УДК 519.713.1

А.Н. Чеботарев, О.И. Куривчак

Допустимые преобразования автомата, взаимодействующего со средой

Рассмотрены локальные преобразования автомата, не изменяющие его композицию с другим автоматом. Преобразования состоят в удалении или добавлении переходов в автомате. Предложены и обоснованы методы построения таких преобразований.

Local transformations of an automaton are considered, that do not change its composition with another automaton. These transformations consist in the removal of the addition of transitions in the automaton. The methods for constructing such transformations are suggested and substantiated.

Розглянуто локальні перетворення автомата, які не змінюють його композицію з іншим автоматом. Ці перетворення полягають у вилученні або додаванні переходів у автоматі. Запропоновано та обґрунтовано методи побудови таких перетворень.

Введение. При проектировании реактивных систем, в основе которого лежат автоматные модели, существенное внимание уделяется методам оптимизации автоматов, учитывающим ограничения, налагаемые на допустимое поведение автомата вследствие его взаимодействия с окружающей средой. Начало изучению этой проблематики положил С. Ангер [1], указав на возможность использования для оптимизации автоматов ограничений на допустимые входные последовательности, возникающих при взаимодействии автомата со средой. Преобразование оптимизируемого автомата с целью последующей его минимизации, отражающее указанные ограничения, подробно рассмотрено в [2]. В основе предлагаемого подхода лежит построение детерминированного автомата-распознавателя A', представляющего множество всех запрещенных последовательностей (конечных) на входе автомата B, соединенного с выходом автомата A. Преобразование оптимизируемого автомата B превращает его в частичный автомат, переходы в котором не определены для запрещенных входных последовательностей. Такое преобразование осуществляется путем построения прямого произведения автоматов A' и B и удаления в нем всех переходов в состояния, первый компонент которых представляет собой финальное состояние автомата A'. Оптимизация полученного частичного автомата состоит в его минимизации, которая может привести к автомату, более простому, чем исходный автомат B. Поскольку сложность построения детерминированного автомата-распознавателя A' экспоненциально зависит от количества состояний автомата A и количество состояний в произведении $A' \times B$ может оказаться неприемлемо большим, такой подход годится только для задач небольшой размерности. В работе [3] предложен способ, позволяющий распространить этот метод на композицию с двусторонними связями между автоматами, т.е. на случай, когда выходы одного из них являются входами другого и наоборот. Хотя предложенный в [3] способ решения более общей задачи не существенно усложняет алгоритм Кима и Ньюборна [2], однако изначально присущая ему сложность, связанная с детерминизацией автомата-распознавателя и последующей его минимизацией, сохраняется. В работе [4] для последовательного соединения автоматов предложен подход, устраняющий необходимость выполнения этих наиболее трудоемких операций путем решения проблемы оптимизации на схемном уровне. При этом несколько изменена постановка задачи. Рассматривается локальное преобразование оптимизируемого автомата, состоящее в изменении одного из его переходов. В случае, когда такое изменение допустимо, рассматриваемый переход называется *избыточным* и, вообще говоря, может быть удален. Дальнейшее усовершенствование этого подхода, не требующее перехода к схемному представлению автомата, приведено в [5]. Существенная особенность такого подхода состоит в том, что оптимизационные преобразования не требуют значительного увеличения количества состояний оптимизируемого автомата, как это имеет место в алгоритме Кима и Ньюборна. Это в какой-то мере ограничивает возможности оптимизации, однако позволяет решать практические задачи.

В настоящей статье также рассматриваются локальные преобразования автомата, связанные с удалением или добавлением переходов без изменения количества его состояний. Следует отметить, что, поскольку работа выполнялась в рамках методологии доказательного проектирования реактивных алгоритмов [6], взаимодействующие автоматы определены над бесконечными последовательностями (сверхсловами), что приводит к понятию циклического автомата. Еще один момент, усложняющий рассматриваемую проблему, состоит в том, что она решается для неинициальных автоматов, что не позволяет использовать упомянутые методы оптимизации. И, наконец, последнее отличие предлагаемого подхода, увеличивающее его возможности, заключается в том, что рассматриваются не входные, а вход-выходные последовательности в композиции автоматов общего вида. Рассматриваются два класса преобразований и доказываются условия допустимости таких преобразований, т.е. условия того, что преобразования не приводят к изменению поведения композиции автоматов.

Основные понятия

Циклический Σ-автомат

Определение 1. Конечный неинициальный X–Y-автомат Мили A – это четверка $<X, Y, Q, \chi_A>$, где X, Y, Q – конечные множества соответственно входных символов, выходных символов и состояний, а χ_A: $Q \times X \to 2^{Q\times Y}$ – функция переходов/выходов автомата. X–Y-автомат A называется *детерминированным*, если для любых $q \in Q$, $x \in X$ $|\chi_A(q, x)| \leq 1$, в противном случае он называется *недетерминированным*. Автомат A будем называть *квазидетерминированным*, если для любых q, q_1, $q_2 \in Q$, $x \in X$ таких, что (q_1, y_1), $(q_2, y_2) \in \chi_A(q, x)$ из $q_1 \neq q_2$ следует $y_1 \neq y_2$.

В дальнейшем будем рассматривать структурированные входной и выходной алфавиты автомата, символы которых представляют собой наборы значений двоичных переменных соответственно из множеств V и W. Пусть Ω – множество двоичных переменных. Обозначим $\Sigma(\Omega)$ множество всех двоичных векторов длины $|\Omega|$, тогда входной и выходной алфавиты X–Y-автомата могут быть представлены как $X = \Sigma(V)$ и $Y = \Sigma(W)$. Вектор $\sigma \in \Sigma(\Omega)$ удобно рассматривать как отображение σ: $\Omega \to \{0, 1\}$. *Проекцией* $\sigma \in \Sigma(\Omega)$ на $\Omega_1 \subseteq \Omega$ будем называть ограничение отображения σ на множество Ω_1. Понятие проекции символа σ естественным образом распространяется на алфавит $\Sigma(\Omega)$.

При исследовании взаимодействующих автоматов рассматриваются вход–выходные последовательности, т.е. последовательности символов в алфавите $X \times Y$. В этом случае X–Y-автоматы удобно представлять в виде автоматов без выходов с входным алфавитом $\Sigma = X\times Y$. Такой автомат вида $A = <\Sigma_A, Q, \delta_A>$, где Σ_A – входной алфавит, Q – множество состояний, а δ_A: $Q \times \Sigma_A \to 2^Q$ – функция переходов, назовем *Σ-автоматом*. Σ-автомат A называется детерминированным, если для любых $\sigma \in \Sigma_A$ и $q \in Q$ $|\delta_A(q, \sigma)| \leq 1$. Заметим, что квазидетерминированному X–Y-автомату соответствует детерминированный Σ-автомат. Пусть q_1, $q_2 \in Q$, $\sigma \in \Sigma_A$. Тройку $t = <q_1, \sigma, q_2>$ назовем *переходом* из состояния q_1 в состояние q_2, а символ σ – *отметкой* этого *перехода*. Переход t называется *допустимым* в Σ-автомате $A = <\Sigma_A, Q, \delta_A>$, если $q_2 \in \delta_A(q_1, \sigma)$. Множество всех допустимых переходов в автомате A из состояния q обозначим $T(q)$, а множество всех переходов, допустимых в автомате A, – $T(A)$. Таким образом, алфавит Σ_A и множество состояний Q определяют множество всех возможных переходов, ассоциируемое с автоматом A, а множество $T(A)$ задает его функцию переходов.

Проекцией Σ-автомата $A = <\Sigma(\Omega), Q, \delta>$ *на множество переменных* $\Omega_1 \subseteq \Omega$ будем называть Σ-автомат $A_1 = <\Sigma(\Omega_1), Q, \delta_1>$, где функция δ_1 определена следующим образом. Пусть q, $q_1 \in Q$, $\sigma_1 \in \Sigma(\Omega_1)$, тогда $q_1 \in \delta_1(q, \sigma_1)$, если и только если существует такое $\sigma \in \Sigma(\Omega)$, что σ_1 есть проекция σ на Ω_1 и $q_1 \in \delta(q, \sigma)$.

Определение 2. Σ-автомат $A = <\Sigma_A, Q, \delta_A>$ называется *циклическим*, если для каждого $q \in Q$

существуют такие $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_A$ и $q_1, q_2 \in Q$, что $q_1 \in \delta_A(q, \sigma_1)$ и $q \in \delta_A(q_2, \sigma_2)$.

Для циклических автоматов $A_1 = A_2$ тогда и только тогда, когда $T(A_1) = T(A_2)$, т.е. циклический автомат A однозначно определяется множеством $T(A)$. Такие автоматы естественно использовать в качестве автоматных моделей при проектировании реактивных систем.

Синхронная циклическая композиция Σ-автоматов

На рис. 1 изображена структура наиболее общего вида, поведение которой описывается синхронной циклической композицией Σ-автоматов A и B. Здесь A и B – циклические Σ-автоматы, а I_1, I_2, U, V и другие – множества двоичных переменных, причем I_1 и I_2, U и O_1, V и O_2 могут пересекаться.

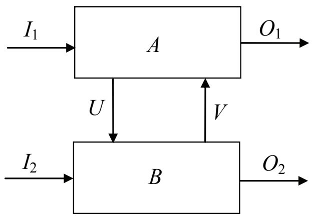


Рис. 1

Обозначим $\Omega_A = I_1 \cup U \cup V \cup O_1$, $\Omega_B = I_2 \cup \cup U \cup V \cup O_2$. Σ-автоматы A и B будем рассматривать как автоматы с одним и тем же алфавитом $\Sigma = \Sigma(\Omega_A \cup \Omega_B)$. Пусть $A = <\Sigma, Q_A, \delta_A>$ и $B = <\Sigma, Q_B, \delta_B>$. Их *произведение* $A \times B$ представляет собой Σ-автомат $C = <\Sigma, Q_C, \delta_C>$, где $Q_C = Q_A \times Q_B$, а функция δ_C определяется следующим образом. Пусть $a \in Q_A$, $b \in Q_B$, $\sigma \in \Sigma$, тогда $\delta_C(<a, b>, \sigma) = \delta_A(a, \sigma) \times \delta_B(b, \sigma)$. В терминах множеств допустимых переходов произведение $A \times B$ может быть охарактеризовано следующим образом: $<<a_1, b_1>, \sigma, <a_2, b_2>> \in \in T(A \times B)$ тогда и только тогда, когда $<a_1, \sigma, a_2> \in T(A)$ и $<b_1, \sigma, b_2> \in T(B)$, где $a_1, a_2 \in Q_A$, а $b_1, b_2 \in Q_B$.

Синхронной циклической композицией автоматов A и B (обозначается $A \circ B$) будем называть максимальный циклический подавтомат автомата $A \times B$.

Термин «синхронная» означает, что состояния автоматов A и B изменяются одновременно. Такое понятие естественно использовать при схемной реализации автоматов.

Нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Проекция циклической композиции $A \circ B$ на $\Omega_1 = \Omega_A \cap \Omega_B$ равна циклической композиции проекций автоматов A и B на Ω_1.

Множество символов, запрещенных в состоянии Σ-автомата

Множество отметок всех допустимых переходов из состояния b Σ-автомата B обозначим $\Sigma(b)$. Это множество символов, которые могут появиться на входе автомата, находящегося в состоянии q, при рассмотрении его поведения независимо от внешней среды. Если автомат B рассматривается как составная часть композиции $A \circ B$, соответствующее множество входных символов ограничивается поведением композиции. Назовем такое множество *множеством допустимых относительно композиции $A \circ B$ входных символов в состоянии b автомата B* и обозначим его $\Sigma_{A \circ B}(b)$. Множество $\Sigma_{A \circ B}(b)$ определяется как объединение отметок переходов из всех тех состояний автомата $A \circ B$, вторым компонентом которых является состояние b. Дополнение этого множества до Σ назовем множеством *входных символов, запрещенных* (относительно композиции $A \circ B$) *в состоянии b* автомата B и обозначим $DC_0(b)$. Это понятие используется при определении допустимости преобразования автомата B.

Оптимизационные преобразования

Рассматриваются преобразования, связанные с изменением функции переходов Σ-автомата. Такие преобразования удобно описывать в терминах множеств переходов автомата, ассоциируя с каждым преобразованием *trf* одноименное множество переходов $trf = \{t_1,\dots, t_k\}$, однозначно определяющее соответствующее преобразование. Смысл этого множества зависит от типа преобразования. Далее будут рассмотрены два типа таких преобразований. Первый из них называется *удалением переходов в автомате*, а второй – *добавлением переходов в автомат*. В преобразованиях первого типа *trf* представляет собой множество допустимых переходов для преобразуемого автомата, и преобразование состоит в удалении этих переходов из множества допустимых. В преобразованиях второго типа *trf* – это множество переходов, отличных от допустимых, и преобразование состоит в добавлении их к множеству допустимых переходов преобразуемого автомата. Результат применения преобразования *trf* к автомату A обозначим $trf(A)$.

Преобразование *trf* автомата B называется *допустимым относительно композиции* $A\circ B$, если оно сохраняет эту композицию, т.е. $A\circ trf(B) = A\circ B$ или, что то же самое, $T(A\circ trf(B)) = T(A\circ B)$.

Удаление переходов в автомате

Утверждение 2. Удаление перехода $t = <b_1, \sigma, b_2>$ из $T(B)$ не изменяет композицию $A\circ B$ тогда и только тогда, когда $T(A\circ B)$ не содержит никакого перехода вида $<<a_1, b_1>, \sigma, <a_2, b_2>>$, где $<a_1, \sigma, a_2> \in T(A)$.

Теорема 1. Если trf_1 и trf_2 допустимы относительно $A\circ B$, то преобразование $trf = trf_1 \cup \cup trf_2$ также допустимо относительно $A\circ B$.

Теорема следует из утверждения 2.

Из теоремы 1 следует, что существует единственное максимальное множество Trf_B допустимых в Σ-автомате B переходов, одновременное удаление которых из $T(B)$ допустимо относительно композиции $A\circ B$, другими словами, удаление любого перехода, не принадлежащего Trf_B, и только такого перехода, приводит к изменению композиции автоматов.

Для описания множества Trf_B определим проекции композиции $A\circ B$ на множество состояний автомата $A = <\Sigma, Q_A, \delta_A>$ и на множество состояний автомата $B = <\Sigma, Q_B, \delta_B>$, обозначив их соответственно $Pr1(A\circ B)$ и $Pr2(A\circ B)$. Предварительно определим аналогичные проекции переходов автомата $A\circ B$. Пусть $<<a_1, b_1>, \sigma, <a_2, b_2>> \in T(A\circ B)$, где $a_1, a_2 \in Q_A$, $b_1, b_2 \in Q_B$, $\sigma \in \Sigma$, тогда $Pr1(<<a_1, b_1>, \sigma, <a_2, b_2>>) = <a_1, \sigma, a_2>$, $Pr2(<<a_1, b_1>, \sigma, <a_2, b_2>>) = <b_1, \sigma, b_2>$. Проекции $A\circ B$ на множества состояний автоматов A и B будем задавать как множества соответствующих проекций всех переходов из $T(A\circ B)$. Так например, $T(Pr2(A\circ B)) = \{Pr2(t) \mid t \in \in T(A\circ B)\}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 3. Удаление перехода $t \in T(B)$ приведет к изменению композиции $A\circ B$ тогда и только тогда, когда $T(A\circ B)$ содержит переход, проекция которого на Q_B равна t.

Отсюда непосредственно следует, что $Trf_B = =T(B) \setminus T(Pr2(A\circ B))$. Очевидно, что любое преобразование *trf* автомата B, таково, что $trf \subseteq Trf_B$, допустимо относительно композиции $A\circ B$.

Для того чтобы получить множество Trf_B, необходимо построить циклическую композицию $A\circ B$. Это довольно трудоемкая процедура, состоящая из построения произведения $A \times B$ и выделения в нем максимального циклического подавтомата. Поэтому для практических целей можно использовать подмножества Trf_B, получение которых не связано с построением $A\circ B$. Такие подмножества удобно определять, используя множества запрещенных входных символов для каждого состояния преобразуемого автомата. В особенности это целесообразно для некоторых классов автоматов, например Σ-автоматов с конечной памятью [7], и определенных форм представления автомата, например нормальной формы автомата [8].

Пусть $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ и $b \in Q_B$, обозначим $T(b, \Sigma_1)$ множество всех допустимых переходов из состояния b, отмеченных символами из Σ_1, тогда преобразование $T(b, DC_0(b))$ для любого $b \in Q_B$ допустимо относительно композиции $A\circ B$. Отсюда следует, что $\bigcup_{b\in Q_B} T(b, DC_0(b)) \subseteq Trf_B$, более того, для детерминированного Σ-автомата B $\bigcup_{b\in Q_B} T(b, DC_0(b)) = Trf_B$. Очевидно, что для всякого $\Sigma_1 \subseteq DC_0(b)$ $T(b, \Sigma_1)$ – допустимое преобразование автомата B. Поскольку для вычисления $DC_0(b)$ необходимо построить $A\circ B$, то интерес представляют преобразования, определяемые такими подмножествами множества $DC_0(b)$, которые не требуют построения

$A\circ B$. Такие подмножества $DC_0(b)$ удобно определять, используя подходящие множества состояний автомата A, ассоциируемые с состоянием b автомата B.

Пусть $Q_A(b) = \{a_i \mid <a_i, b> \in Q_{A\circ B}\}$ и $DC_1(b)$ – дополнение множества $\bigcup\limits_{a\in Q_A(b)} \Sigma(a)$, т.е. $DC_1(b) = \Sigma \setminus \bigcup\limits_{a\in Q_A(b)} \Sigma(a)$, тогда $DC_1(b) \subseteq DC_0(b)$. Итак, допустимое преобразование может быть определено с помощью совокупности множеств $\{Q_A(b) \mid b \in Q_B\}$. Аналогично, любая совокупность $\{Q_1(b) \mid b \in Q_B\}$ множеств состояний автомата A, таких, что для каждого $b \in Q_B$ $Q_A(b) \subseteq Q_1(b)$, определяет допустимое преобразование автомата B.

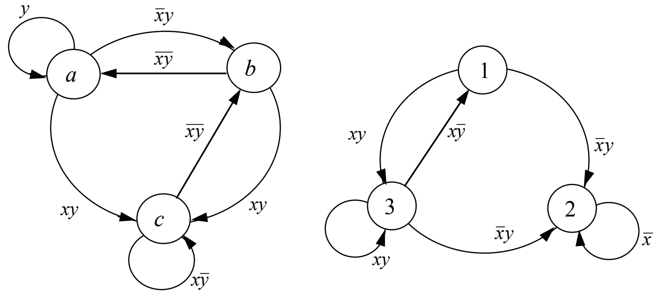
Рассмотрим совокупность множеств состояний автомата A $\{Q_1(b) \mid b \in Q_B\}$, определяемых следующим образом. Состояние a_i принадлежит $Q_1(b)$ тогда и только тогда, когда существуют такие $a_1 \in Q_A$, $b_1 \in Q_B$ и $\sigma \in \Sigma$, что $a_i \in \delta_A(a_1, \sigma)$ и $b \in \delta_B(b_1, \sigma)$, т.е. $<<a_1, b_1>, \sigma, <a_i, b>> \in T(A\times B)$. Для построения такой совокупности множеств нет необходимости строить ни $A\circ B$, ни $A \times B$. Особенно это удобно при выяснении возможности удаления или добавления переходов в конкретном состоянии преобразуемого автомата. Легко видеть, что для любого $b \in Q_B$ $Q_A(b) \subseteq Q_1(b)$ и, следовательно, преобразование первого типа, определяемое этой совокупностью множеств, допустимо относительно композиции $A\circ B$.

Рассмотрим на примере анализ возможностей удаления допустимых переходов в Σ-автомате B, взаимодействующем с Σ-автоматом A.

Пример 1. Σ-автоматы A и B представлены на рис. 2. Входной алфавит их определяется множеством двоичных переменных $\Omega = \{x, y\}$. Для задания множеств символов алфавита $\Sigma(\Omega)$ используются булевы функции от переменных x и y, при этом можно считать, что алфавит $\Sigma(\Omega)$ состоит из четырех символов: $\overline{xy}$, $x\bar{y}$, $\bar{x}y$ и xy.

Множество переходов, допустимых в автомате B, имеет следующий вид: $T(B) = \{<1, xy, 3>, <1, \bar{x}y, 2>, <2, \overline{xy}, 2>, <2, \bar{x}y, 2>, <3, x\bar{y}, 1>, <3, \bar{x}y, 2>, <3, xy, 3>\}$.

Циклическая композиция автоматов A и B определяется следующим множеством



Автомат A Автомат B

Рис. 2

допустимых переходов: $T(A\circ B) = \{<<a, 2>, \bar{x}y, <a, 2>>, <<a, 2>, \bar{x}y, <b, 2>>, <<a, 3>, xy, <a, 3>>, <<a, 3>, \bar{x}y, <a, 2>>, <<a, 3>, \bar{x}y, < b, 2>>, <<b, 2>, \overline{xy}, <a, 2>>\}$. Проекция этого множества на множество состояний автомата B равна $\{<2, \bar{x}y, 2>, <3, xy, 3>, <3, \bar{x}y, 2>\}$. Таким образом, $Trf_B = \{<1, xy, 3>, <1, \bar{x}y, 2>, <2, \overline{xy}, 2>, <3, x\bar{y}, 1>\}$, т.е. удаление в автомате B любого из этих переходов или всех их сохраняет циклическую композицию, или, другими словами, дает автомат, *эквивалентный автомату B относительно композиции $A\circ B$*.

Рассмотрим теперь преобразование trf_1, построение которого основано на вычислении множеств состояний автомата A, ассоциируемых с каждым состоянием автомата B. В соответствии с определением множеству $Q_1(1)$ принадлежат все те состояния автомата A, в которые имеется переход, отмеченный символом $x\bar{y}$. Таким состоянием является только c, поэтому $Q_1(1) = \{c\}$. Множество $Q_1(2)$ содержит все те состояния автомата A, в которые имеется переход, отмеченный символом $\overline{xy}$ или $\bar{x}y$. Таким образом, $Q_1(2) = \{a, b\}$. Аналогично, $Q_1(3) = \{a, c\}$. Множества $\Sigma(a)$, $\Sigma(b)$, $\Sigma(c)$ определяются соответственно формулами y, $xy \vee \vee \overline{xy}$, $\bar{y}$. В результате $DC_1(1) = y$, $DC_1(2) = x\bar{y}$, $DC_1(3) = 0$, что соответствует пустому множеству символов. Эти множества определяют преобразование $trf_1 = \{<1, xy, 3>, <1, \bar{x}y, 2>\}$.

Заметим, что это преобразование дает такой же циклический Σ-автомат, что и Trf_B.

Ранее Σ-автоматы A и B рассматривались как автоматы с одним и тем же алфавитом $\Sigma = \Sigma(\Omega_A \cup \Omega_B)$. Если $\Omega_A \neq \Omega_B$, то при определении допустимости преобразования автомата B можно поступать следующим образом. Вместо автоматов A и B достаточно рассматривать их проекции на $\Omega_1 = \Omega_A \cap \Omega_B$, которые обозначим соответственно A' и B'. При этом значения $DC_0(b)$ $(b \in Q_B)$, построенные исходя из композиции $A' \circ B'$, рассматриваются как множества символов из $\Sigma(\Omega_B)$. Определив, как и ранее, $T(b, DC_0(b))$ как множество всех допустимых переходов из состояния b, отмеченных символами из $DC_0(b)$, получим, что $Trf = \bigcup_{b \in Q_B} T(b, DC_0(b))$ – допустимое преобразование автомата B. Множества $Q_1(b)$ $(b \in Q_B)$ в этом случае определяются следующим образом. Состояние a_i принадлежит $Q_1(b)$ тогда и только тогда, когда существуют такие $a_1 \in Q_A$, $b_1 \in Q_B$ и $\sigma \in \Sigma(\Omega_A \cap \Omega_B)$, что $a_i \in \delta_{A'}(a_1, \sigma)$ и $b \in \delta_{B'}(b_1, \sigma)$. При вычислении $DC_1(b)$ вместо $\Sigma(a)$ используются проекции этих множеств на Ω_1, а $DC_1(b)$ также рассматривается как множество символов из $\Sigma(\Omega_B)$.

Добавление переходов в автомат

Для преобразований, состоящих в добавлении переходов в преобразуемый автомат, теорема 1 некорректна, поэтому рассмотрим добавление в $T(B)$ одного перехода $<b, \sigma, b_1>$, где $b, b_1 \in Q_B$, $\sigma \in \Sigma$. При добавлении в $T(B)$ перехода $<b, \sigma, b_1>$ в множество $T(A \times B)$ могут добавиться только переходы вида $<<a, b>, \sigma, <a_1, b_1>>$. Пусть B' – автомат, полученный из B в результате добавления перехода. Такое преобразование не допустимо относительно композиции $A \circ B$, если оно приводит к изменению циклической композиции автоматов, т.е. $A \circ B \neq A \circ B'$. Это возможно только в том случае, когда переход вида $<<a, b>, \sigma, <a_1, b_1>>$ принадлежит $T(A \circ B')$.

Утверждение 4. Переход $<q_1, \sigma, q_2>$ принадлежит множеству допустимых переходов циклического Σ-автомата A тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

а) имеется сильно связный подавтомат автомата A, из которого достижимо состояние q_1;

б) имеется сильно связный подавтомат автомата A, достижимый из состояния q_2.

Пусть $DC_1(b) = \Sigma \setminus \bigcup_{a \in Q_1(b)} \Sigma(a)$, где $b \in Q_B$ и $Q_1(b)$ – множество всех таких состояний $a \in Q_A$, что в автомате $A \times B$ существует допустимый переход в состояние $<a, b>$.

Теорема 2. Для всякого $\sigma \in \mathrm{DC}_1(b)$ добавление в $T(B)$ перехода $<b, \sigma, b_1>$ не приводит к изменению циклической композиции, если $b \neq b_1$ или не существует такого состояния $a \in Q_A \setminus Q_1(b)$, что $<a, \sigma, a> \in T(A)$.

Доказательство. Покажем, что $T(A \circ B')$ не содержит перехода $<<a, b>, \sigma, <a_1, b_1>>$, удовлетворяющего условиям теоремы.

1. Если $a \in Q_1(b)$, то, как следует из определения $\mathrm{DC}_1(b)$, $\sigma \notin \Sigma(a)$. Таким образом, переход $<<a, b>, \sigma, <a_1, b_1>>$ не принадлежит $T(A \times B')$, а следовательно, и $T(A \circ B')$.

2. Если $a \notin Q_1(b)$, т.е. $T(A \times B)$ не содержит ни одного перехода в состояние $<a, b>$, то переход $<<a, b>, \sigma, <a_1, b_1>>$ не принадлежит $T(A \circ B)$ в силу невыполнения условия а) утверждения 4. В автомате $A \times B'$ это условие может быть истинно только тогда, когда в результате добавления в $T(B)$ перехода $<b, \sigma, b_1>$ добавляется переход в состояние $<a, b>$. Это, в свою очередь, возможно только в случае, когда $b = b_1$ и $a = a_1$, т.е. $<a, \sigma, a> \in T(A)$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, и в этом случае $T(A \circ B')$ не содержит перехода $<<a, b>, \sigma, <a_1, b_1>>$.

Рассмотрим, как эту теорему можно использовать при анализе возможности добавления перехода из состояния 2 автомата B в примере 1. Как было показано, $DC_1(2) = x\bar{y}$, следовательно, в $T(B)$ может быть добавлен переход $<2, x\bar{y}, 1>$ или $<2, x\bar{y}, 3>$. Переход $<2, x\bar{y}, 2>$ не может быть добавлен в силу того, что $<c, x\bar{y}, c> \in T(A)$ и $c \notin Q_1(2)$.

Теорема 2 определяет достаточные условия допустимости добавления перехода из заданного состояния преобразуемого Σ-автомата. Следует заметить, что если в формулировке теоремы положить $DC_1(b) = \Sigma \setminus \bigcup_{a \in Q_A(b)} \Sigma(a)$, то она становится некорректной. Так, для рассмотренного примера $Q_A(3) = \{a\}$ и, соответственно, $DC_1(3) = \bar{y}$, однако добавление перехода <3, $\overline{xy}$, 1> или <3, $\overline{xy}$, 2> изменяет композицию $A \circ B$.

Заключение. Рассмотренные локальные преобразования автомата не изменяют его композицию с другим автоматом. Преобразования состоят в удалении или добавлении переходов в автомате, что не приводит к увеличению количества его состояний. Удаление переходов увеличивает степень частичности автомата и, следовательно, возможности его минимизации. Добавление перехода не упрощает автомат, однако в частичном или недетерминированном автомате может привести к появлению новых эквивалентных состояний, что также увеличивает возможности минимизации. Предложены и обоснованы методы построения таких преобразований. Резюмируем основные особенности постановки задачи и предложенного подхода к ее решению.

Существенное значение имеет ограничение класса рассматриваемых автоматов циклическими автоматами, что обусловлено постановкой задачи в контексте проектирования реактивных алгоритмов. Результатом композиции двух циклических автоматов является циклический автомат, что существенно ограничивает поведение композиции и дает дополнительные возможности преобразования оптимизируемого автомата. В отличие от большинства предшествующих работ в статье рассмотрены не только вполне определенные детерминированные автоматы, но и частичные, недетерминированные автоматы. Для такого класса автоматов целесообразно использовать в процессе оптимизации не входные, а вход-выходные последовательности, запрещенные в конкретном состоянии оптимизируемого X–Y-автомата. Локальность преобразований обусловлена тем, что рассматриваются только последовательности единичной длины (односимвольные). Рассмотрение последовательностей произвольной длины приводит к значительному увеличению количества состояний оптимизируемого автомата и усложнению задачи оптимизации. Хотя предложенный подход ориентирован на неинициальные автоматы, очевидно, что он может быть применен и к инициальным автоматам.

1. *Ангер С.* Асинхронные последовательностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
2. *Kim J., Newborn M.M.* The simplification of sequential machines with input restrictions // IEEE Trans. on Computers. – 1972. – C-21. – P. 1440–1443.
3. *WangY.Y.*, *Brayton R.K.* Input don't care sequences in FSM networks // Proc. IEEE/ACM Int. Conf. Computer-Aided Design. – 1993. – P. 321–328.
4. *WangY.Y.*, *Brayton R.K.* Exploitation of input don't care sequences in logic optimization of FSM networks. // Ibid. – 1995. – P. 728–735.
5. *Symbolic* optimization of interacting controllers based on redundancy identification and removal / F. Ferrandi, F. Fummi, E. Macii et al. // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of integrated circuits and systems. – 2000. – **19**, N 7. – P. 760–772.
6. *Чеботарев А.Н.*, *Головинский А.Л.* Доказательное проектирование алгоритмов функционирования реактивных систем // Искусственный интеллект. – 2008. – N 3. – С. 771–780.
7. *Брауэр В.* Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
8. *Капитонова Ю.В.*, *Чеботарев А.Н.* Индуктивный синтез автомата по спецификации в логическом языке *L* // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 3–13.

Поступила 16.09.2009

Тел. для справок: (044) 526-3677(Киев)
E-mail: *ancheb@gmail.com*

●