УДК 519.6

О.М. Литвин, С.Ю. Матвєєва, В.І. Межуєв

Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації

Для математического моделирования поверхности тела по данным радиолокации предложены модели, порожденные из метамодели G, состоящей из соответствующих размерностям пространства геометрических объектов (точки, линии, поверхности), математических методов (интерполяции, интерлинации и интерфлетации), а также совокупности правил порождения моделей. Рассмотрен новый метод восстановления поверхности тела по заданным на системе полос данным.

For the mathematical modelling of a body surface according to the radiolocation data the models are suggested generated from the G metamodel which consists of the corresponding dimensions of a space of the geometrical objects (a point, a line, a surface), mathematical methods (interpolation, interlination and interflatation), as well as of a set of rules of the models generation. A new method of the reset of the body surface according to the data specified on the system of strips is considered.

Для математичного моделювання поверхні тіла за даними радіолокації запропоновано моделі, породжені з метамоделі G, яка складається з відповідних вимірностям простору геометричних об'єктів (точки, лінії, поверхні), математичних методів (інтерполяції, інтерлінації та інтерфлетації), а також сукупності правил породження моделей. Розглянуто новий метод відновлення поверхні тіла за даними, що задані на системі смуг.

Вступ. Для математичного моделювання поверхні тіла за результатами даних радіолокації запропоновано моделі, породжені з метамоделі G. Метамодель – це модель моделі предметних галузей, яка складається з відповідних вимірностям простору геометричних об'єктів (точки, лінії, поверхні), математичних методів інтерполяції, інтерлінації та інтерфлетації [1, 2], а також сукупності правил породження моделей. Використання метамоделі G для породження сукупності моделей $M_1, M_2, \ldots, M_N$ дозволяє розглянути з єдиної точки зору різні підходи до моделювання поверхні тіла та побудувати систему комп'ютерних інструментів, що оптимізують процес моделювання, починаючи з задання початкової інформації і закінчуючи інтерпретацією та візуалізацією отриманого розв'язку.

Породження моделей поверхні тіла з метамоделі G є доцільним завдяки відповідності структури модельних об'єктів G структурі експериментальних даних, що отримуються у процесі радіолокації у вигляді значень функції у точках, а також слідів функції на заданих лініях або поверхнях. Зазначимо, що широко використовувана у картографії математична модель *DEM* (*Digital Elevation Model*) [3], також може бути породжена із G шляхом використання для опису тіла поверхонь у вигляді трикутників. При використанні метамоделі G такий спосіб подання інформації може бути поєднаний з заданням даних у точках та на лініях, які є базовими об'єктами G та дозволяють використати більш точні (порівняно з класичною інтерполяцією) методи інтерлінації та інтерфлетації.

Породження модельних об'єктів із метамоделі G здійснюється шляхом задання обмежень на геометричну структуру об'єктів метамоделі. Наприклад, шляхом накладання обмеження на лінію, отримуємо відрізок; з поверхні можуть бути породжені трикутники, смуги та інші модельні об'єкти. Важливим аспектом є можливість побудови складних моделей шляхом структурування базових елементів метамоделі.

Як приклад у статті розглядається новий метод відновлення поверхні тіла за даними, заданими на системі смуг – *interstripation* (*inter* – між, *strip* - смуга).

Найбільш вживаною на практиці для опису поверхні Землі та інших тіл є модель *DEM*, також відома як *DTM* (*Digital Terrain Model*). Сутність підходу полягає у заміні поверхні Землі або іншого тіла багатогранною поверхнею, кожна грань якої є трикутником. Координати вершин цих трикутників задаються дослідником при радіолокаційному зондуванні. В межах кожного такого трикутника структура досліджува-

Ключові слова: метамодель, модель поверхні, інтерполяція, інтерлінація, інтерфлетація, інтерстріпація.

ної частини поверхні Землі або іншого тіла вважається однорідною. Зазначимо, що практика часто потребує більш точного опису поверхні у межах такого трикутника, розмір якого може бути достатньо великим.

Крім того, існує певна невідповідність моделі *DEM* структурі експериментальних даних, отримуваних за допомогою радіолокації. Включення у модель *DEM* експериментальних даних іншої структури, взагалі кажучи, є нетривіальною задачею. Наприклад, це стосується застосування в описі таких характерних складових поверхні Землі, як лінії берегів річок або морів. Адже їх включення в опис поверхні потребує роботи з кожним трикутником - гранню багатогранної поверхні в системі *DEM* окремо.

Наведемо також приклад картографії дна океану за допомогою даних гідролокації (рис. 1). Лінії $x = x_k$ $(k = \overline{1, M_1})$ і $y = y_i$ $(i = \overline{1, M_2})$ є курсами корабля з гідролокатором, $z = f(x,y)$ є рівнянням поверхні дна океану, що потребує наближеного відновлення. З цього прикладу випливає цілком природне використання ліній як носіїв експериментальних даних гідролокації та, власне, доцільність включення лінії до метамоделі G.

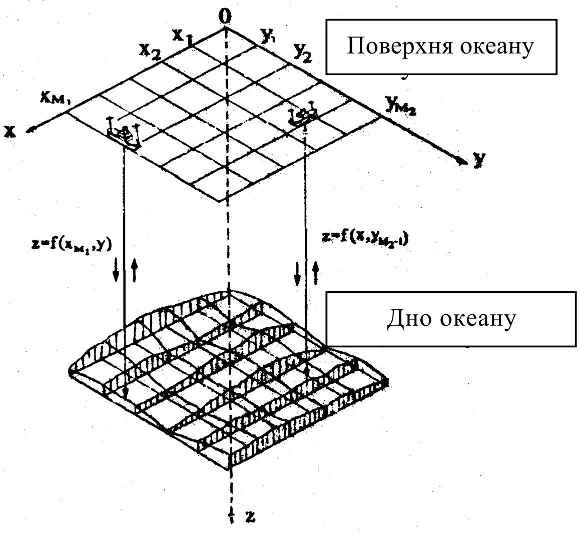

Рис. 1. Картографія дна океану за допомогою даних гідролокації

Іншим важливим прикладом є картографія поверхні космічного тіла за допомогою даних радіолокації (рис. 2). У цьому випадку дані радіолокації отримуються на системі смуг, розміщених на поверхні космічного тіла. Саме тому є доцільною розробка метода відновлення поверхні тіла за даними, заданими на системі смуг – *interstripation*.

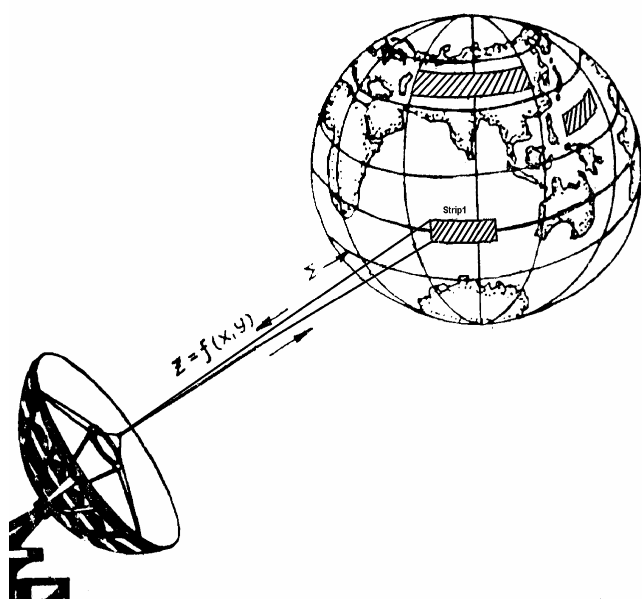

Рис. 2. Картографія поверхні космічного тіла за допомогою даних радіолокації

У загальному випадку такі смуги можуть накладатися одна на одну, отримуватися під різними кутами і навіть у різні моменти часу (наприклад, при картографуванні Венери «Магелланом» одна і та ж частина поверхні потрапила в поле зору радара на різних витках з проміжком часу у кілька десятків місяців; за цей час вона була дуже зруйнована землетрусом, вірніше «венеротрусом»). Тобто, стан певної частини поверхні з часом може мати досить великі відхилення від стану, зафіксованого на смузі під час руху супутника на одному з попередніх витків.

З наведених прикладів випливає, що використання метамоделі G, властивості якої будуть розкриті далі у статті, є цілком природним для подання та обробки інформації, отримуваної при радіолокації. Це зумовлено структурою інформації (експериментальних даних), що використовується у задачах картографії.

Саме тому *задача* узагальнення підходу до моделювання поверхонь тіл у рамках певної метамоделі, яка включає *DTM* як окремий випадок, є *актуальною*. Її розв’язання надає можливість більш точного опису поверхні планет та інших тіл як шляхом використання геометричних об'єктів, що більш повно відповідають наявним експериментальним даним, так і застосуванню найбільш сучасних методів теорії наближення функцій багатьох змінних – теорії інтерлінації та інтерфлетації функцій [1, 2].

Постановка задачі

Як зазначено, для обробки результатів радіолокації запропоновано математичну модель поверхні, що породжується метамоделлю G, яка складається із множини модельних об'єктів $\{P, L, S\}$, де P – точка, L – лінія, S – поверхня, множини операторів $\{O_p, O_l, O_f\}$, застосовних до цих модельних об'єктів, де O_p - оператор інтерполяції, O_l – оператор інтерлінації, O_f - оператор інтерфлетації та правил породження моделей $M_1, M_2, \ldots, M_N$ із G.

Особливість підходу також полягає у визначенні метамоделі G на двох рівнях – формальному (математичному) та візуальному, а саме як множини графічних об'єктів, що застосовуються для візуалізації $\{P, L, S\}$. Ці рівні визначення об'єктів пов'язані системою методів, які реалізуються у комп'ютерній системі шляхом певних предметних дій (маніпуляцій). Наприклад, зміна розташування візуального об'єкта «точка» на екрані комп'ютера приводить до зміни його радіус–вектора, визначеного на формальному рівні.

Зазначимо, що використання для моделювання таких базових об'єктів, як точка, лінія та поверхня обговорені у працях Рене Декарта ще у 1637 р. [4]. Можна також говорити про два рівня визначення цих об'єктів, а саме про геометричний та аналітичний, що і є основою методу координат Декарта. Зазначимо, що саме на основі метамоделі Декарта Ньютоном та Лейбніцем створено диференціальне та інтегральне числення.

Згадаємо також роботи нашого відомого співвітчизника академіка В.Л. Рвачова [5], побудовані на основі метамоделі Декарта. В своїх роботах В.Л. Рвачов розширив метамодель Декарта, включивши в неї властивості функцій булевої та k-значної логіки і властивості традиційних функцій багатьох змінних. Це дало можливість створити загальний метод побудови рівнянь границь областей складної форми.

У нашому випадку метамодель G використовується для породження конкретної моделі M предметної галузі (поверхні тіла). Породження здійснюється шляхом накладання обмежень на елементи метамоделі (наприклад, із лінії можна породити відрізок, із поверхні – трикутник або смугу тощо), а також конструювання більш складних моделей із елементарних частин метамоделі.

$G \Rightarrow M$, де модель M є множиною $\{\{P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_A\}, \{L_1, L_2, \ldots, L_B\}, \{S_1, S_2, \ldots, S_C\}\}$, в якій

$\{P_1, P_2, \ldots, P_A\}$ – множина точок,

$\{L_1, L_2, \ldots, L_B\}$ – множина ліній,

$\{S_1, S_2, \ldots, S_C\}$ – множина поверхонь,

$A + B + C = N$ – загальна кількість об'єктів моделі.

Кожен об'єкт множини $\{\{P_1, P_2, \ldots, P_A\}, \{L_1, L_2, \ldots, L_B\}, \{S_1, S_2, \ldots, S_C\}\}$ є носієм властивостей, а саме розподілу величин радіолокаційного зондування. До цих конкретних об'єктів моделі застосовуються відповідні оператори $\{O_p, O_l, O_f\}$, які є складовою частиною метамоделі.

Використання метамоделі у картографії

Побудова карт поверхонь тіл за даними радіолокації актуальна як на практиці, так і для теорії.

У запропонованій метамоделі вхідна інформація про поверхню Σ, карту якої маємо створити, задається значеннями невідомої функції двох $z = f(x, y)$ або трьох змінних $\Phi(x, y, z) = 0$ у заданій системі точок $\{P_1, P_2, \ldots, P_A\}$, її слідами на заданій системі ліній $\{L_1, L_2, \ldots, L_B\}$ та її слідами на деяких площинах або поверхнях $\{S_1, S_2, \ldots, S_C\}$ (криволінійних, заданих на частинах відомих поверхонь).

Для більш точного відновлення поверхні потрібно враховувати також всю додаткову інформацію про досліджувану поверхню (клас гладкості, до якого належить ця поверхня, її близькість до відомих поверхонь – площини, сфери, циліндра тощо). Використання комп'ютерних інструментів, побудованих на основі метамоделі, дозволяє оптимізувати застосування математичних методів, наприклад автоматично здійснити перехід від подання інформації у декартовій у сферичну чи циліндричну систему координат. Поверхня може також бути нічим іншим, як цифровим знімком поверхні тіла. У цьому разі перевагою використання комп'ютерних інструментів є розгляд зображення на знімках як функції від двох змінних.

Характеристика операторів метамоделі

Оператори метамоделі є формулами сплайн-інтерполяції, сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації [1, 2]. Інтерлінацією (інтерфлетацією) функцій багатьох змінних називається відновлення (можливо, наближене) цієї функції за допомогою її слідів та слідів її похідних до заданого порядку на системі ліній (або поверхонь відповідно). Інтерлінація та інтерфлетація функцій є природним узагальненням інтерполяції, яка є відновленням (можливо, наближеним) функції за допомогою її значень та значень її похідних до деякого порядку у заданій системі точок.

Інтерфлетацією функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, залежної від n змінних за допомогою її слідів (або слідів її похідних до заданого порядку $\le N$) на M поверхнях розмірності m є відновлення (можливо наближене) функції f у довільних точках заданої області. Якщо $m = 0$, то таке наближення є загальновідомою інтерполяцією функції за допомогою її значень в M точках (для $n \ge 1$). Якщо $m = 1$ (для $n \ge 2$), то таке наближення називається інтерлінацією (інколи *blending function interpolation* — мішаною інтерполяцією функцій) на M лініях.

Наведемо основні твердження про наближення функцій багатьох змінних за допомогою операторів інтерлінаці та інтерфлетації функцій. Інтерфлетація функцій може бути використана:

- у теорії апроксимації функцій;
- у методах ЛІДР або НІДР розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, які зводять крайову задачу для областей складної форми до систем звичайних лінійних або нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь;
- у картографії;
- у комп'ютерній томографії;
- у цифровій обробці багатовимірних сигналів;
- при описі поверхонь автомобілів, суден, літаків, космічних тіл тощо.

Введемо вказані та деякі нові означення з використанням загальноприйнятих математичних символів. Хай $n, M \in \mathrm{N}, m, N \in \overset{0}{\mathrm{N}}$ – задані числа, $\Pi_k, k = \overline{1, M}$ задані m-вимірні поверхні в $R^n\,(0 \le m < n)$; вважаємо для зручності, що точка теж є поверхнею розмірності $m = 0$, а лінія є поверхнею розмірності $m = 1$. Крім того, будемо вважати заданими функції $\varphi_{k,p}(x)$, $k = \overline{1, M}$, $p = \overline{0, N}$, які є слідами операторів $L_{k,p} f(x)$ від функції $f(x)$ (взагалі невідомої), тобто $\varphi_{k,p}(x)\big|_{\Pi_k} = L_{k,p} f(x)\big|_{\Pi_k}$, $k = \overline{1, M}$, $p = \overline{0, N}$. Оператори $L_{k,p} f(x)$ можуть бути частинними похідними або нормальними похідними $L_{k,p} f(x)\big|_{\Pi_k} = \partial^p f(x) / \partial \nu_k^p\big|_{\Pi_k}$, $p = \overline{0, N}$ для випадку $m = n - 1$ тощо (ν_k - вектор нормалі до Π_k).

Означення 1. Оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x) := O(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}, \{\varphi_{k,p}\}, x)$ називатимемо операторами інтерфлетації, якщо

$$L_{\ell,q}\, O(\{\varphi_{k,p}\}, x)\big|_{\Pi_\ell} = \varphi_{\ell,q}(x)\big|_{\Pi_\ell}, \ell = \overline{1, M}, q = \overline{0, N}.$$

Якщо $m = 0$, то $\Pi_k \in R^n$ є точками в R^n і сліди можуть бути значеннями функції $f(x)$ та її частинних похідних в цих точках. Тоді $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ є операторами інтерполяції на M точках. Якщо $m = 1$, $n \ge 2$, то Π_k є лініями в R^n і оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ є операторами інтерлінації на вказаних лініях.

Означення 2. Хай $x = (x_1, \ldots x_n)$

$$O(\{\varphi_{k,p}\}, x) = \sum_{\ell=1}^{M} \sum_{q=0}^{N} \Upsilon_{\ell,q}(\{\varphi_{k,p}\}, x)\, h_{\ell,q}(x),$$

де $h_{\ell,q}(x) = h_{\ell,q}(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}, x)$ – деяка система допоміжних функцій, незалежних від апроксимуючої функції $f(x)$ і $\Upsilon_{\ell,q}(\{\varphi_{k,p}\}, x) = \Upsilon_{\ell,q}(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}, \{\varphi_{k,p}\}, x)$ є лінійними операторами від функцій $\varphi_{k,p}, k = \overline{1, M}, p = \overline{0, N}$. Тоді оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будемо називати лінійними операторами інтерфлетації (інтерполяції, інтерлінації). Інакше ці оператори називатимемо нелінійними операторами інтерфлетації (інтерполяції, інтерлінації).

Означення 3. Хай допоміжні функції $h_{\ell,q}(x) = h_{\ell,q}(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}, x)$ є раціональними, поліноміальними, тригонометричними функціями або сплайн-функціями, або функціями, побудованими з використання R-функцій тощо. Тоді оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будемо називати операторами раціональної, поліноміальної, тригонометричної, сплайн-інтерфлетації (інтерполяції, інтерлінації) тощо.

Означення 4. Якщо $f(x) \in C^r(R^n)$, $r \geq N \geq 1$ та $O(\{\varphi_{k,p}\}, x) \in C^r(R^n)$, то оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будемо називати операторами, що зберігають клас диференційованості $C^r(R^n)$, до якого належить наближена функція $f(x)$. Інакше оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будемо називати операторами, які не зберігають клас диференційованості $C^r(R^n)$, до якого належить наближувана функція $f(x)$.

Означення 5. Якщо

$$\exists \ell, q : L_{\ell,q} O(\{\varphi_{k,p}\}, x)\Big|_{\Pi_\ell} \neq \varphi_{\ell,q}(x)\Big|_{\Pi_\ell},$$

то оператори $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ є операторами раціональної, поліноміальної, тригонометричної, сплайн-апроксимації тощо.

Порівняння інтерполяції, інтерлінації та інтерфлетації

Об'єкт мета-моделі	**Тип інформації, що дозволяє задати об'єкт метамоделі**	**Метод наближення**
Точка	Значення функції $f(x_1,...,x_n)$ та її похідних (до фіксованого порядку) у заданих точках	Інтерполяція функцій однієї або кількох змінних $n(n \geq 1)$
Лінія	Сліди функції $f(x_1,...,x_n)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на заданих лініях	Інтерлінація функцій двох або більше змінних $n(n \geq 2)$
Поверхня	Сліди функції $f(x_1,...,x_n)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на заданих поверхнях розмірності $m(0 \leq m \leq n-1)$	Інтерфлетація функцій трьох і більше змінних $n(n \geq 3)$

Наведемо у явному вигляді деякі вибрані формули, які використовуються для побудови операторів інтерлінації та інтерфлетації функцій [1, 2].

Оператори інтерлінації без збереження класу диференційовності $C^r(R^n)$, $r \geq 1$

• Оператори раціональної інтерлінації на M лініях. Хай $n = 2$ та $\Pi_k : \omega_k(x) := a_k x_1 + b_k x_2 - \gamma_k = 0, k = \overline{1,M}$, $a_k^2 + b_k^2 = 1$.

$$\varphi_{k,s}(x) = \partial^s f / \partial \nu_k^s(x)\Big|_{\Pi_k} =$$
$$= \partial^s f / \partial \nu_k^s(x_1, (\gamma_k - a_k x_1)/b_k),$$

якщо $b_k \neq 0$; $\nu_k = \nabla\omega_k(x) = (a_k, b_k)$ або

$$\varphi_{k,s}(x) = \partial^s f / \partial \nu_k^s(x)\Big|_{\Pi_k} =$$
$$= \partial^s f / \partial \nu_k^s((\gamma_k - b_k x_2)/a_k, x_2),$$

якщо $a_k \neq 0$,

$$O_{k,N} f(x) = \sum_{s=0}^{N} \varphi_{k,s}(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) \frac{\omega_k^s(x)}{s!},$$

$$H_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{M} \omega_i^{N^*}(x) / \sum_{\ell=1}^{M} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq \ell}}^{M} \omega_i^{N^*}(x), N^* =$$

$$= N+1, if\ N = 2q+1, q \in \overset{0}{\mathrm{N}}; N^* =$$

$$= N+2, if\ N = 2q, q \in \overset{0}{\mathrm{N}}.$$

Теорема 1. Якщо в одній точці перетинаються не більше двох прямих Π_k і Π_i, то оператор

$$O_{M,N}(\{\varphi_{k,s}\}, \{\Pi_k\}, x) = \sum_{k=1}^{M} O_{k,N} f(x) H_{k,N}(x)$$

має властивості

$$\partial^s O_{M,N}(\{\varphi_{k,s}\}, \{\Pi_k\}, x) / \partial \nu_k^s(x)\Big|_{\Pi_k} =$$
$$= \varphi_{k,s}(x)\Big|_{\Pi_k}, k = \overline{1,M}, s = \overline{0,N}.$$

Зауваження 1. Якщо $\Pi_k : \omega_k(x) = 0, k = \overline{1,M}$ є довільною множиною ліній або поверхонь в $R^n, n \geq 2$ та $\partial^p \omega_k(x) / \partial \nu_k^p\Big|_{\Pi_k} = \delta_{0,p}, p = \overline{0,N}$, то твердження теореми 1 залишається в силі, за умови, що в одній точці не перетинається більше ніж n ліній чи поверхонь(при $n > 2$).

• Поліноміальна, тригонометрична та сплайн-інтерлінація на множини взаємно перпендикулярних прямих ліній.

Хай $G = I^2$, $I = [0, 1]$, $0 = x_{k,0} < \cdots < x_{k,M_k} = 1$, $k = 1, 2$; $\partial^{s_k} f(x) / \partial x_k^{s_k}\Big|_{x_k = x_{k,i_k}} = \varphi_{k,i_k,s_k}(x_{3-k})$,

$$B_k f(x)=\sum_{i_k=0}^{M_k}\sum_{s_k=0}^{N}\varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k})h_{M_k,N,s_k}(x_k),$$

$$h^{(q)}_{M_k,i_k,s_k}(x_{k,j})=\delta_{q,i_k}\delta_{i_k,j},q,s_k=\overline{0,N};i_k,j=\overline{1,M_k}$$

$h_{M_k,N,s_k}(x_k)$ є базисною системою функцій однієї змінної для поліноміальної, тригонометричної або сплайн-інтерполяцієї.

Теорема 2. Оператори $Of(x)=(B_1+B_2-B_1B_2)\times$ $\times f(x)$ мають наступні властивості

$$\partial^p Of(x)/\partial x_k^p=\partial^p Of(x)/\partial x_k^p,$$

$$x_k=x_{k,i_k},p=\overline{0,N},i_k=\overline{0,M_k},k=1,2.$$

Крім того, якщо $R_{12}f(x):=(I-O)f(x)$ – залишковий член наближення функції $f(x)$ операторами $Of(x)$, то

$$R_{12}f(x):=(I-O)f(x)=(I-B_1)(I-B_2)f(x).$$

Звідси випливає, що $R_{12}f(x)=O(\varepsilon^2)$, якщо $(I-B_k)f(x)=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, $k=1,2$.

• Економні схеми операторів поліноміальної, тригонометричної та сплайн-інтерполяції побудовані за допомогою відповідних операторів інтерлінації.

В загальному випадку ці оператори мають таку форму $\overline{O}f(x)=(\overline{B}_1+\overline{B}_2-B_1B_2)f(x)$. Оператори $\overline{B}_k f(x)$ отримуються з операторів $B_k f(x)$ шляхом наступної заміни $\varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k})\approx\Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})$ в $B_k f(x)$, де $\Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})$ є поліноміальними, тригонометричними або сплайн-інтерполянтами з властивостями

$$\left\|\varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k})-\Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})\right\|=O(\varepsilon^2),\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_C.$$

Теорема 3. Оператори інтерполяції $\overline{O}f(x)$ використовують менше число значень функції $f(x)$, ніж класичні оператори $B_1B_2f(x)$ (за умови, що вони наближують $f(x)$ з похибкою $O(\varepsilon^2)$).

Оператори інтерлінації та інтерфлетації функції із збереженням класу $C^r(R^n)$, $r\ge 1$. Якщо при наближенні поверхні використовуються не тільки значення наближуваної функції, але також і значення її похідних до порядку $N\ge 1$, то для наближення рекомендуємо використовувати оператори інтерлінації функції, що зберігають клас диференційованості $C^r(R^n)$, $r\ge 1$, якому належить наближувана функція. Теорію побудови таких операторів можна знайти в [1, 2].

Відзначимо, що оператори сплайн-інтерполяції функцій трьох змінних, побудовані з використанням операторів сплайн-інтерфлетації функції трьох змінних на системі взаємно перпендикулярних площин паралельних координатним мають дуже високу точність порівняно з класичними операторами сплайн-інтерполяції. Тому зупинимось детальніше на формулах їх побудови.

Оператори 3D інтерполяції, побудовані за допомогою операторів 3D інтерфлетації.

Хай $f(x)\in C^{r,r,r}(I^3)$, $r=1,2$,

$$u_{k,i_k}(x)=f(x)\big|_{x_k=i_k/M},0\le i_k\le M,k=\overline{1,3},$$

$$L_{k,M}f(x)=\sum_{i_k=0}^{M}u_{k,i_k}(x)h(Mx_k-i_k),$$

$$h(t)=(|t-1|-2|t|+|t+1|)/2.$$

Теорема 4. Оператори

$Of(x)=(L_{1,M}+L_{2,M}+L_{3,M}-L_{1,M}L_{2,M}-L_{1,M}L_{3,M}-$ $-L_{2,M}L_{3,M}+L_{1,M}L_{2,M}L_{3,M})f(x)$ мають властивості $Of(x)\big|_{x_k=j_k/M}=f(x)\big|_{x_k=j_k/M},j_k=\overline{0,M},k=\overline{1,3}$,

$$\|f-Of\|=O(M^{-3r})\forall u\in C^{r,r,r}(I^3),r=1,2.$$

Теорема 5. Зробимо заміни

$$u_{1,i_1}(x)=f(i_1/M,x_2,x_3)\approx$$

$$\approx\bar{u}_{1,i_1}(x)=\sum_{j_2=0}^{M^{3/2}}\sum_{j_3=0}^{M^3}f(i_1/M,j_2/M^{3/2},j_3/M^3)\times$$
$$\times h(M^{3/2}x_2-j_2)h(M^3x_3-j_3)+$$
$$+\sum_{j_2=0}^{M^3}\sum_{j_3=0}^{M^{3/2}}f(i_1/M,j_2/M^3,j_3/M^{3/2})\times$$
$$\times h(M^3x_2-j_2)h(M^{3/2}x_3-j_3)-$$
$$-\sum_{j_2=0}^{M^{3/2}}\sum_{j_3=0}^{M^{3/2}}f(i_1/M,j_2/M^{3/2},j_3/M^{3/2})\times$$
$$\times h(M^{3/2}x_2-j_2)h(M^{3/2}x_3-j_3).$$

Аналогічні заміни зробимо також і для інших функцій двох і однієї змінної в Of. Тоді отримаємо оператор $\overline{O}f(x)$, який має властивості:

$$\left\| f - \overline{O}f \right\| = O\left(M^{-3r}\right);$$

$\overline{O}f(x)$ використовує $Q = 6(M+1)\left(M^{3/2}+1\right)\times\left(M^3+1\right) = O\left(M^{5,5}\right)$ значень функції f. Зауважимо, що класичні оператори тривимірної сплайн-інтерполяції $L_{1,M^3}L_{2,M^3}L_{3,M^3}f(x)$ кусочно-лінійної по кожній з трьох змінних, мають ту ж саму похибку і використовують $Q_{\text{classic}} = (n^3+1)^3 = O(n^9)$ значень функції f.

Аналогічні твердження справедливі також для наближення операторами мішаної апроксимації з використанням системи експериментальних даних на взаємно перпендикулярних прямих.

Картографія поверхні за даними її радіолокації. Розглянемо математичні методи відновлення поверхні тіла на основі радіолокаційних даних, отриманих на системах перетинних смуг. Запропонований метод істотно використовує оператори сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації функцій двох змінних [6].

Припустимо, що задано систему смуг $S_i : \alpha_i \le \omega_i(x,y) \le \beta_i, \quad i=\overline{1,n}, \omega_i := a_i x + b_i y - c_i$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$. Вважаємо відомими також рельєфи поверхні $S : z = f(x,y) \in C\left(R^2\right)$ над кожною смугою:

$$f_i(x,y) = \begin{cases} f\big|_{S_i}, \text{якщо}\,(x,y)\in S_i \\ 0, \quad \text{якщо}\,(x,y)\notin S_i \end{cases}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Треба за цією інформацією відновити (можливо наближено) функцію $f(x,y)$. Така задача виникає, зокрема, в картографії поверхні за даними радіолокації поверхні, отриманими за допомогою супутника, який рухається над територією S по фіксованих траєкторіях (очевидно, дані радіолокації поверхні охоплюють рельєф деякої смуги вздовж заданої траєкторії). Далі викладемо один з можливих підходів до розв'язання цієї задачі.

Перш за все відзначимо, що у випадку, коли всі смуги паралельні одній і мають спільні тільки границі (тобто не накладаються одна на одну) $S_i : \alpha_i \le \omega_i(x,y) \le \alpha_{i+1}, i=\overline{1,n}, -\infty < \alpha_1 ..., \alpha_{n+1} < \infty$, то задача розв'язується тривіально – потрібний оператор задається так

$$O\left(\{f_i\};x,y\right) = f_k(x,y), \quad (x,y)\in S_k, \quad i=\overline{1,n}.$$

Тому приділимо більше уваги загальному випадку. Введемо до розгляду такі позначення:

$$S_{k,p} = S_k \cap S_p,$$

$$f_{k,p}(x,y) = f(x,y)\Big|_{S_{k,p}} = f_k(x,y)\Big|_{S_p} = f_p(x,y)\Big|_{S_k},$$

$$\Omega_i(x,y) = \begin{cases} \omega_i(x,y) - \alpha_i, & \omega_i(x,y) < \alpha_i \\ 0, & \alpha_i \le \omega_i(x,y) \le \beta_i, \\ \omega_i(x,y) - \beta_i & \omega_i(x,y) > \beta_i \end{cases}$$

$$G_i(x,y) = \prod_{j=1, j\ne i}^{n} \Omega_j^2(x,y) \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1, j\ne k}^{n} \Omega_j^2(x,y), \quad i=\overline{1,n}.$$

Очевидно,

$$G_i(x,y)\Big|_{S_p} = \begin{cases} 1, & p=i, \\ 0, & p\ne i, \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{M} G_i(x,y) \equiv 1.$$

Ці властивості функцій $G_i(x,y)$ дають змогу довести справедливість наступної теореми.

Теорема 6. Оператор $O\left(\{f_i\};x,y\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} G_i(x,y) f_i(x,y) - \sum_{S_{k,p}\ne 0} G_k(x,y) G_p(x,y) f_{k,p}(x,y)$$

має такі властивості:

$$f_i(x,y) \in C\left(R^2\right), \quad i=\overline{1,n}$$

$$\Rightarrow O\left(\{f_i\};x,y\right) \in C\left(R^2\right);$$

$$O\left(\{f_i\};x,y\right)\Big|_{S_q} = f_q(x,y)\Big|_{S_q}, \quad q=\overline{1,n}.$$

Доведення. Запишемо (для $q=\overline{1,n}$)

$$O(\{f_i\};x,y)\Big|_{S_q}=\sum_{i=1}^{n}G_i(x,y)f_i(x,y)\Big|_{S_q}-$$

$$-\sum_{S_{k,p}\neq 0}G_k(x,y)G_p(x,y)f_{k,p}(x,y)\Big|_{S_q}=$$

$$=f_q(x,y)\Big|_{S_q}+\sum_{i=1,i\neq q}^{n}f_{i,q}(x,y)\Big|_{S_q}-$$

$$-\sum_{k=1,k\neq q}^{n}f_{k,q}(x,y)\Big|_{S_q}=f_q(x,y)\Big|_{S_q}.$$

Теорему доведено.

Отже, оператори $O(\{f_i\};x,y)$ дають змогу відтворювати невідому поверхню у точках між смугами за інформацією про неї, заданою на вказаних смугах. Для більшого наближення до практики слід пам'ятати, що функції $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,n}$ можуть бути задані у вигляді набору знімків, отриманих вздовж смуги, причому знімки можуть накладатися один на один, тобто мати спільні підобласті, а не тільки спільні границі. Це означає, що для побудови $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,n}$ у точках R^2 інколи слід використовувати для своєї побудови згладжуючі алгоритми, а не тільки алгоритми, що точно відновлюють поверхню заданої підобласті у смузі S_i, $i=\overline{1,n}$. Крім того, треба вміти продовжувати функції $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,n}$ за межі смуг. Наведемо один з можливих алгоритмів такого продовження. Хай смузі S_i відповідає місцева система координат $\omega_i:=a_ix+b_iy-c_i$, $\tau_i:=-b_ix+a_iy$. Тоді функція (тут $\omega_i=\omega_i(x,y)$))

$$\tilde{f}_i(x,y)=\begin{cases}f_i(x,y), & (x,y)\in S_i,\\ f_i\left(x-(\omega_i-\alpha_i)a_i,\,y-(\omega_i-\alpha_i)b_i\right), & \\ & \omega_i<\alpha_i,\\ f_i\left(x-(\omega_i-\beta_i)a_i,\,y-(\omega_i-\beta_i)b_i\right), & \\ & \omega_i>\beta_i\end{cases}$$

буде неперервною в R^2 і $\tilde{f}_i(x,y)=f_i(x,y)$, $(x,y)\in S_i$.

Висновки. Запропонована метамодель G дозволяє розглянути з єдиної точки зору різні підходи до моделювання поверхні тіла. Породження моделей поверхні тіла метамоделлю G є доцільним завдяки відповідності структури модельних об'єктів G структурі експериментальних даних, що отримуються у процесі радіолокації.

Запропонована для моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації метамодель використовує оператори, які наближують функцію $f(x,y)$ за допомогою слідів функцій та їх похідних на заданій системі точок, ліній або поверхонь.

Використання операторів інтерлінації, інтерфлетації та мішаної апроксимації приводить до більш точних результатів, ніж використання класичних операторів поліноміальної, тригонометричної та сплайн–інтерполяції і апроксимації. Тобто для досягнення однакової точності наближення можна використати меншу, ніж в класичних методах кількість експериментальних даних.

Запропонований математичний метод відновлення поверхні тіла на основі радіолокаційних даних, отриманих на системах перетинних смуг, істотно використовує оператори сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації функцій двох змінних.

1. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. - 544 с.
2. *Литвин О.М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи та фізико-механічні поля. - 2007. – № 4. – С. 61–82.
3. *http*://en.wikipedia.org/wiki/Digital_Elevation_Model
4. *Рене Декарт.* Міркування про метод. – 1637.
5. *Рвачёв В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техніка, 1967. – 212 с.
6. *Литвин О.М.*, *Матвєєва С.Ю.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій багатьох змінних та її застосування у картографії // Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку: Зб. наук. пр. – К.: ДНВП «Картографія», 2005. – **2**. – С. 22–24.

Поступила 15.12.2009
Тел. для справок: +38 0997808039 (Харьков)
+38 0501826071 (Бердянск)
E-mail: *academ_mail@ukr.net*; *svetlana*1980*g@mail.ru*;

О.Н. Литвин, В.И. Межуев, С.Ю. Матвеева

Метамодель для математического моделирования поверхности тела на основе данных радиолокации

Введение. Для математического моделирования поверхности тела по данным радиолокации предложены модели, порожденные из метамодели G, (т.е. модель моделей предметных областей), состоящей из соответствующих размерностям пространства геометрических объектов (точки, линии, поверхности), математических методов интерполяции, интерлинации и интерфлетации [1, 2], а также совокупности правил порождения моделей. Использование метамодели G для порождения совокупности моделей $M_1, M_2, \ldots, M_N$ позволяет рассмотреть с единой точки зрения различные подходы к моделированию поверхности тела и построить систему компьютерных инструментов, которые ускоряют и упрощают процесс моделирования, начиная с задания информации и заканчивая визуализацией и интерпретацией полученного решения.

Порождение моделей поверхности тела из метамодели G целесообразно благодаря соответствию структуры модельных объектов G структуре экспериментальных данных, фиксируемых в процессе радиолокации в виде значений функции в точках, а также следов функции на заданных линиях или поверхностях. Заметим, что широко используемая в картографии математическая модель *DEM* (*Digital Elevation Model*) [3], также может быть порождена из G путем использования для описания тела поверхностей в виде треугольников. При использовании метамодели G такой способ представления информации может быть объединен с заданием данных в точках и на линиях, которые являются базовыми объектами G и позволяют использовать более точные (сравнительно с классической интерполяцией) методы интерлинации и интерфлетации.

Порождение модельных объектов из метамодели G осуществляется путем задания ограничений на геометрическую структуру объектов метамодели. Например, налагая ограничения на линию, получаем отрезок; из поверхности могут быть порождены треугольники, полосы и другие модельные объекты. Иной важный аспект данного подхода – возможность построения сложных моделей путем композиции базовых элементов метамодели.

В качестве примера в статье рассматривается новый метод восстановления поверхности тела по данным, заданным на системе полос - *interstripation* (*inter* – между, *strip* - полоса).

Наиболее используемая на практике для описания поверхности Земли и других тел – модель *DEM*, также известная как *DTM* (*Digital Terrain Model*). Сущность подхода состоит в замене поверхности Земли или другого небесного тела многогранной поверхностью, каждая грань которого – треугольник. Координаты вершин этих треугольников задаются исследователем при радиолокационном зондировании. В пределах каждого такого треугольника структура исследуемой части поверхности Земли или другого тела считается однородной. Заметим, что практика часто требует более точного описания поверхности в пределах такого треугольника, размер которого может быть достаточно велик.

Кроме того, существует определенное несоответствие модели *DEM* структуре экспериментальных данных, получаемых в результате радиолокации. Включение в модель *DEM* экспериментальных данных с другой структурой – задача нетривиальная. Например, это касается применения в описании таких характерных составляющих поверхности Земли, как линии берегов рек или морей. Ведь их включение в описание поверхности требует обработки каждого треугольника (грани многогранной поверхности) в системе *DEM* отдельно.

Приведем также пример картографии дна океана при помощи данных гидролокации (рис. 1). Линии $x = x_k$ ($k = \overline{1, M_1}$) и $y = y_i$ ($i = \overline{1, M_2}$) представляют курс корабля с гидролокатором, $z = f(x,y)$ – уравнение поверхности дна океана, требующего приближенного восстановления. Из этого примера следует естественное использование геометрических линий как носителей экспериментальных данных гидролокации и, собственно, целесообразность включения линии в метамодель G.

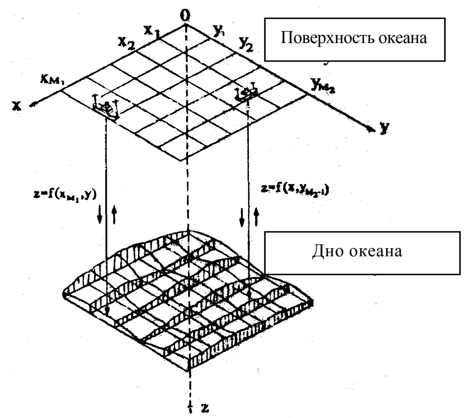

Рис. 1. Картография дна океана при помощи данных гидролокации

Иной значимый пример – картография поверхности космического тела по данным радиолокации (рис. 2). В этом случае данные радиолокации задаются на системе полос, размещенных на поверхности космического тела. Именно поэтому разработка метода восстановления поверхности тела по данным, заданным на системе полос (*interstripation*), – актуальна.

Ключевые слова: метамодель, модель поверхности, интерполяция, интерлинация, интерфлетация, интерстрипация.

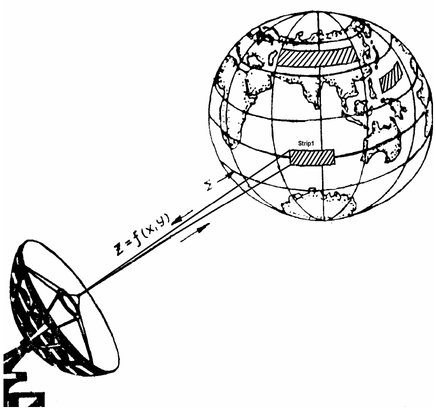

Рис. 2. Картография поверхности космического тела при помощи данных радиолокации

В общем случае такие полосы могут быть наложены одна на другую, находиться под разными углами и получаться в разные моменты времени. Например, при картографировании Венеры «Магелланом» одна и та же часть поверхности планеты попала в поле зрения радара на разных витках с промежутком в несколько десятков месяцев; за это время она была разрушена землетрясением, вернее «венеротрясением». Таким образом, состояние определенной части поверхности может иметь довольно большие отклонения от состояния, зафиксированного на полосе во время движения спутника по одному из предыдущих витков.

Из приведенных примеров следует, что использование метамодели G, свойства которой будут раскрыты в статье далее, естественны для представления и обработки информации, получаемой в процессе радиолокации. Это прежде всего обусловлено структурой экспериментальных данных, используемых в задачах картографии.

Именно поэтому *задача* обобщения подхода к моделированию поверхностей тел в рамках определенной метамодели, включающей *DTM* как частный случай, *актуальна*. Ее решение открывает возможность более точного описания поверхности планет и других тел как путем использования геометрических объектов, более точно соответствующих экспериментальным данным, так и применению современных методов теории приближения функций многих переменных - теории интерлинации и интерфлетации функций [1, 2].

Постановка задачи

Как отмечено, для обработки результатов радиолокации предложена математическая модель поверхности, порождаемой из метамодели G, состоящей из множества геометрических модельных объектов $\{P, L, S\}$, где P – точка, L – линия, S – поверхность множества применимых к этим модельным объектам операторов $\{O_p, O_l, O_f\}$, где O_p - оператор интерполяции, O_l - оператор интерлинации, O_f - оператор интерфлетации, а также правил порождения моделей $M_1, M_2, \ldots, M_N$ из G.

Особенность подхода также состоит в определении метамодели G на двух уровнях – формальном (математическом) и визуальном, а именно как множества графических объектов, применяемых для манипуляции и визуализации элементов $\{P, L, S\}$. Эти уровни определения объектов связаны системой методов, осуществляемых пользователем компьютерной системы предметными действиями (манипуляциями). Например, изменение местоположения визуального объекта «точка» на экране компьютера приводит к изменению его радиус–вектора, определенного на формальном уровне.

Заметим, что использование для моделирования предметных областей таких базовых геометрических объектов как точка, линия и поверхность было предметом многократного обсуждения в научной литературе, начиная с работ Рене Декарта, изданных еще в 1637 г. [4]. Кроме того, разные уровни определения этих объектов, - геометрический и аналитический, положены в основу метода координат Декарта. На основе подхода Рене Декарта в дальнейшем Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем было создано дифференциальное и интегральное исчисления.

Отметим также работы нашего известного соотечественника, академика Владимира Логвиновича Рвачова [5], которые также базируются на подходе Декарта. В.Л. Рвачов расширил метамодель Декарта, включив в нее свойства функций булевой и k-значной логики и свойства традиционных функций многих переменных. Это позволило создать общий метод построения уравнений границ областей сложной формы.

В нашем случае метамодель G используется для порождения конкретной модели M предметной области (в данном случае – поверхности тела). Порождение осуществляется путем наложения ограничений на элементы метамодели (например, из линии можно породить отрезок, из поверхности - треугольник, полосу и др.), а также методом композиции, т.е. конструирования более сложных моделей из элементарных элементов метамодели.

$G \Rightarrow M$, где модель M – множество $\{\{P_1, P_2, \ldots, P_A\}, \{L_1, L_2, \ldots, L_B\}, \{S_1, S_2, \ldots, S_C\}\}$, в котором

$\{P_1, P_2, \ldots, P_A\}$ - множество точек,

$\{L_1, L_2, \ldots, L_B\}$ - множество линий,

$\{S_1, S_2, \ldots, S_C\}$ - множество поверхностей,

$A + B + C = N$ - общее количество объектов модели предметной области.

Каждый объект множества $\{\{P_1, P_2, \ldots, P_A\}, \{L_1, L_2, \ldots, L_B\}, \{S_1, S_2 \ldots S_C\}\}$ есть носителем свойств, а именно распределения величин радиолокационного зондирования. К этим конкретным объектам модели применяются соответствующие операторы $\{O_p, O_l, O_f\}$, представляющие собой составную часть метамодели G.

Использование метамодели G в картографии

Построение карт поверхностей тел по данным радиолокации актуально как для практики, так и для теории.

В предложенной метамодели G информация о поверхности $\sum$, карту которой требуется создать, задается значениями неизвестной функции двух $z = f(x, y)$ или трех переменных $\Phi(x, y, z) = 0$ в заданной системе точек

$\{P_1, P_2, \dots, P_A\}$; ее следами на заданной системе линий $\{L_1, L_2, \dots, L_B\}$ и ее следами на некоторых плоскостях или поверхностях $\{S_1, S_2, \dots, S_C\}$ (криволинейных).

Для более точного восстановления функции необходимо учитывать также всю дополнительную информацию об исследуемой поверхности (класс гладкости, которому принадлежит эта поверхность, ее близость к известным поверхностям – плоскости, сфере, цилиндру и т.п.). Использование метамодели позволяет построить компьютерные инструменты, автоматизирующие применение многих математических методов (например, позволяющие автоматически осуществить переход от представления информации в декартовой в сферическую или цилиндрическую систему координат). Поверхность может также быть ничем иным, как цифровым снимком тела. В этом случае компьютерный инструмент позволяет рассмотреть изображение поверхности на снимке, как функцию двух переменных.

Характеристика операторов метамодели

Операторы метамодели G являются формулами сплайн-интерполяции, сплайн-интерлинации и сплайн-интерфлетации [1, 2]. Интерлинацией (интерфлетацией) функций многих переменных называется восстановление (возможно, приближенное) этой функции с помощью ее следов и следов ее производных до заданного порядка на системе линий (или поверхностей соответственно). Интерлинация и интерфлетация функций есть естественное обобщение интерполяции, которая есть восстановление (возможно, приближенное) функции с помощью ее значений и значений ее производных до некоторого порядка на заданной системе точек.

Интерфлетацией функции $f(x_1, \dots, x_n)$ n переменных с помощью ее следов (или следов ее производных до заданного порядка $\le N$) на M поверхностях размерности m является восстановление (возможно, приближенное) функции f в произвольных точках заданной области. Если $m=0$, то такое приближение есть общеизвестная интерполяция функции по ее значениям в M точках (для $n \ge 1$). Если $m = 1$ (для $n \ge 2$), то такое приближение называется интерлинацией (иногда *blending function interpolation* – смешанной интерполяцией функций) на M линиях.

Приведем основные утверждения о восстановлении функций многих переменных с помощью операторов интерлинации и интерфлетации. Интерфлетация функций может быть использована:

- в методах ЛИДР или НИДР решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, сводящими краевую задачу для областей сложной формы к системам обычных линейных или нелинейных интегро-дифференциальных уравнений;
- в теории аппроксимации функций;
- в картографии;
- в компьютерной томографии;
- в цифровой обработке многомерных сигналов;
- при описании поверхностей автомобилей, судов, самолетов, космических тел и др.

Введем указанные и некоторые новые определения с использованием общепринятых математических символов. Пусть $n, M \in \mathrm{N}, m, N \in \overset{0}{\mathrm{N}}$ – заданные числа, Π_k, $k = \overline{1, M}$ – заданные m-мерные поверхности в R^n $(0 \le m < n)$. Для удобства примем, что точка тоже – поверхность размерности $m = 0$, а линия – поверхность размерности $m = 1$. Кроме того, будем считать заданными функции $\varphi_{k,p}(x)$, $k = \overline{1, M}$, $p = \overline{0, N}$, которые есть следами операторов $L_{k,p} f(x)$ функции $f(x)$ (вообще неизвестной), т.е. $\varphi_{k,p}(x)\big|_{\Pi_k} = L_{k,p} f(x)\big|_{\Pi_k}$, $k = \overline{1, M}$, $p = \overline{0, N}$. Операторы $L_{k,p} f(x)$ могут быть частными производными или нормальными производными $L_{k,p} f(x)\big|_{\Pi_k} = \partial^p f(x) / \partial \nu_k^p\big|_{\Pi_k}$, $p = \overline{0, N}$ для случая $m = n - 1$ и т.п. (ν_k - вектор нормали к Π_k).

Определение 1. Операторы $O(\{\varphi_{k,p}\}, x) := O(\{L_{k,p}\}$, $\{\Pi_k\}$, $\{\varphi_{k,p}\}, x)$ назовем операторами интерфлетации, если $L_{\ell,q}\, O(\{\varphi_{k,p}\}, x)\big|_{\Pi_\ell} = \varphi_{\ell,q}(x)\big|_{\Pi_\ell}$, $\ell = \overline{1, M}$, $q = \overline{0, N}$.

Если $m = 0$, то $\Pi_k \in R^n$ – точки в R^n и следы могут быть значениями функции $f(x)$ и ее частных производных в этих точках. Тогда $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будут операторами интерполяции на M точках. Если $m = 1$, $n \ge 2$, то Π_k – линии в R^n и операторы $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будут операторами интерлинации на указанных линиях.

Определение 2. Пусть $x = (x_1, \dots x_n)$

$$O(\{\varphi_{k,p}\}, x) = \sum_{\ell=1}^{M} \sum_{q=0}^{N} \Upsilon_{\ell,q}(\{\varphi_{k,p}\}, x)\, h_{\ell,q}(x),$$

где $h_{\ell,q}(x) = h_{\ell,q}(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}, x)$ - некоторая система вспомогательных функций, независящих от аппроксимирующей функции $f(x)$ и $\Upsilon_{\ell,q}(\{\varphi_{k,p}\}, x) = \Upsilon_{\ell,q}(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}$, $\{\varphi_{k,p}\}, x)$ – линейные операторы от функций $\varphi_{k,p}$, $k = \overline{1, M}$, $p = \overline{0, N}$. Тогда операторы $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ будем называть линейными операторами интерфлетации (интерполяции, интерлинации). В противном случае эти операторы назовем нелинейными операторами интерфлетации (интерполяции, интерлинации).

Определение 3. Пусть вспомогательные функции $h_{\ell,q}(x) = h_{\ell,q}(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}, x)$ будут рациональными, полиномиальными, тригонометрическими функциями или сплайн-функциями, или функциями, построенными путем использования R-функций и пр. Тогда будем называть операторы $O(\{\varphi_{k,p}\}, x)$ операторами рациональной, полиномиальной, тригонометрической, сплайн-интерфлетации (интерполяции, интерлинации) и пр.

Определение 4. Если $f(x) \in C^r(R^n)$, $r \ge N \ge 1$ и $O(\{\varphi_{k,p}\},x) \in C^r(R^n)$, то операторы $O(\{\varphi_{k,p}\},x)$ будем называть операторами, сохраняющими класс дифференцированности $C^r(R^n)$, которому принадлежит функция приближения $f(x)$. Иначе операторы $O(\{\varphi_{k,p}\},x)$ будем называть операторами, не сохраняющими класс дифференцированности $C^r(R^n)$, которому принадлежат функция приближения $f(x)$.

Определение 5. Если $\exists \ell, q : L_{\ell,q}\, O\left(\{\varphi_{k,p}\},x\right)\Big|_{\Pi_\ell} \ne \ne \varphi_{\ell,q}(x)\Big|_{\Pi_\ell}$, то операторы $O(\{\varphi_{k,p}\},x)$ будут операторами рациональной, полиномиальной, тригонометрической, сплайн-аппроксимации и пр.

Сравнение методов интерполяции, интерлинации и интерфлетации

Объект метамодели	**Тип информации, которую позволяет задать объект метамодели**	**Метод приближения**
Точка	Значение функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и ее производных (до определенного порядка) в заданных точках	Интерполяция функций одной или нескольких переменных $n(n \ge 1)$
Линия	Следы функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и ее производных (до определенного порядка) на заданных линиях	Интерлинация функций двух или более переменных $n(n \ge 2)$
Поверхность	Следы функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и ее производных (до определенного порядка) на заданных поверхностях размерности $m(0 \le m \le n-1)$	Интерфлетация функций трех и более переменных $n(n \ge 3)$

Приведем в явном виде некоторые формулы, используемые для построения операторов интерлинации и интерфлетации функций [1, 2].

Операторы интерлинации без сохранения класса дифференцированности $C^r(R^2)$, $r \ge 1$

• Операторы рациональной интерлинации на M линиях. Пусть $n = 2$ и $\Pi_k : \omega_k(x) := a_k x_1 + b_k x_2 - \gamma_k = 0$, $k = \overline{1,M}$, $a_k^2 + b_k^2 = 1$,

$\varphi_{k,s}(x) = \partial^s f / \partial \nu_k^s(x)\Big|_{\Pi_k} = \partial^s f / \partial \nu_k^s(x_1, (\gamma_k - a_k x_1)/b_k)$,

если $b_k \ne 0$; $\nu_k = \nabla\omega_k(x) = (a_k, b_k)$ или $\varphi_{k,s}(x) = \partial^s f / \partial \nu_k^s(x)\Big|_{\Pi_k} = \partial^s f / \partial \nu_k^s((\gamma_k - b_k x_2)/a_k, x_2)$, если $a_k \ne 0$,

$$O_{k,N} f(x) = \sum_{s=0}^{N} \varphi_{k,s}\left(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)\right)\frac{\omega_k^s(x)}{s!},$$

$$H_k(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{M} \omega_i^{N^*}(x) \Big/ \sum_{\ell=1}^{M} \prod_{\substack{i=1\\ i\ne \ell}}^{M} \omega_i^{N^*}(x), N^* = N+1, if\ N = 2q+1, q \in \overset{0}{\mathrm{N}}; N^* = N+2, if\ N = 2q, q \in \overset{0}{\mathrm{N}};$$

Теорема 1. Если в одной точке пересекаются не более двух прямых Π_k и Π_l, то оператор

$$O_{M,N}\left(\{\varphi_{k,s}\},\{\Pi_k\},x\right) = \sum_{k=1}^{M} O_{k,N} f(x) H_{k,N}(x)$$

имеет свойство

$$\partial^s O_{M,N}\left(\{\varphi_{k,s}\},\{\Pi_k\},x\right) / \partial \nu_k^s(x)\Big|_{\Pi_k} = \varphi_{k,s}(x)\Big|_{\Pi_k}, k = \overline{1,M}, s = \overline{0,N}.$$

Замечание 1. Если $\Pi_k : \omega_k(x) = 0, k = \overline{1,M}$ – произвольное множество линий или поверхностей в R^n, $n \ge 2$ и $\partial^p \omega_k(x) / \partial \nu_k^p\Big|_{\Pi_k} = \delta_{0,p}, p = \overline{0,N}$, то утверждение теоремы 1 остается в силе при условии, что в одной точке пересекается не более, чем n линий или поверхностей (при $n > 2$).

• Полиномиальная, тригонометрическая и сплайн-интерлинация на множестве взаимно перпендикулярных прямых линий.

Пусть $G = I^2, I = [0,1]$, $0 = x_{k,0} < \cdots < x_{k,M_k} = 1$, $k = 1,2$;

$$\partial^{s_k} f(x) / \partial x_k^{s_k}\Big|_{x_k = x_{k,i_k}} = \varphi_{k,i_k,s_k}(x_{3-k}),$$

$$B_k f(x) = \sum_{i_k=0}^{M_k} \sum_{s_k=0}^{N} \varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k}) h_{M_k,N,s_k}(x_k),$$

$$h^{(q)}_{M_k,i_k,s_k}(x_{k,j}) = \delta_{q,i_k}\delta_{i_k,j}, q, s_k = \overline{0,N}; i_k, j = \overline{1,M_k}$$

$h_{M_k,N,s_k}(x_k)$ – базисная система функций одной переменной для полиномиальной, тригонометрической или сплайн-интерполяции.

Теорема 2. Операторы $Of(x) = (B_1 + B_2 - B_1B_2)f(x)$ имеют следующие свойства: $\partial^p Of(x)/\partial x_k^p = \partial^p Of(x)/\partial x_k^p, x_k = x_{k,i_k}$, $p = \overline{0,N}$, $i_k = \overline{0,M_k}$, $k = 1,2$, кроме того, если $R_{12}f(x) := (I - O)f(x)$ – конечный член приближения функции $f(x)$ операторами $Of(x)$, то

$$R_{12}f(x) := (I - O)f(x) = (I - B_1)(I - B_2)f(x),$$

Отсюда следует, что $R_{12}f(x) = O(\varepsilon^2)$, если $(I - B_k)f(x) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0, k = 1, 2$.

• Экономные схемы построения операторов полиномиальной, тригонометрической и сплайн-интерполяции, полученные с помощью соответствующих операторов интерлинации.

В общем случае эти операторы имеют форму $\overline{O}f(x) = \left(\overline{B}_1 + \overline{B_2} - B_1B_2\right)f(x)$. Операторы $\overline{B}_k f(x)$ получаются из операторов $B_k f(x)$ вследствие следующей замены $\varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k}) \approx \Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})$ в $B_k f(x)$, где $\Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})$ – полиномиальные, тригонометрические или сплайн-интерполянты со свойствами

$$\left\|\varphi_{i_k,s_k}\left(x_{3-k}\right)-\Phi_{i_k,s_k}\left(x_{3-k}\right)\right\|=O\left(\varepsilon^2\right),\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_C.$$

Теорема 3. Операторы интерполяции $\overline{O}f\left(x\right)$ используют меньшее число значений функции $f(x)$, чем классические операторы $B_1B_2f(x)$ (при условии, что они приближают $f(x)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$).

Операторы интерлинации и интерфлетации функции с сохранением класса $C^r(R^2)$, $r\geq 1$. Если при восстановлении поверхности тела используются не только значения аппроксимирующей функции, но и значения ее производных до порядка $N\geq 1$, то рекомендуется использовать операторы интерлинации функций, сохраняющие класс дифференцированности $C^r(R^2)$, $r\geq 1$, которому принадлежит аппроксимирующая функция. Теорию построения таких операторов можно найти в [1, 2].

Отметим, что операторы сплайн-интерполяции функций трех переменных, построенные с использованием операторов сплайн-интерфлетации функции трех переменных на системе взаимно перпендикулярных плоскостей, имеют очень высокую точность в сравнении с классическими операторами сплайн-интерполяции. Поэтому остановимся на формулах их построения.

Операторы 3D интерполяции, построенные при помощи операторов 3D интерфлетации

Пусть $f\left(x\right)\in C^{r,r,r}\left(I^3\right)$, $r=1,2$, $u_{k,i_k}\left(x\right)=$ $=f\left(x\right)\big|_{x_k=i_k/M}$, $0\leq i_k\leq M$, $k=\overline{1,3}$,

$$L_{k,M}f\left(x\right)=\sum_{i_k=0}^{M}u_{k,i_k}\left(x\right)h\left(Mx_k-i_k\right),$$

$$h\left(t\right)=\left(\left|t-1\right|-2\left|t\right|+\left|t+1\right|\right)/2.$$

Теорема 4. Операторы $Of\left(x\right)=(L_{1,M}+L_{2,M}+L_{3,M}-$ $-L_{1,M}L_{2,M}-L_{1,M}L_{3,M}-L_{2,M}L_{3,M}+L_{1,M}L_{2,M}L_{3,M})f\left(x\right)$ имеют свойства

$$Of\left(x\right)\big|_{x_k=j_k/M}=f\left(x\right)\big|_{x_k=j_k/M},\ j_k=\overline{0,M},\ \ k=\overline{1,3},$$

$$\left\|f-Of\right\|=O\left(M^{-3r}\right)\forall u\in C^{r,r,r}\left(I^3\right),\ \ r=1,2.$$

Теорема 5. Сделаем замены $u_{1,i_1}\left(x\right)=f\left(i_1/M,x_2,x_3\right)\approx$

$$\approx\overline{u}_{1,i_1}\left(x\right)=\sum_{j_2=0}^{M^{3/2}}\sum_{j_3=0}^{M^3}f\left(i_1/M,j_2/M^{3/2},j_3/M^3\right)\times$$
$$\times h\left(M^{3/2}x_2-j_2\right)h\left(M^3x_3-j_3\right)+$$
$$+\sum_{j_2=0}^{M^3}\sum_{j_3=0}^{M^{3/2}}f\left(i_1/M,j_2/M^3,j_3/M^{3/2}\right)\times$$
$$\times h\left(M^3x_2-j_2\right)h\left(M^{3/2}x_3-j_3\right)-$$
$$-\sum_{j_2=0}^{M^{3/2}}\sum_{j_3=0}^{M^{3/2}}f\left(i_1/M,j_2/M^{3/2},j_3/M^{3/2}\right)\times$$
$$\times h\left(M^{3/2}x_2-j_2\right)h\left(M^{3/2}x_3-j_3\right).$$

Аналогичные замены сделаем также и для других функций одной и двух переменных в Of. Тогда получим оператор $\overline{O}f\left(x\right)$, который имеет свойства:

$$\left\|f-\overline{O}f\right\|=O\left(M^{-3r}\right);$$

$\overline{O}f\left(x\right)$ использует $Q=6\left(M+1\right)\left(M^{3/2}+1\right)\cdot\left(M^3+1\right)=$ $=O\left(M^{5,5}\right)$ значений функции f. Заметим, что классические операторы трехмерной сплайн-интерполяции $L_{1,M^3}L_{2,M^3}L_{3,M^3}f\left(x\right)$ кусочно-линейной по каждой из трех переменных, имеют ту же погрешность и используют $Q_{\text{classic}}=(n^3+1)^3=O(n^9)$ значений функции f.

Аналогичные утверждения справедливы также для приближения операторами мешаной аппроксимации с использованием экспериментальных данных на системе взаимно перпендикулярных прямых.

Картография поверхности по данным ее радиолокации

Рассмотрим математические методы восстановления поверхности тела на основе радиолокационных данных, полученных на системах пересекающихся полос. Предложенный метод существенно использует операторы сплайн-интерлинации и сплайн-интерфлетации функций двух переменных [6].

Предположим, что задана система полос $S_i: a_i\leq\omega_I(x,y)\leq$ $\leq\beta_I$, $i=\overline{1,n}$, $\omega_i:=a_ix+b_iy-c_i$, $a_i^2+b_i^2=1$. Считаем известными также рельефы поверхности S: $z=f(x,y)\in$ $\in C(R^2)$ над каждой полосой:

$$f_i\left(x,y\right)=\begin{cases}f\big|_{S_i},\text{если}\left(x,y\right)\in S_i\\0,\ \text{если}\left(x,y\right)\notin S_i\end{cases},\quad i=\overline{1,n}.$$

Необходимо по этой информации восстановить (возможно, приближенно) функцию $f(x,y)$. Такая задача возникает, в частности, в картографии поверхности по данным радиолокации, полученным со спутника, движущегося над территорией S по фиксированным траекториям (очевидно, эти данные охватывают рельеф некоторой полосы вдоль заданной траектории). Далее предложен один из возможных подходов к решению этой задачи.

Прежде всего отметим, что в случае, когда все полосы параллельны и имеют только общие границы (т.е. наложение отсутствует)

$$S_i:\alpha_i\leq\omega_i\left(x,y\right)\leq\alpha_{i+1},$$
$$i=\overline{1,n},\quad -\infty<\alpha_1...,\alpha_{n+1}<\infty,$$

данная задача имеет тривиальное решение, ее оператор задается так:

$$O\left(\{f_i\};x,y\right)=f_k\left(x,y\right),\quad \left(x,y\right)\in S_k,\quad i=\overline{1,n}.$$

Поэтому рассмотрим общий случай. Введем следующие обозначения: $S_{k,p}=S_k\cap S_p$,

$$f_{k,p}\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)\Big|_{S_{k,p}}=f_k\left(x,y\right)\Big|_{S_p}=f_p\left(x,y\right)\Big|_{S_k},$$

$$\Omega_i\left(x,y\right)=\begin{cases}\omega_i\left(x,y\right)-\alpha_i, & \omega_i\left(x,y\right)<\alpha_i\\ 0, & \alpha_i\le\omega_i\left(x,y\right)\le\beta_i,\\ \omega_i\left(x,y\right)-\beta_i & \omega_i\left(x,y\right)>\beta_i\end{cases}$$

$$G_i\left(x,y\right)=\prod_{j=1,j\ne i}^{n}\Omega_j^2\left(x,y\right)\Big/\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1,j\ne k}^{n}\Omega_j^2\left(x,y\right),\ i=\overline{1,n}.$$

Очевидно,

$$G_i\left(x,y\right)\Big|_{S_p}=\begin{cases}1, & p=i,\\ 0, & p\ne i,\end{cases}\qquad \sum_{i=1}^{M}G_i\left(x,y\right)\equiv 1.$$

Эти свойства функций $G_i(x,y)$ предоставляют возможность доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. Оператор $O\left(\{f_i\};x,y\right)=$

$$=\sum_{i=1}^{n}G_i\left(x,y\right)f_i\left(x,y\right)-\sum_{S_{k,p}\ne 0}G_k\left(x,y\right)G_p\left(x,y\right)f_{k,p}\left(x,y\right)$$

имеет такие свойства:

$$f_i\left(x,y\right)\in C\left(R^2\right),\quad i=\overline{1,n}\quad\Rightarrow O\left(\{f_i\};x,y\right)\in C\left(R^2\right);$$

$$O\left(\{f_i\};x,y\right)\Big|_{S_q}=f_q\left(x,y\right)\Big|_{S_q},\quad q=\overline{1,n}.$$

Доказательство. Запишем (для $q=\overline{1,n}$)

$$O\left(\{f_i\};x,y\right)\Big|_{S_q}=\sum_{i=1}^{n}G_i\left(x,y\right)f_i\left(x,y\right)\Big|_{S_q}-$$

$$-\sum_{S_{k,p}\ne 0}G_k\left(x,y\right)G_p\left(x,y\right)f_{k,p}\left(x,y\right)\Big|_{S_q}=$$

$$=f_q\left(x,y\right)\Big|_{S_q}+\sum_{i=1,i\ne q}^{n}f_{i,q}\left(x,y\right)\Big|_{S_q}-\sum_{k=1,k\ne q}^{n}f_{k,q}\left(x,y\right)\Big|_{S_q}=$$

$$=f_q\left(x,y\right)\Big|_{S_q}.$$

Теорема доказана.

Итак, операторы $O\left(\{f_i\};x,y\right)$ дают возможность восстановления неизвестной поверхности в точках между полосами по информации, заданной на указанных полосах. Для лучшего приближения на практике следует учитывать, что функции $f_i\left(x,y\right)$, $i=\overline{1,n}$ могут быть заданы в виде набора снимков, полученных вдоль полосы, причем снимки могут быть наложены один на другой, т.е. иметь общие подобласти, а не только общие границы. Это означает, что для построения $f_i\left(x,y\right)$, $i=\overline{1,n}$ в точках R^2 иногда необходимо использовать алгоритмы сглаживания, а не только алгоритмы, точно восстанавливающие поверхность заданной подобласти на полосе S_i, $i=\overline{1,n}$. Кроме того, необходимо уметь продолжать функции $f_i\left(x,y\right)$, $i=\overline{1,n}$ за границы полос. Приведем один из возможных алгоритмов такого продолжения. Пусть полосе S_i соответствует местная система координат $\omega_i:=a_ix+b_iy-c_i$, $\tau_i:=-b_ix+a_iy$. Тогда функция (здесь $\omega_i=\omega_i\left(x,y\right)$)

$$\tilde{f}_i\left(x,y\right)=\begin{cases}f_i\left(x,y\right), & \left(x,y\right)\in S_i,\\ f_i\left(x-\left(\omega_i-\alpha_i\right)a_i,y-\left(\omega_i-\alpha_i\right)b_i\right), & \omega_i<\alpha_i,\\ f_i\left(x-\left(\omega_i-\beta_i\right)a_i,y-\left(\omega_i-\beta_i\right)b_i\right), & \omega_i>\beta_i\end{cases}$$

будет непрерывной на R^2 и $\tilde{f}_i\left(x,y\right)=f_i\left(x,y\right)$, $\left(x,y\right)\in S_i$.

Заключение. Предложенная метамодель G позволяет рассмотреть с единой точки зрения разные подходы к моделированию поверхности тела. Порождение моделей поверхности тела из метамодели G целесообразно благодаря соответствию структуры модельных объектов G структуре экспериментальных данных, получаемых в процессе радиолокации.

Предложенная метамодель G использует для моделирования поверхности тела операторы, восстанавливающие функцию $f(x,y)$, заданную следами функций и их производных на системе точек, линий или поверхностей.

Использование операторов интерлинации, интерфлетации и смешанной аппроксимации приводит к более точным результатам, чем применение классических операторов полиномиальной, тригонометрической, сплайн-интерполяции и аппроксимации. Таким образом, для достижения одинаковой точности приближения можно использовать меньшее, чем в классических методах, количество экспериментальных данных.

Предложенный новый математический метод восстановления поверхности тела на основе радиолокационных данных, заданных на системах пересекающихся полос, эффективно использует операторы сплайн-интерлинации и сплайн-интерфлетации функций двух переменных.

●