричному вигляді: $\text{Im}_{as} = T_L D_L [T_n D_{R_{p_n}} (T_{n-1} D_{R_{p_{n-1}}} (T_{n-2} D_{R_{p_{n-2}}} \dots T_1 D_{R_{p_1}} (X D_m)))]$.

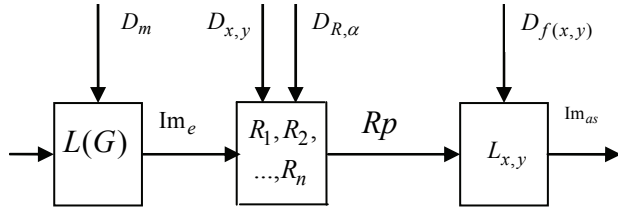


Рис. 2. Узагальнена структура синтезу асиметричних зображень

Тому введемо асиметрію *першого* виду, за якої порушується ізометрія при паралельних переносах рапорту, що виражається рівняннями в операторному:

$$\text{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y} (R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (\text{Im}_e))))$$

і в матричному:

$$\text{Im}_{as} = T_L D_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (X)))] \text{ виглядає.}$$

Асиметрія *другого* виду передбачає зміщення і повороти між елементарними рисунками при побудові рапорту. Відповідні рівняння мають вигляд:

$$\text{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y} (D_{x,y} D_{R,\alpha} R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (D_m \text{Im}_e))));$$

$$\text{Im}_{as} = T_L [T_n D_{R_{p_n}} (T_{n-1} D_{R_{p_{n-1}}} (T_{n-2} D_{R_{p_{n-2}}} \dots T_1 D_{R_{p_1}} (X)))] .$$

Асиметрія *третього* виду зберігає ізометрію при побудові рапортів і при їх трансляції, але змінює (масштабує) елементарне зображення, що виражається рівняннями:

$$\text{Im}_{as} = L_{x,y} (R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (D_m \text{Im}_e))));$$

$$\text{Im}_{as} = T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (X D_m)))] .$$

Крім цього, можливі різні комбінації базових асиметричних структур, які дозволяють отримати різні класи складних зображень.

Результати експериментів

Для програмної реалізації алгоритмів синтезу симетричних та асиметричних зображень використано інтегроване середовище програмування *Visual C++ Express Edition 2005* та відкриту бібліотеку функцій комп'ютерного зору *OpenCV* версії 1.0 2006 р. На рис. 3 наведено приклад синтезованого зображення групи *p4*.

Матричні рівняння породжуючих перетворень для ідеальної групи і спотворень наступні:

• Рівняння породжуючих перетворень для групи *p4* (рис. 3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') & \frac{1}{2}(y'-x') & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & y' & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ix' & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & jy' & 1 \end{pmatrix}.$$

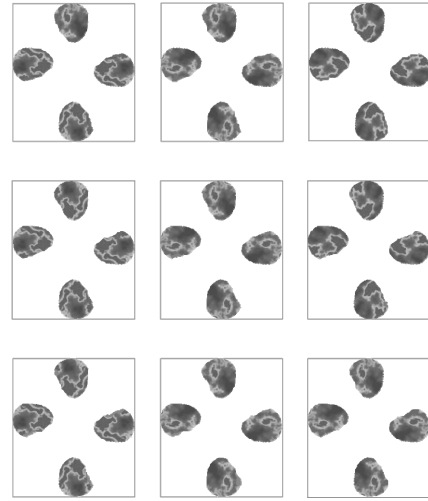


Рис. 3. Ідеально побудована група *p4*

• Спотворення рапорту: поворот на кут α , зміщення по OX і OY на величини $\Delta x'$, $\Delta y'$ (рис. 4):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') & \frac{1}{2}(y'-x') & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x' & \Delta y' & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') \cos \alpha - \frac{1}{2}(y'-x') \sin \alpha & \frac{1}{2}(x'+y') \sin \alpha + \frac{1}{2}(y'-x') \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x' & \Delta y' & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin \alpha + \Delta x' & \cos \alpha + \Delta y' & 0 \\ -\cos \alpha + \Delta x' & -\sin \alpha + \Delta y' & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') \cos \alpha - \frac{1}{2}(y'-x') \sin \alpha + \Delta x' & \frac{1}{2}(x'+y') \sin \alpha + \frac{1}{2}(y'-x') \cos \alpha + \Delta y' & 1 \end{pmatrix}$$

• Спотворення відстані між рапортами (зміщення на Δx , Δy):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ix' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ix'+\Delta x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & jy' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & jy'+\Delta y & 1 \end{pmatrix}$$

В результаті спотворення (зсуву елементарних рисунків і їх поворотів в межах рапорту і зміни відстаней між рапортами) отримуємо спотворене зображення (рис. 5).

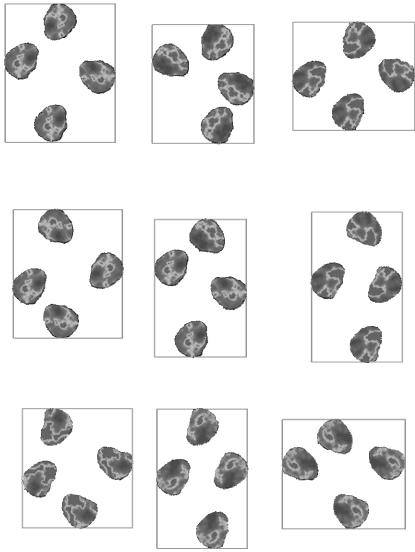


Рис. 4. Зображення групи $p4$: випадковий зсув елементарних рисунків на 20 пікселів, поворот на 40°

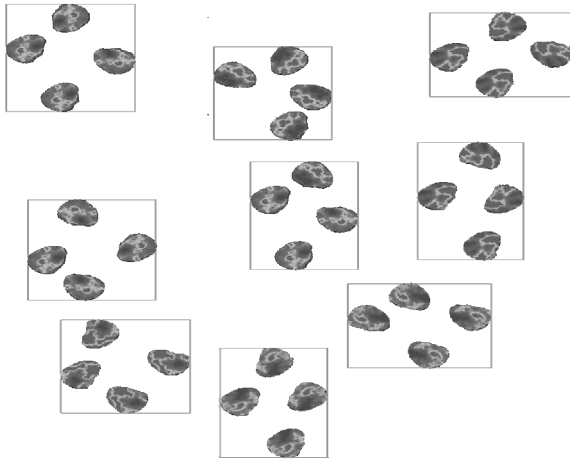


Рис. 5. Зображення групи $p4$: випадковий зсув елементарних рисунків на 20 пікселів, поворот та 40° уф зсув рапортів на 10 пікселів

Висновки. Симетричні зображення мають надлишковість у структурі. Тому запропонований опис дозволяє суттєво зменшити обсяги пам'яті для зберігання таких зображень і ефективно синтезувати нові. Напрямок подальших досліджень буде розробка методів і алгоритмів аналізу симетричних зображень.

1. *Hertzmann*. Image Analogies // Proc. SIGGRAPH – 2001.
2. *Efros, Freeman*. Image quilting // Ibid.
3. *Texturing & Modeling: A Procedural Approach* / D.S. Ebert, F.K. Musgrave, D. Peachey et al. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 2003. – 712 p.
4. *Taponecco F.* Vector field visualization using Markov random field texture synthesis // IEEE TCVG Symp. on visualization. – 2003.
5. *Kenton Musgrave F.* The Synthesis and Rendering of Eroded Fractal Terrains // Comp. graphics and interactive techniques –NY: ACM Press, 1989. – P. 41–50.
6. *Файн В.С.* Опознавание изображений (основы непрерывной теории и ее приложения). – М.: Наука, 1970. – 299 с.
7. *Березький О.* Теоретико-груповий підхід до аналізу та синтезу складних зображень // Матеріали дев'ятої всеукр. міжнар. конф. «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів». – К.: 2008. – С. 173–176.
8. *Jablan S.* Theory of Symmetry and Ornament. – Belgrade: Mathem. Inst., 1995.
9. *Грицик В.В., Березька К.М., Березький О.М.* Моделювання та синтез складних зображень симетричної структури. – Львів: УАД-ДНДІІ, 2005. – 140 с.
10. *Liu Y., Collins R.T.* A Computational Model for Repeated Pattern Perception Using Frieze and Wallpaper Groups // Proc. Comp. Vision and Patt. Recognition Conf., June 2000 – P. 537–544 – http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_3302.html
11. *Голод П.І.* Симетрія та методи теорії груп у фізиці. – К.: Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2005. – 215 с.
12. *Polya G.* Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. Z. Kristall. 1924 60. – P. 278–282.
13. *Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
14. *Berezsky O.M.* Models and algorithms of synthesis of symmetric images in a strip and a plane // Information technologies and Systems. – 2006. – 9, № 1. – P. 95–100.
15. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001. – 604 с.

Поступила 18.03.2009
Тел. для справок 8(0352) 43-5910 (Тернополь)
E-mail: ob@tneu.edu.ua
© О.Н. Березький, 2009

Теоретико-групповой подход к синтезу сложных изображений

Введение. Компьютерная графика (КГ) на данное время является одним из динамических направлений искусственного интеллекта, которая нашла широкое применение в разных областях человеческой жизни. Начиная с полиграфии, КГ широко распространилась в *web*-дизайне, мультимедиа, 3D-графике и компьютерной анимации, видеомонтаже. К инженерному и научному приложению КГ можно отнести системы автоматизированного проектирования, автоматизированные системы научных исследований, компьютерное зрение, авиационная и космическая картография, медицина и др. При визуализации объектов и процессов в приведенных прикладных системах актуальны задачи синтеза изображений.

В целом алгоритмы синтеза изображений можно разделить на два класса. Алгоритмы, реализующие методы *первого* класса, базируются на попиксельном синтезе [1] и синтезируют изображение по строке, ища и копируя пиксели с подобными локальными соседями. Фрагмент-базируемые алгоритмы создают изображение путем копирования фрагментов с разными смещениями [2].

Методы *второго* класса используют функциональный (или процедурный) подход к синтезу изображения [3]. Они используют функции (алгоритмы, процедуры) для построения изображения. Характерным для них является использование определенной формализованной модели изображения. Среди известных функциональных алгоритмов можно выделить алгоритмы, построенные на основе случайных марковских полей [4] и алгоритмы, базированные на фракталах [5].

Но кроме задач синтеза, актуальны задачи анализа (распознавания) изображений. Поэтому при разработке алгоритмов синтеза и анализа необходим математический аппарат, позволяющий из единственных теоретических позиций строить алгоритмы синтеза и анализа изображений.

Эффективное описание изображений позволяет анализировать (распознавать) разные классы изображений, которые были синтезированы. Исходя из этого, актуальна задача синтеза классов сложных изображений разной природы. В работе [6] предложен подход к распознаванию изображений на основе непрерывно-групповой теории. Автор использовал группы Ли для распознавания изображений лиц, рукописных текстов, звуковой информации и экономного хранения и передачи подвижных изображений.

В статье предложен теоретико-групповой подход, основанный на теории кристаллографических групп [7], что позволяет из единичных теоретических позиций строить алгоритмы синтеза и анализа сложных изображений.

Теория симметрии нашла широкое использование в искусстве при построении орнаментов [8, 9], имеющих регулярную структуру. Другие исследования показали, что теорию кристаллографических групп можно приме-

нить для синтеза квазирегулярных и нерегулярных структур [10].

Данная статья начинает цикл, посвященный анализу и синтезу симметричных и асимметричных изображений с регулярной и нерегулярной структурой, применяемых при синтезе и анализе изображений-орнаментов и биомедицинских изображений. Она посвящена синтезу симметричных и асимметричных изображений.

Основные положения теоретико-группового подхода

Приведем необходимые сведения из теории групп.

Группа – это некоторое множество G вместе с заданной на ней бинарной операцией (отражается, как правило, мультипликативно: $((g, h) \rightarrow gh)$, что удовлетворяет условиям [11]):

- ассоциативность: $(xy)z = x(yz)$;
- существование нейтрального элемента: существует $e \in G$: $ex = xe = x$;
- существование обратного элемента: для каждого x существует x^{-1} такой, что $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Пусть G – группа. Подмножество $H \subseteq G$ называют *подгруппой*, если $gh \in H$, $g^{-1} \in H$ для каждого $g, h \in H$.

Подгруппу $H \subset G$ называют *нормальной*, если для каждого $h \in H$ и каждого $g \in G$ имеется $g^{-1}hg \in H$.

Центром группы G называют подгруппу H элементов, коммутирующих со всеми другими:

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ } \forall x \in G\}.$$

Подгруппы G_1, G_2 называются *сопряженными* (обозначение $G_1 \sim G_2$) если существует $g \in A_n$ такое, что $G_1 = gG_2g^{-1}$.

Через \mathbf{R}^n обозначим n -размерное евклидово пространство $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}^1, i = 1, \dots, n\}$.

Если $x \in \mathbf{R}^n$, то $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ – норма вектора x .

Пусть G – группа. Действием группы G на \mathbf{R}^n называют отображение $(g, x) \rightarrow gx : G \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Если $\|gx - gy\| = \|x - y\|$ для каждого $g \in G$ и $x, y \in \mathbf{R}^n$, то говорят, что G действует изометрией на \mathbf{R}^n или G – группы движений пространства \mathbf{R}^n .

Рассмотрим случай, когда G – подгруппа группы A_n аффинных превращений пространства \mathbf{R}^n .

Группа G при этом называется *дискретной*, если выполнено условие: существует $C > 0$ такое, что для каждого $x \in \mathbf{R}^n$ и каждого $g \in G$, $g \neq e$,

$$\|x - gx\| > C.$$

Орбитой точки $x \in \mathbf{R}^n$ называют множество $\{gx \mid g \in G\}$.

Фундаментальной областью для группы G называют произвольное множество представителей по одному из каждой орбиты. Как правило, для приложений фундаментальную область выбирают ограниченной.

Множество $A \subseteq \mathbf{R}^n$ ограничено, если

$$\text{diam}A = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\} < \infty.$$

Классификация кристаллографических групп. Кристаллографические группы [12] – это дискретные группы движений евклидова пространства, имеющие ограниченную фундаментальную область.

Теорема [12]. В \mathbf{R}^2 существует 17 кристаллографических групп с точностью до эквивалентности.

Полосой называем множество

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| \leq 1\}.$$

Теорема [12] В \mathbf{R}^2 существует семь разных групп.

Если G, H – группы, то отображения $f: G \rightarrow H$ называют гомоморфизмом при $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Если при этом f взаимно-однозначное отображение, то f называют изоморфизмом, а группы G, H – изоморфными.

Теорема [12]. Подгруппа параллельных переносов – нормальная подгруппа в кристаллографической группе G . Эта группа равна своему централизатору и изоморфна группе \mathbf{Z}^n целочисленных векторов в \mathbf{R}^n .

Для нормальной подгруппы $H \subset G$ рассмотрим семью смежных классов, т.е. семью $\{gH \mid g \in G\}$. Если такая семья конечна, то подгруппу H называют подгруппой конечного индекса в G . Известно, что подгруппа трансляций (линейных переносов) является подгруппой конечного индекса в кристаллографической группе G . Следовательно, в кристаллографических группах полосы и плоскости можно выделить подгруппы трансляций. Эти группы – одномерны и двумерны соответственно.

Известно [11], что существует подгруппа H группы G такая, что выполняются условия:

- L – нормальная подгруппа в G ;
- каждый элемент g группы G однозначно изображается в виде произведения $g = lh$, где $l \in L$, $h \in H$;

- выполняется условие $hLh^{-1} = L$ для каждого $h \in H$.

В этом случае применяют обозначение $G = L \times H$ и говорят, что G – полупрямое произведение L и H . Фундаментальную область группы L называют рапортом.

Метод синтеза симметричных изображений

Сложными, назовем изображения с определенной структурой, которые строятся на основе менее структурированных изображений. К сложным плоским изображениям будем относить классы симметричных изображений, построенных на основе групп симметрии, на полосе и плоскости. Другой большой класс сложных

изображений представлен асимметричными изображениями, получаемыми на основе симметричных.

Пусть задано поле зрения

$$F = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq N, 0 \leq y \leq m\}.$$

Определим элементарное изображение Im_e как наименьшую несимметричную часть поля зрения F . $\text{Im}_e \in F$. Над заданным изображением можно выполнить геометрические преобразования (параллельный перенос, центральную симметрию, осевую симметрию, скользящее отображение и поворот). Множества, которые строятся на основе приведенных геометрических преобразований T_1, T_2, \dots, T_n образуют группы преобразований. Роль операции умножения выполняет композиция преобразований. Для того, чтобы определенное множество геометрических преобразований было группой необходимо и достаточно выполнения аксиом абстрактной группы преобразований.

Приведем обозначения и порождающие преобразования групп полосы и плоскости (обозначения приняты согласно международной системе обозначений плоских кристаллографических групп [13]). Группы плоскости таковы:

$p1$ – с двумя параллельными переносами; $p2$ – с тремя центральными симметриями; pm – с двумя осевыми симметриями и параллельным переносом; pg – с двумя скользящими симметриями с параллельными осями; cm – с осевой и скользящей симметрией с параллельными осями; pmm – с симметрией относительно четырех сторон прямоугольника; pmg – с одной осевой и двумя центральными симметриями; pgg – с двумя скользящими симметриями с перпендикулярными осями; cmg – с двумя осевыми симметриями с перпендикулярными осями и одной центральной; $p4$ – с центральной симметрией и поворотом на 90° ; $p4m$ – с симметрией относительно трех сторон прямоугольного равнобедренного треугольника; $p4g$ – с осевой симметрией и поворотом на 90° ; $p3$ – с двумя поворотами на 120° ; $p31m$ – с осевой симметрией и поворотом на 120° ; $p3m1$ – с симметрией относительно трех сторон равностороннего треугольника; $p6$ – с центральной симметрией и поворотом на 120° ; $p6m$ – с симметрией относительно трех сторон прямоугольного треугольника с углом 30° .

Приведем обозначение и порождающие преобразования для групп полосы. Они будут такими:

$p1$ – только параллельным переносом; pg – со скользящей симметрией; $p1m$ – с двумя осевыми симметриями; $p2$ – с двумя центральными симметриями (полуоборотами); pmg – с одной осевой и одной центральной симметрией; pm – с одним параллельным переносом и одной осевой симметрией; pmm – с тремя осевыми симметриями.

Рапортом Rp назовем изображение, полученное из элементарного рисунка путем использования комбинаций геометрических преобразований.

$$S(\text{Im}_e) = Rp = \{S(x, y) \mid (x, y) \in \text{Im}_e\}.$$

$$\text{Im}_s \subset Rp \subset F.$$

Симметричным назовем изображение, полученное в результате параллельных переносов рапорта вдоль оси OX (для полосы) и осей OX и OY (для плоскости).

$$\text{Im}_s = L(Rp) = \{L(x, y) \mid (x, y) \in Rp\}.$$

$$Rp \subset \text{Im}_s \subset F.$$

На основе приведенных определений, представим обобщенную структуру синтеза симметричных изображений (рис. 1).

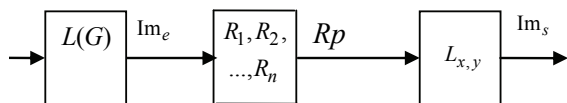


Рис. 1. Обобщенная структура синтеза симметричных изображений

Метод синтеза симметричных изображений базируется на алгоритмах описания элементарных изображений, алгоритмах формирования рапортов групп симметрии и их трансляций на полосе или плоскости. Следовательно, во время синтеза необходимо сформировать элементарное изображение, используя при этом язык грамматики $L(G)$, над которым выполнить порождающие преобразования, которые синтезируют рапорт и, выполнив параллельные переносы в одном или в двух направлениях (полоса, плоскость), получить симметричное изображение [9, 14]. Синтез симметричного изображения предусматривает сохранение расстояний в соответствующих точках при геометрических преобразованиях в рапорте и при его параллельных переносах. Уравнение порождения симметричного изображения в операторной форме, которое следует из приведенной структуры, представим следующим образом:

$$\text{Im}_s = L_{x,y}(R_n(R_{n-1}(\dots R_1(\text{Im}_e))))),$$

где $L_{x,y}$ – оператор трансляций вдоль осей OX и OY , R_1, R_2, \dots, R_n – операторы порождающих преобразований во время формирования рапорта Rp . Элементарный рисунок строится с использованием языка, на основе предложенной грамматики [9]. Компактно симметричное изображение можно представить в матричной форме. Используем матрицу преобразований порядка 3×3 в общем случае для плоскости однородных координат, которая имеет вид: $\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$, где a, b, c и d – коэффици-

енты масштабирования, вращения, отображения и сдвига, соответственно, m и n задают смещение, p и q – получение проекций. Элемент s проводит пропорциональное масштабирование [15]. В общем случае безотносительно к группе симметрии уравнение симметричного изображения имеет вид:

$$\text{Im}_s = T_L[T_n(T_{n-1}(T_{n-2} \dots T_1(X)))]),$$

где X – координатный вектор элементарного рисунка; T_1, T_2, \dots, T_n – матрицы порождающих преобразований рапорта; T_L – матрица трансляций вдоль OX и OY .

Метод синтеза асимметричных изображений

Для получения асимметричных изображений используем симметричные с искажением параметров формирования их составляющих.

Искажение – это целеустремленное неизометрическое преобразование параметров формирования группы симметрии; может быть *структурное* и *параметрическое*. Структурное искажение изменяет вид преобразования симметрии. Параметрическое – изменяет значение параметров (в допустимых пределах) при сохранении вида симметрии. Рассмотрим параметрические искажения. Введем следующие виды искажений:

D_m – изменение масштаба элементарного рисунка (однородное масштабирование); D_x – смещение по OX ; D_y – смещение по OY ; $D_{R\alpha}$ – поворот на угол α ; $D_{x,y}$ – смещение вдоль осей OX и OY ; $D_{x,y,R\alpha}$ – смещение вдоль осей OX и OY и поворот на угол α ; $D_{m,R\alpha}$ – изменение масштаба и поворот на угол α ; D_γ – смещение в направлении $(\cos \gamma, \sin \gamma)$; $D_{x,y,m,R\alpha}$ – смещение вдоль осей OX и OY , изменение масштаба и поворот на угол α . Перечисленные искажения, которые относятся к рапорту обозначим через D_{Rp} . Для искажения трансляций рапорта в общем случае может использоваться произвольная функция $f(x, y)$, то есть $D_{f(x,y)}$, которую обозначим через D_L .

Асимметричное изображение Im_{as} – изображение, полученное из симметричного путем искажения параметров его формирования. Это значит, что расстояние между соответствующими точками асимметричного изображения не является константой, а может быть задано в общем случае в виде функции. Обобщенная структура синтеза асимметричных изображений представлена на рис. 2.

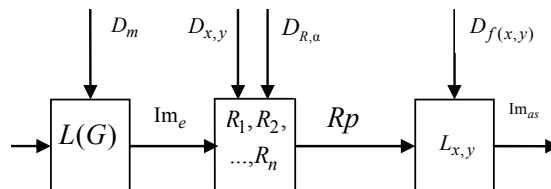


Рис. 2. Обобщенная структура синтеза асимметричных изображений

Учитывая введенные искажения, уравнения порождения асимметричного изображения, для общего случая в операторной форме можно представить следующим образом:

$$\text{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y} (D_{x,y} D_{R,\alpha} R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (D_m \text{Im}_e)))) .$$

Соответственно в матричном виде:

$$\text{Im}_{as} = T_L D_L [T_n D_{R_{p_n}} (T_{n-1} D_{R_{p_{n-1}}} (T_{n-2} D_{R_{p_{n-2}}} \dots T_1 D_{R_{p_1}} (XD_m)))] .$$

Поэтому введем асимметрию *первого* вида, при которой нарушается изометрия при параллельных переносах рапорта, который выражается уравнениями в операторном:

$$\text{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y} (R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (\text{Im}_e))))$$

и в матричном:

$$\text{Im}_{as} = T_L D_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (X)))] \text{ видах.}$$

Асимметрия *второго* вида предусматривает смещение и повороты между элементарными рисунками при построении рапорта. Соответствующие уравнения имеют следующий вид:

$$\text{Im}_{as} = D_{f(x,y)} L_{x,y} (D_{x,y} D_{R,\alpha} R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (D_m \text{Im}_e)))) ;$$

$$\text{Im}_{as} = T_L [T_n D_{R_{p_n}} (T_{n-1} D_{R_{p_{n-1}}} (T_{n-2} D_{R_{p_{n-2}}} \dots T_1 D_{R_{p_1}} (X)))] .$$

Асимметрия *третьего* вида хранит изометрию при построении рапортов и при их трансляции, но изменяет (масштабирует) элементарное изображение, что выражается уравнениями:

$$\text{Im}_{as} = L_{x,y} (R_n (R_{n-1} (\dots R_1 (D_m \text{Im}_e)))) ;$$

$$\text{Im}_{as} = T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (XD_m)))] .$$

Кроме этого, возможны различные комбинации базовых асимметричных структур, позволяющие получить разные классы сложных изображений.

Результаты экспериментов

Для программной реализации алгоритмов синтеза симметричных и асимметричных изображений использована интегрированная среда программирования *Visual C++ Express Edition 2005* и открытая библиотека функций компьютерного зрения *OPENCV* версии в 1.0 2006 г. На рис. 3 приведен пример синтезированного изображения группы $p4$.

Матричные уравнения порождающих преобразований для идеальной группы и искажений таковы:

• Уравнение порождающих преобразований для группы $p4$ (рис. 3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') & \frac{1}{2}(y'-x') & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & y' & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ix' & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & jy' & 1 \end{pmatrix} .$$

• Искажение рапорта: поворот на угол α , смещение по OX и OY на величины $\Delta x'$, $\Delta y'$ (рис. 4):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') & \frac{1}{2}(y'-x') & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x' & \Delta y' & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') \cos \alpha - \frac{1}{2}(y'-x') \sin \alpha & \frac{1}{2}(x'+y') \sin \alpha + \frac{1}{2}(y'-x') \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x' & \Delta y' & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \alpha + \Delta x' & \cos \alpha + \Delta y' & 0 \\ -\cos \alpha + \Delta x' & -\sin \alpha + \Delta y' & 0 \\ \frac{1}{2}(x'+y') \cos \alpha - \frac{1}{2}(y'-x') \sin \alpha + \Delta x' & \frac{1}{2}(x'+y') \sin \alpha + \frac{1}{2}(y'-x') \cos \alpha + \Delta y' & 1 \end{pmatrix} .$$

• Искажение расстояния между рапортами (смещение на Δx , Δy):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ix' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ix'+\Delta x & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & jy' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & jy'+\Delta y & 1 \end{pmatrix} .$$

В результате искажения (сдвига элементарных рисунков и их поворотов в пределах рапорта и изменения расстояний между рапортами) получаем искаженное изображение (рис. 5).

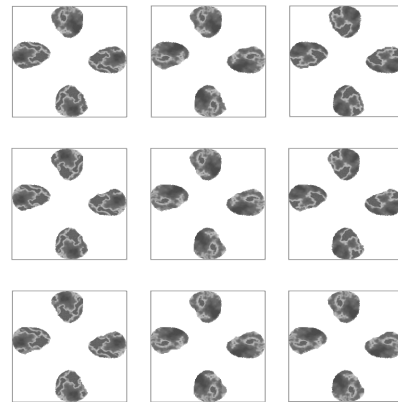


Рис. 3. Идеально построенная группа $p4$

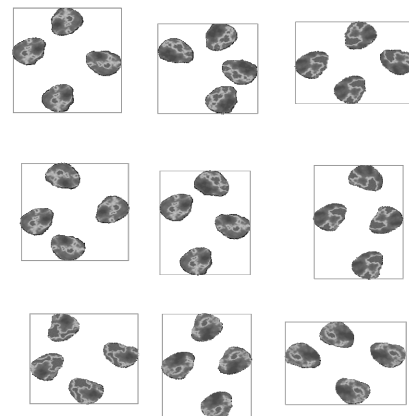


Рис. 4. Изображение группы $p4$: случайный сдвиг элементарных рисунков на 20 пикселей, поворот на 40°

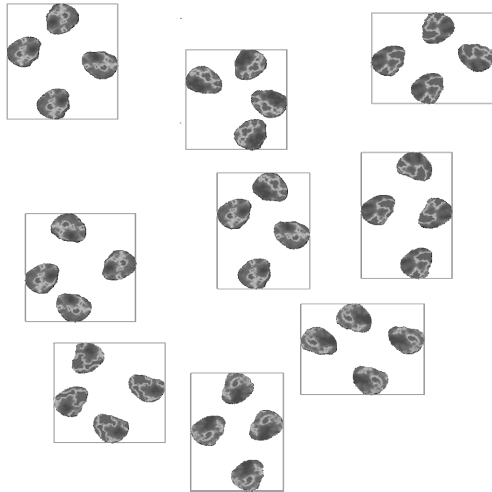


Рис. 5. Изображение группы p_4 : случайный сдвиг элементарных рисунков на 20 пикселей, поворот на 40° и сдвиг рапортов на 10 пикселей

Заключение. Симметричные изображения обладают избыточностью в структуре. Поэтому предложенное описание дает возможность существенно уменьшить объемы памяти для хранения таких изображений и эффективно синтезировать новые. Следующим направлением исследований будет разработка методов и алгоритмов анализа симметричных изображений.

Окончание статьи В.Ю. Сдобникова и др.

8. McLean G.F., Kotturi D. Vanishing point detection by line clustering // IEEE Trans. Pat. Anal. and Machine Intel. – 1995. – **17**, N 11. – P. 1090–1095.
9. Schaffalitzky F., Zisserman A. Planar grouping for automatic detection of vanishing lines and points, IVC(18), June 2000. – N 9. – P. 647–658.
10. Duda R.O., Hart P.E. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures // Comm. ACM, Jan. 1972. – **15**. – P. 11–15.
11. Canny J. A Computational Approach To Edge Detection // IEEE Trans. Pat. Anal. and Machine Intel., 1986. – **8**. – P. 679–714.
12. Fischler M.A., Bolles R.C. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography, Comm. of the ACM, June 1981. – **24**. – P. 381–395.
13. Schlesinger M.I., Hlavach V. Ten lectures on statistical and structural pattern recognition. – Dordrecht/ Boston/London: Kluwer Acad. Publ., 2002. – P. 519.
14. Gorman F.O., Clowes M.B. Finding Picture Edges Through Collinearity of Feature Points // IEEE Transactions on Computers, Apr. 1976. – **25**, N 4. – P. 449–456.
15. Demster A., Laird N., Rubin D. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // J. of the Royal Statistic Society. – 1977. – **B39**. – P. 1–38.

Поступила 17.05.2009

Тел. для справок: (044) 502-6336, 462-7327 (Киев)

© В.Ю. Сдобников, Б.Д. Савчинский, 2009