УДК 007.51

С.В. Резник

Математическое представление интерпретации категорных конструкций в задачах обучения

Описано математическое представление категорных конструкций в задачах обучения.

Mathematical representation of interpretation category constructions in problems of education is described.

Описано математичне представлення категорних конструкцій в задачах навчання.

Введение. Развитие информационного общества ставит новые задачи в области поддержки образования на базе активного использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ). Быстрые темпы развития ИКТ отрасли и информационной инфраструктуры ИО делают актуальной проблему создания востребованной наукой и практикой национальной системы ИКТ образования, построенной на основе целостного удовлетворяющего международным требованиям комплекса образовательных стандартов и высокоэффективных системообразующих механизмов и технологий, инновационных учебно-педагогических решений. Особое значение приобретают фундаментальные исследования в области применения ИКТ в образовании. Для решения многих задач в области создания систем нового поколения для поддержки и развития учебных систем новые возможности исследователям и разработчикам предоставляют фундаментальные теории.

В настоящее время многие электронные учебные курсы проектируются и создаются как объемные монолитные жесткие структуры, которые при изменении внешних условий, с трудом поддаются корректировке. Перспективен подход, связанный с выделением учебных объектов (*learning objects*, *LO*). Практически все системы управления обучением типа *LMS* (*Learning management system*) построены для использования *LO* на практике, но разработчики их применяют мало, ввиду отсутствия культуры разработки информационных систем для поддержки обучения, базирующейся на их использовании, а также методологических основ, практических рекомендаций и устоявшихся технологий проектирования курсов на их основе. Несмотря на перечисленные трудности, технологии *LO* имеют большой потенциал.

Автоматизация решения прикладных задач в различных областях (особенно проектирование информационных систем для гуманитарных областей знания) предполагает взаимосвязанное решение комплекса задач от описания предметной области (ПО) через определение высокоуровневых средств манипулирования данными и метаданными до разработки поддерживающих алгоритмов и программ.

Значительное увеличение областей применения информационных систем вызывает рост числа специалистов по концептуальному моделированию предметных областей, разработки прикладных систем и их сопровождения. Точность отображения модели в среде во многом связана с приписываемой самим исследователем семантикой выбранных объектов и их агрегаций.

Любую предметную область можно представить как *трехуровневую* среду, содержащую множество:

- элементов предметной области, разбитое на типы (классы);
- функций и методов, работающих на этих элементах;
- свойств элементов, а также отношений между элементами предметной области.

На каждом этапе разработки информационных систем используется специфическая совокупность языковых средств и способов вычислений. Один из наиболее многообещающих формализмов, задействованных в последние десятилетия для целей проектирования, – теория категорий.

Постановка задачи

Теория категорий была предложена в 40-х годах прошлого века американскими математиками Маклейном и Эйленбергом в качестве полезного «языка» для алгебраической топологии [1]. Ряд особенностей теории категорий позволяют говорить о том, что она может обеспечивать адекватный базис для развития теорий информационных систем различных типов. Модель предметной области, как правило, включает в себя две части: описательную и функциональную. Описательная (декларативная) часть теории представляет собой совокупность базовых понятий, специфицирующих в рамках этой теории, объекты предметной области и отношения между ними. Функциональная (процедурная) часть теории содержит принятые в ней правила и способы манипулирования моделями с целью решения задач. Модель объекта в контексте модели предметной области – это некоторая структура из экземпляров базовых понятий и отношений, образуемая по спецификации объекта в соответствии с правилами формирования моделей объектов, отраженными в функциональной части теории. Следовательно, необходимо показать, что математический аппарат теории категорий обеспечивает строгую основу для описания разноуровневых языков и придания им семантики с заданными свойствами, и, таким образом, дает возможность определять семейства специализированных языков и средств их интерпретации в заданных предметных областях.

Подход к решению задачи

Стандартное определение категории ф [*Lowvere* & *Schanuel* 1997] включает в себя:

Объекты $A,B,C,\dots$

Отображения (морфизмы, стрелки и т.д.): f, g, h, …

Чтобы указать, что f есть отображение, мы пишем $A \xrightarrow{f} B$ (или f: $A \to B$) и говорим, что «f есть отображение из A в B».Объект A называют источником, а объект B – назначением морфизма f.

Для каждого объекта A имеет место тождественное отображение, обозначенное тождеством 1_A, так что $A \xrightarrow{1_A} A$ есть одно из отображений из A в A.

Кроме того, для каждого объекта A данной категории существует тождественный морфизм 1_A вида $A \to A$, удовлетворяющий следующим условиям:

• для любого входящего морфизма f вида $\to A$ имеет место равенство $f \circ 1_A = f$;

• для любого исходящего морфизма g вида $A \to$ имеет место равенство $1_A \circ g = g$.

Композиция морфизмов является ассоциативной: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Для каждой пары отображений

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

композиция отображения для каждой пары морфизмов f: $A \to B$, g: $B \to C$ таких, что назначение f совпадает с назначением g, определена операция композиции $\circ$, результатом которой является новый морфизм h: $A \to C$; композиция морфизмов записывается с помощью равенства $f \circ g = h$.

$A \xrightarrow{g следуетзаf} C$ удовлетворяет следующим правилам:

• идентичность: если $A \xrightarrow{f} B$, то $1_B \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$;

• ассоциативность: если $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, то $(h \circ g) \circ$ f$) = h \circ (g \circ f)$.

Закон ассоциативности позволяет нам не обращать внимания на расстановку скобок.

Важным понятием в теории категорий есть произведение объектов.

Произведением двух объектов a и b в категории ф есть объект c из ф вместе с двумя морфизмами (отображениями), которые называются проекциями $\boldsymbol{p}$: $c \to a$ и $\boldsymbol{q}$**:** $c \to b$ такими, что для всех объектов d с морфизмами $\boldsymbol{f}$: $d \to a$ и $\boldsymbol{g}$: $d \to b$ есть единственный морфизм $\boldsymbol{h}$: $d \to c$, такой, что $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}$. Как и другие свойства категорий, произведение объектов является универсальным свойством.

При категорном подходе объекты и морфизмы можно рассматривать в качестве элементарных «кирпичиков» математических конструкций, не приписывая им заранее никаких специальных свойств.

Основная идея интерпретации категорных конструкций состоит в математическом представлении объектов категорными объектами и процессов категорными морфизмами.

В качестве объектов могут выступать сами дедуктивные системы, а морфизмами между такими объектами считаются переводы одной дедуктивной системы в другую. Можно выйти на уровень еще большего обобщения. Представление дедуктивных систем в виде категории наводит на мысль использовать понятие функтора, являющегося одним из основных понятий в исходной работе родоначальников теории категорий [*Eilenberg* & *Mac Lane* 1945] в качестве погружающей операции. Функтор – это отображение объектов из одной категории в другую, сохраняющее категорную структуру. На категорном языке это выглядит следующим образом.

Функтором $\boldsymbol{F}$ из категории ϕ в категорию γ называется функция, ставящая в соответствие каждому объекту A из ϕ объект $\boldsymbol{F}(A)$ из γ, и еще одна функция, ставящая в соответствие каждой стрелке $f : A \to B$ из ϕ стрелку $\boldsymbol{F}(f)$: $\boldsymbol{F}(A) \to \boldsymbol{F}(B)$ такую, что

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)},\ \boldsymbol{F}(gf) = \boldsymbol{F}(g)\ \boldsymbol{F}(f).$$

В общем случае такие функторы можно рассматривать как переводы одной дедуктивной системы в другую.

Новый этап в развитии теории категорий связан с работами Ловера, который с 1960-х годов работал над программой построения категорных оснований математики. Проект категорных оснований содержит несколько принципиальных идей. Говоря о категориях, в которых объекты – это множества с дополнительной структурой, мы всякий раз негласно предполагали, что объекты и морфизмы этих категорий определены заранее независимо от данной категории. Однако на эту конструкцию можно посмотреть и с обратной стороны. Рассмотрим для определенности случай категории множеств. Вместо того, чтобы предполагать множества и функции заданными заранее с помощью какой-либо общепринятой аксиоматической теории множеств (вроде популярной системы Цермело–Френкеля (*ZF*)), мы начнем с того, что рассмотрим категорию множеств как абстрактную категорию самого общего вида, а затем постулируем, что данная категория обладает неким конечным набором свойств, который отличает категорию множеств от любой другой категории. В результате мы получаем альтернативную теорию множеств, в которой в качестве примитивного используется не отношение принадлежности элемента множества данному множеству, как в *ZF* и подобных теориях, а понятие функции.

Впервые такая категорная теория множеств была предложена Ловером в работе [2], которая также содержит набросок доказательства того факта, что предложенная автором теория эквивалентна *ZF*. Похожим образом могут быть сконструированы другие категории, например, категория линейных пространств. Такие категории конструируются «чисто категорно», т.е. без использования множеств, тогда как обычная конструкция линейного пространства существенным образом использует понятие множества. С учетом этого только что описанный категорный подход – альтернатива использованию теории множеств в качестве оснований математики.

Очень многие и хорошо известные нам конструкции обладают свойством быть категорией, например, *Set* – объектами являются множества, морфизмами – все функции между множествами [3].

Основные принципы организации жизнеспособной информационной среды – это единство и самоорганизация. Принцип единства реализуется через соотношение части и целого, их взаимодействие и взаимообусловленность. Теоретико-категорное выражение этого принципа – функтор представления, позволяющий адекватно отобразить категорию в целом в пространстве морфизмов (связей) одного объекта этой категории. Язык инициальных и терминальных конусов (или проективных и индуктивных пределов над диаграммами) позволяет переходить от элементов к типам (классам) и обратно. Так строится иерархия целостности и формализованное описание процесса «разворачивания» системы от точки к множеству или процесса «сворачивания» к системе генераторов (аксиом). Понятия инициальной и терминальной алгебр хорошо формализуют проблему тождества и различия элементов восприятия (мышления) и процесс формирования понятий. Принцип самоорганизации информационной среды может быть реализован через принцип максимальной информационной энтропии Хакена при условиях достаточной активности клеточек информационной среды и интенсивности информационных потоков, проходящих через открытую информационную систему. Роль клеточки может играть «скетч» (категорный «эскиз»), представляющий из себя граф вместе с системой функциональных тождеств и описывающий алгебраические особенности системы морфизмов того или иного объекта категории.

Аппарат теории категорий включает в себя такие известные средства структурного отображения знаний, как графы (семантические сети), конечные автоматы, фреймы, решетки логического вывода. Концепции фрейма и объекта (в объектном программировании) достаточно естественно отображаются в среде объектов и морфизмов теории категорий. «Безэлементный» способ рассуждений в категорной алгебре, когда объекты изучаются путем исследования их морфизмов, – это реализация тезисов Галуа и одновременно – способ математического отображения информационных конструктов. Теория категорий позволяет в едином формате представить известные математические конструкции, что позволяет организовать внутренний «каталог структур» интеллектуальной системы.

Категорный подход в рамках развития электронной системы образования позволяет провести структуризацию и автоматизацию процессов разработки и создания учебных объектов, которые могут использоваться преподавателями в лекционных материалах, студентами – для самостоятельного изучения, проектировщиками – для конструирования интерактивных курсов или администраторами для координации учебного плана.

Заключение. С построением теории категорий появилась возможность создания логического универсума. Теория категорий предоставляет естественный формализм описания «иерархии логик» или «иерархии объяснительных схем». При этом функторы модельной категории соответствуют «правилам перехода» или «схемам аргументации». Эти функторы в свою очередь образуют категорию, в которой действуют свои функторы, т.е. своя логика переходов и т.д. Рассмотрение «внешних» конструкций множества и функции позволяет делать математически значимые выводы об их «внутренней» структуре. Это свойство теории категорий особенно ценно при построении формализаций в области концептуального моделирования, так как позволяет описывать свойства ПО или накладывать на нее ограничения на основе более общего подхода, не требующего фиксации несущественных деталей модели ПО ранее, чем это необходимо. В частности, элементы категорной модели могут рассматриваться не просто как индивиды (в исконном смысле этого слова, т.е. далее неделимые сущности), но и как функции, в том числе не всюду определенные. Таким образом, теория категорий неявно предполагает многоуровневое рассмотрение предметной области. Концепция учебных объектов с возможностью многократного использования и содержащихся в специально организованных хранилищах актуальна в настоящее время в различных областях человеческого знания.

1. *Букур И*., *Деляну А*. Введение в теорию категорий и функторов – М.: Мир, 1972. – 259 с.
2. *Lawvere F.W*. Elementary theory of the category of sets // Proc. of the National Academy of Science 52, N 6 (Dec. 1964). – P. 1506–1511.
3. *Asperti A*., *Longo G*. Categories types and structures. An Introduction to Category Theory for the working computer scientist – FOUNDATIONS OF COMPUTING SERIES: M.I.T. PRESS, 1991. – 205 c.
4. *Lawvere F.W.* The category of categories as a foundation for Mathematics / Ed. by S. Eilenberg, D.K. Harrison et al. // Proc. of the Conf. on Categorial Algebra in La Jolla. – Springer Verlag, 1996. – P. 1–21.

Поступила 24.06.2011

Тел. для справок: (095) 559-5789 (Киев)