УДК 519.6

О.М. Литвин, Ю.І. Першина

Побудова розривних лінійних інтерполяційних сплайнів для наближення функцій, що мають розриви на лініях триангуляції

Предложен метод построения разрывного интерполяционного линейного сплайна для приближения функции с возможными разрывами первого рода, область определения которых разбита на прямоугольные треугольники. Построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени на триангулированной сетке узлов.

The method of construction of the explosive interpolational linear spline for the approach of a function with possible ruptures of the first sort which range of definition is broken into rectangular triangles is suggested. The constructed explosive splines include, as a special case, the classical continuous splines of the first degree on triangulation to a grid of knots.

Запропоновано метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функції з можливими розривами першого роду, область визначення яких розбито на прямокутні трикутники. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на триангульованій сітці вузлів.

Вступ. Задача наближення розривних функцій є однією з найскладніших в обчислювальній математиці. Спеціалістам в цій галузі відомі оператори наближення неперервних та диференційовних функцій за допомогою поліномів та сплайнів [1, 3]. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [4, 5], в яких неперервні та диференційовані функції наближуються сплайнами степеня нуль. Щодо наближення розривних функцій, то авторам невідомі загальні методи сплайн-апроксимації розривних функцій за допомогою розривних сплайнів. Але розв'язання такої задачі є актуальною, оскільки серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більшу їх кількість описано розривними функціями.

В роботах [6, 7] авторами розроблено метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, що використовує метод мінімакса. Роботу [8] присвячено розробці загального методу наближення розривної функції двох змінних за допомогою розривних інтерлінаційних сплайнів двох змінних, коли розриви першого роду наближуваної функції та розриви першого роду наближувальних сплайнів розміщено на лініях, паралельних осям координат.

В даній статті запропоновано метод побудови розривних сплайн-інтерполянтів для наближення розривних функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники.

Постановка задачі

Нехай задано розривну функцію двох змінних $f(x, y)$ в області D. Вважатимемо, що область D розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники, які не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції таких, що в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерполяції функції $f(x, y)$.

Метод побудови наближувального розривного сплайн-інтерполянта

Якщо (x_i, y_j) – вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутного трикутника, то може зустрітися чотири типи трикутників (рис. 1):

$$\mathrm{T}_{ij}^{(1)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} \right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(2)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}} \right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(3)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}} < y < y_j \right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(4)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i} < y < y_j \right\}.$$

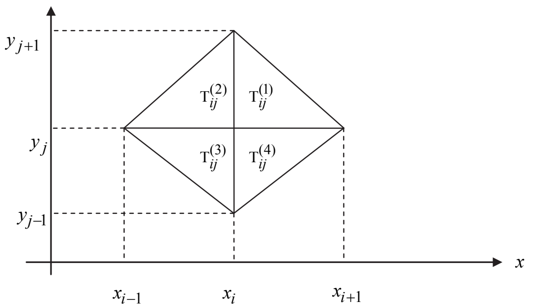

Рис. 1. Зображення можливих трикутних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

Вважатимемо, що на кожній із сторін заданих трикутників функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому в вершинах трикутника функція набуває значень

$$C_1^{(1)} = C_{i,j}^{++} = f(x_i+0, y_j+0),$$
$$C_1^{(2)} = C_{i,j}^{(2)-+} = f(x_i-0, y_j+0),$$
$$C_2^{(1)} = C_{i,j+1}^{(1)+-} = f(x_i+0, y_{j+1}-0),$$
$$C_2^{(2)} = C_{i,j+1}^{(2)--} = f(x_i-0, y_{j+1}-0),$$
$$C_3^{(1)} = C_{i+1,j}^{(1)-+} = f(x_{i+1}-0, y_j+0),$$
$$C_3^{(2)} = C_{i-1,j}^{(2)-+} = f(x_{i-1}-0, y_j+0),$$
$$C_1^{(3)} = C_{i,j}^{(3)--} = f(x_i-0, y_j-0),$$
$$C_1^{(4)} = C_{i,j}^{(4)+-} = f(x_i+0, y_j-0),$$
$$C_2^{(3)} = C_{i-1,j}^{(3)--} = f(x_{i-1}-0, y_j-0),$$
$$C_2^{(4)} = C_{i+1,j}^{(4)--} = f(x_{i+1}-0, y_j-0),$$
$$C_3^{(3)} = C_{i,j-1}^{(3)--} = f(x_i-0, y_{j-1}-0),$$
$$C_3^{(4)} = C_{i,j-1}^{(4)+-} = f(x_i+0, y_{j-1}-0).$$

Визначення. Розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D$ $(k = \{1, 2, 3, 4\})$ називатимемо наступну функцію:

$$S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}\left(A_1^{(k)}\right)} + C_2^{(k)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}\left(A_2^{(k)}\right)} + C_3^{(k)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}\left(A_3^{(k)}\right)}, (x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)}, \quad (1)$$

$$\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y) = x - x_i, \ \ \omega 2_{ij}^{(k)}(x,y) = y - y_j,$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y) = \begin{cases} -y + y_j + \dfrac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i - x_{i+1}}, & k=1 \\ -y + y_j + \dfrac{(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i - x_{i-1}}, & k=2 \\ -y + y_{j-1} + \dfrac{(x-x_i)(y_j-y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}}, & k=3 \\ -y + y_j + \dfrac{(x-x_{i+1})(y_j-y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i}, & k=4 \end{cases},$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \ \ A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_i+0, y_{j+1}-0), & k=1 \\ (x_i-0, y_{j+1}-0), & k=2 \\ (x_i-0, y_{j-1}-0), & k=3 \\ (x_i+0, y_{j-1}-0), & k=4 \end{cases},$$

$$A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1}-0, y_j+0), & k=1 \\ (x_{i-1}+0, y_j+0), & k=2 \\ (x_{i-1}+0, y_j-0), & k=3 \\ (x_{i+1}-0, y_j-0), & k=4 \end{cases}.$$

Теорема 1. Функція $S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y), (x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D\,(k = 1, 2, 3, 4)$ задовольняє наступні властивості:

$$s_{ij}^{(1)}(x_i+0, y_j+0) = C_1^{(1)},$$
$$s_{ij}^{(1)}(x_i+0, y_{j+1}-0) = C_2^{(1)},$$
$$s_{ij}^{(1)}(x_{i+1}-0, y_j+0) = C_3^{(1)},$$
$$s_{ij}^{(2)}(x_i-0, y_j+0) = C_1^{(2)},$$
$$s_{ij}^{(2)}(x_i-0, y_{j+1}-0) = C_2^{(2)},$$
$$s_{ij}^{(2)}(x_{i-1}-0, y_j+0) = C_3^{(2)},$$
$$s_{ij}^{(3)}(x_i-0, y_j-0) = C_1^{(3)},$$
$$s_{ij}^{(3)}(x_i-0, y_{j-1}-0) = C_2^{(3)},$$
$$s_{ij}^{(3)}(x_{i-1}-0, y_j-0) = C_3^{(3)},$$
$$s_{ij}^{(4)}(x_i+0, y_j-0) = C_1^{(4)},$$
$$s_{ij}^{(4)}(x_i+0, y_{j-1}-0) = C_2^{(4)},$$
$$s_{ij}^{(4)}(x_{i+1}-0, y_j-0) = C_3^{(4)}.$$

Доведення виконується безпосередньою підстановкою відповідних значень аргументів у визначений розривний сплайн (1).

Теорема 2. Нехай функція $f(x, y)$ наближується оператором $S(x,y)=s_{ij}^{(k)}(x,y)$, $(x,y)\in \mathrm{T}_{ij}^{(k)}\subset$ $\subset D(k=1,2,3,4)$ та $\left|f_x'(x,y)\right|\le M$, $\left|f_y'(x,y)\right|\le N$. Тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність:

$$\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\le \frac{M\cdot\Delta_x+N\cdot\Delta_y}{2},$$

$$\Delta_x=x_{i+1}-x_i,\ \Delta_y=y_{j+1}-y_j.$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Якщо $C_\mu^{(k)}=f\left(A_\mu^{(k)}\right)$, $k=\overline{1,4}$, $\mu=\overline{1,3}$, то в кожному трикутнику $\mathrm{T}_{ij}^{(k)}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ оператор (1) точно відновлює всі лінійні функції.

Доведення витікає з того, що на трьох точках можна розмістити тільки одну площину.

Зауваження. Якщо значення функції у вузлах трикутної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_p^{(k)}$, $p=1,2,3$, $k=1, 2, 3$, 4 в даній статті запропоновано використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі відшукуються з умови

$$J^{(k)}(C)=\sum_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)}\subset D}\iint_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)}}\left[f(x,y)-s_{ij}^{(k)}(x,y,C)\right]^2dxdy\to\min_C.$$

Тоді отримуємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн.

Приклад 1. Нехай задані вузли трикутної сітки $x_1=0$, $x_2=0{,}5$, $x_3=1$, $y_1=0$, $y_2=0{,}5$, $y_3=1$ та функцію $f(x, y)$ визначено в області $\mathrm{T}=\mathrm{T}_1\cup\mathrm{T}_2\cup\mathrm{T}_3\cup\mathrm{T}_4$, показаній на рис. 2.

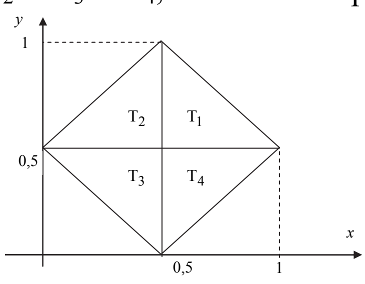

Рис. 2. Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$

$\mathrm{T}_1=\{x-0{,}5>0,\ y-0{,}5>0,\ 1{,}5-x-y>0\}$,

$\mathrm{T}_2=\{-(x-0{,}5)>0,\ y-0{,}5>0,\ 0{,}5+x-y>0\}$,

$\mathrm{T}_3=\{-(x-0{,}5)>0,\ -(y-0{,}5)>0,\ -0{,}5+x+y>0\}$,

$\mathrm{T}_4=\{x-0{,}5>0,\ -(y-0{,}5)>0,\ 0{,}5-x+y>0\}$,

Задамо функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої трикутної сітки (рис. 3).

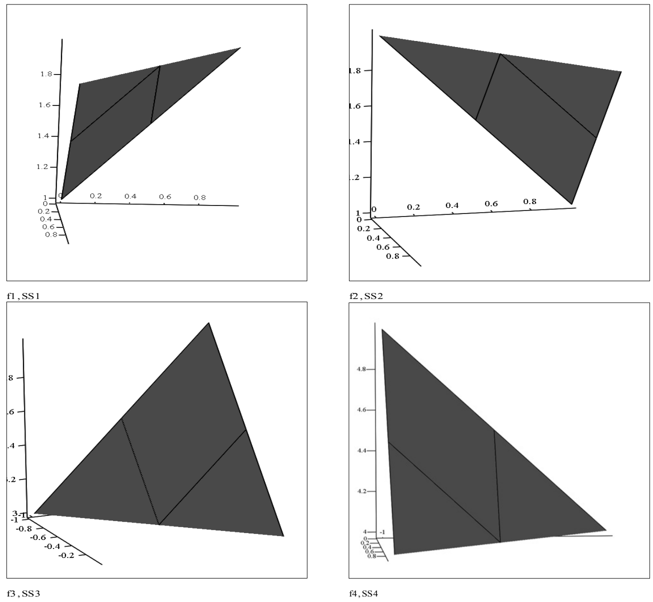

Рис. 3. Графічний вигляд наближуваної функції $f(x, y)$ в кожному з визначених трикутників

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x,y)\in\mathrm{T}_1\\ x-y, & (x,y)\in\mathrm{T}_2\\ y-x, & (x,y)\in\mathrm{T}_3\\ -x-y, & (x,y)\in\mathrm{T}_4\end{cases}.$$

Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду у вузлах заданої трикутної сітки та в них має такі значення:

$f^{++}(0{,}5;0{,}5)=1$, $f^{-+}(0{,}5;0{,}5)=0$,

$f^{--}(0{,}5;0{,}5)=0$, $f^{+-}(0{,}5;0{,}5)=-1$,

$f^{-+}(1;0{,}5)=1{,}5$, $f^{--}(1;0{,}5)=-1{,}5$,

$f^{+-}(0{,}5;1)=1{,}5$, $f^{--}(0{,}5;1)=-0{,}5$

$f^{++}(0;0{,}5)=-0{,}5$, $f^{+-}(0;0{,}5)=0{,}5$,

$f^{-+}(0{,}5;0)=-0{,}5$, $f^{++}(0{,}5;0)=-0{,}5$.

Розривний сплайн-інтерполянт побудуємо у вигляді

$$S(x,y)=\begin{cases}S_1f(x,y,C), & (x,y)\in\mathrm{T}_1\\ S_2f(x,y,C), & (x,y)\in\mathrm{T}_2\\ S_3f(x,y,C), & (x,y)\in\mathrm{T}_3\\ S_4f(x,y,C), & (x,y)\in\mathrm{T}_4\end{cases}, \qquad (2)$$

де

$$S_1(x,y,C)=2C_1^{(1)}(1,5-x-y)+$$
$$+2C_2^{(1)}(y-0,5)+2C_3^{(1)}(x-0,5),$$
$$S_2f(x,y)=2C_1^{(2)}(0,5+x-y)+$$
$$+2C_2^{(2)}(y-0,5)+2C_3^{(2)}(x-0,5),$$
$$S_3f(x,y)=2C_1^{(3)}(x+y-0,5)+$$
$$+2C_2^{(3)}(y-0,5)+2C^{(3)}(x-0,5),$$
$$S_4f(x,y,C)=2C_1^{(4)}(0,5-x+y)+$$
$$+2C_2^{(4)}(y-0,5)+2C_3^{(4)}(x-0,5),$$

де C – матриця невідомих коефіцієнтів

$$C=\begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} \\ C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ C_1^{(4)} & C_2^{(4)} & C_3^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Далі за методом найменших квадратів розглянемо вираз

$$F(C)=\iint_D (f(x,y)-S(x,y,C))^2\,dxdy=$$
$$=\iint_{T_1} (f(x,y)-S1(x,y,C))^2\,dxdy+$$
$$+\iint_{T_2} (f(x,y)-S2(x,y,C))^2\,dxdy+\iint_{T_3} (f(x,y)-$$
$$-S3(x,y,C))^2\,dxdy+\iint_{T_4} (f(x,y)-S4(x,y,C))^2\,dxdy.$$

Треба знайти такі елементи матриці C, щоб вираз $F(C)$ набував мінімального значення, тобто треба розв'язати мінімізаційну задачу

$$F(C)=\iint_D (f(x,y)-S(x,y,C))^2\,dxdy\to \min.$$

Цю задачу розв'язано в системі комп'ютерної математики *MathCad* та отримано наступну матрицю коефіцієнтів

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 1,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки значень невідомих коефіцієнтів у вираз (2), отримаємо наближувану функцію $f(x, y)$. Тобто побудований розривний інтерполяційний сплайн збігається з апроксимаційним та точно відновлює задану розривну функцію, що і підтверджує викладену теорію.

Приклад 2. Нехай на області, визначеній у прикладі 1 задано функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої сітки:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & (x,y)\in T_1 \\ x^2-y^2, & (x,y)\in T_2 \\ -x^2+y^2, & (x,y)\in T_3 \\ -x^2-y^2, & (x,y)\in T_4 \end{cases}.$$

В кожному розглянутому трикутному елементі побудуємо інтерлінаційний сплайн $S(x,y,C)$ у вигляді, поданому в прикладі 1; як коефіцієнти матриці C візьмемо значення функції (лівосторонні та правосторонні) у вузлах сітки. Отримаємо наступний інтерполяційний сплайн:

$$S(x,y)=\begin{cases} 1,5x+1,5y-1,0 & (x,y)\in T_1 \\ 0,5x-1,5y+0,5, & (x,y)\in T_2 \\ 0,5x-0,5y, & (x,y)\in T_3 \\ -1,5x-0,5y+0,5, & (x,y)\in T_4 \end{cases}.$$

Максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерполяційного сплайну $S(x,y)$ має вигляд

$$\max\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\approx 0,12.$$

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (1). Коефіцієнти матриці C знаходимо, застосовуючи метод найменших квадратів, тобто розв'язуємо мінімізаційну задачу

$$F(C)=\iint_D (f(x,y)-S(x,y,C))^2\,dxdy\to \min.$$

Отримано наступні результати (рис. 4).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого апроксимаційного сплайну $S(x, y)$:

$$\max\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\approx 0,088.$$

Приклад 3. Нехай функцію $f(x, y)$ визначено в області $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6$, показаній на рис. 5.

$T_1 = \{x, y > 0,\ 1-x-y > 0\}$,
$T_2 = \{x < 0,\ y < 1,\ x+y > 0\}$,
$T_3 = \{x < 0,\ y > 0,\ -x-y > 0\}$,
$T_4 = \{x < 0,\ y < 0,\ 1+x+y > 0\}$,
$T_5 = \{x > 0,\ y > -1,\ -x-y > 0\}$,
$T_6 = \{x > 0,\ y < 0,\ x+y > 0\}$,

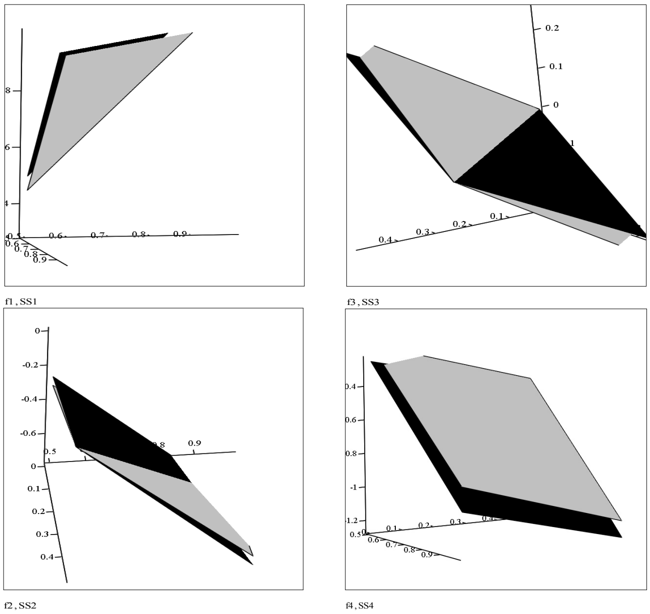

Рис. 4. Графічний вигляд наближуваої функції $f(x, y)$ (світлий колір) та наближувального сплайну $S(x, y)$ (темний колір) в кожному з визначених трикутників у прикладі 2

Задамо функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої сітки

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2+1, (x,y)\in \mathrm{T}_1 \\ x^2-y^2+2,\ (x,y)\in \mathrm{T}_2 \\ y^2-x^2+3, (x,y)\in \mathrm{T}_3 \\ -x^2-y^2+4,\ (x,y)\in \mathrm{T}_4 \\ x^2+y^2+5,\ (x,y)\in \mathrm{T}_5 \\ x^2-y^2+6,\ (x,y)\in \mathrm{T}_6 \end{cases}$$

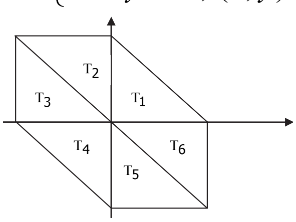

Рис. 5. Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$

В кожному трикутнику побудуємо сплайн вигляду (1) та представимо функцію і сплайн на рис. 6.

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого сплайну $S(x, y)$:

$$\max\left|f(x,y)-S(x,y)\right|\approx 0,29 .$$

Висновки. Отже, реалізовано запропонований метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функції з можливими розривами першого роду, область визначення яких розбито на прямокутні трикутники. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як окремий випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на триангульованій сітці вузлів.

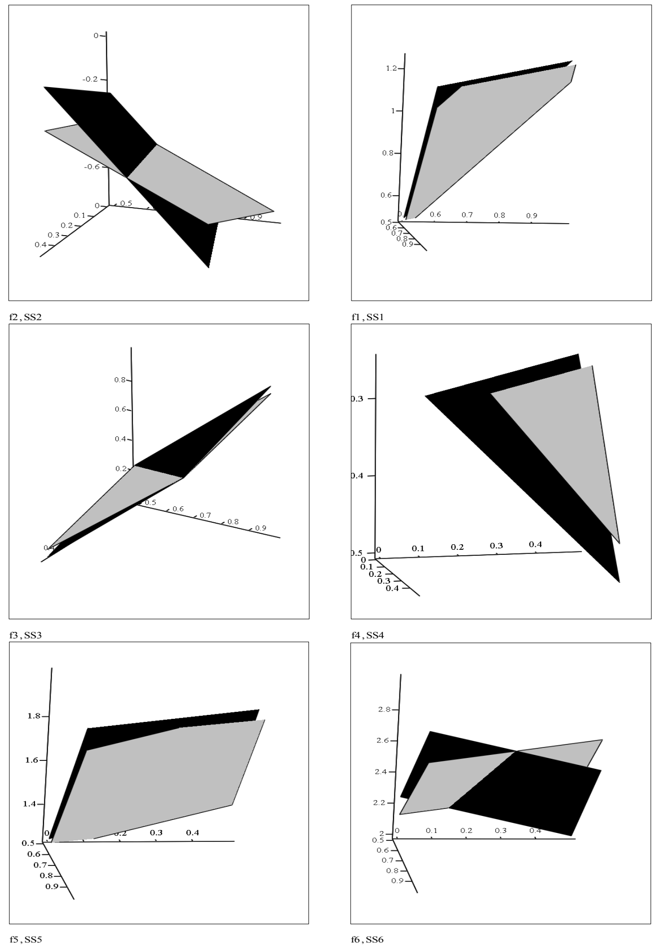

Рис. 6. Графічний вигляд наближуваної функції $f(x, y)$ (світлий колір) та наближувального сплайну $S(x, y)$ (темний колір) в кожному з визначених трикутників у прикладі 3

Методи наближення розривних функцій, область визначення яких розбивається на трикутні елементи з криволінійною границею, є предметом подальших розробок.

1. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Стечкин С.Б.*, *Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – Там же, 1976. - 215 с.
3. *Завьялов Ю.С.*, *Квасов Б.И.*, *Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – Там же. – 375 с.
4. *De Vore R.A.* A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – **41**. – P. 29–45.

5. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
6. *Литвин О.М.*, *Першина Ю.І.* Наближення розривної функції однієї змінної, використовуючи метод мінімакса // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: Пр. наук.-техн. конф. (7–8 жовт. 2010 р.). – Львів, 2010. – С. 52–55.
7. *Литвин О.М.*, *Першина Ю.І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2010. – **3**. – С. 122–131.
8. *Литвин О.М.*, *Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами (прямокутні елементи) // «Теорія прийняття рішень»: Пр. V міжнар. шк.-сем., 27 вер. – 1 жовт. 2010 р., Ужгород. – 2010 – С. 141–142.

Поступила 26.02.2012

Тел. для справок: +380 57 771-0545, +380 50 222-6979 (Харьков)

E-mail: *academ@kharkov.ua*, *yulia_pershina@mail.ru*

О.Н. Литвин, Ю.И. Першина

Построение разрывных линейных интерполяционных сплайнов для приближения функций, имеющих разрывы на линиях триангуляции

Введение. Задача приближения разрывных функций – одна из самых сложных задач вычислительной математики. Специалистам в этой области известны операторы приближения непрерывных и дифференцируемых функций с помощью полиномов и сплайнов [1, 3]. Известны также работы по приближению непрерывных функций одной переменной кусочно-постоянными функциями [4, 5], в которых непрерывные и дифференцируемые функции приближаются сплайнами степени ноль. Что касается приближения разрывных функций, то авторам неизвестны общие методы сплайн-аппроксимации разрывных функций с помощью разрывных сплайнов. Но решение такой задачи актуально, поскольку среди многомерных объектов, которые нужно исследовать, значительно большее их количество описано разрывными функциями.

В работах [6, 7] авторами разработан метод приближения разрывных функций одной переменной разрывными сплайнами, использующий метод минимакса. Работа [8] посвящена разработке общего метода приближения разрывной функции двух переменных с помощью разрывных интерлинационных сплайнов двух переменных, когда разрывы первого рода приближаемой функции и разрывы первого рода приближающих сплайнов расположены на линиях, параллельных осям координат.

В данной статье предложен метод построения разрывных сплайн-интерполянтов для приближения разрывных функций двух переменных, область определения которых разбивается на прямоугольные треугольники.

Постановка задачи

Пусть задана разрывная функция двух переменных $f(x, y)$ в области D. Будем считать, что область D разбивается прямыми $x_0=0<x_1<x_2<\ldots<x_m=1$, $y_0=0<y_1<y_2<\ldots<y_n=1$ на прямоугольные элементы, а каждый прямоугольник разбивается диагональю на два прямоугольных треугольника, которые не вкладываются один в другой, а стороны треугольников не пересекаются. Функция $f(x, y)$ имеет разрывы первого рода на границах между прямоугольными треугольниками (не обязательно всеми). Цель работы – построение и исследование операторов разрывной кусочно-полиномиальной интерполяции таких, которые в каждом треугольнике есть операторами полиномиальной инетрполяции функции $f(x, y)$.

Метод построения разрывного приближающего сплайн-инерполянта

Если (x_i, y_j) – узел, в котором находится прямой угол прямоугольного треугольника, то могут встретиться четыре типа треугольников (рис. 1):

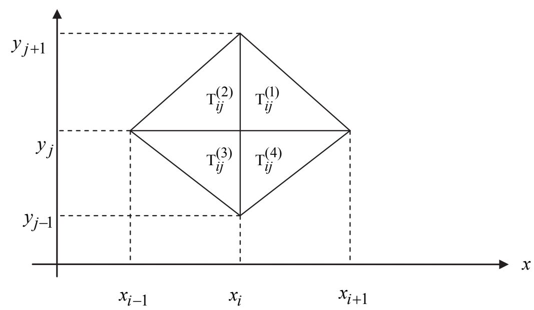

Рис. 1. Изображение возможных треугольных элементов с прямым углом в узле (x_i, y_j)

$$T_{ij}^{(1)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} \right\};$$

$$T_{ij}^{(2)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}} \right\};$$

$$T_{ij}^{(3)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}} < y < y_j \right\};$$

$$T_{ij}^{(4)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i} < y < y_j \right\}.$$

Примем, что на каждой из сторон заданных треугольников функция $f(x, y)$ может иметь (а может и не иметь) разрывы первого рода, причем в вершинах треугольника функция имеет значения

$$C_1^{(1)} = C_{i,j}^{++} = f(x_i + 0, y_j + 0),$$
$$C_2^{(1)} = C_{i,j+1}^{(1)+-} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_3^{(1)} = C_{i+1,j}^{(1)-+} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$
$$C_1^{(2)} = C_{i,j}^{(2)-+} = f(x_i - 0, y_j + 0),$$
$$C_2^{(2)} = C_{i,j+1}^{(2)--} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0),$$
$$C_3^{(2)} = C_{i-1,j}^{(2)-+} = f(x_{i-1} - 0, y_j + 0),$$
$$C_1^{(3)} = C_{i,j}^{(3)--} = f(x_i - 0, y_j - 0),$$
$$C_2^{(3)} = C_{i-1,j}^{(3)--} = f(x_{i-1} - 0, y_j - 0),$$
$$C_3^{(3)} = C_{i,j-1}^{(3)--} = f(x_i - 0, y_{j-1} - 0),$$
$$C_1^{(4)} = C_{i,j}^{(4)+-} = f(x_i + 0, y_j - 0),$$
$$C_2^{(4)} = C_{i+1,j}^{(4)--} = f(x_{i+1} - 0, y_j - 0),$$
$$C_3^{(4)} = C_{i,j-1}^{(4)+-} = f(x_i + 0, y_{j-1} - 0).$$

Определение. Будем называть разрывным интерполяционным линейным полиномиальным сплайном в области $\mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D$ $(k = \{1,2,3,4\})$ следующую функцию:

$$S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}\left(A_1^{(k)}\right)} + \tag{1}$$
$$+ C_2^{(k)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}\left(A_2^{(k)}\right)} + C_3^{(k)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}\left(A_3^{(k)}\right)}, (x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)},$$

$$\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y) = x - x_i, \qquad \omega 2_{ij}^{(k)}(x,y) = y - y_j,$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y) = \begin{cases} -y + y_j + \dfrac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}, & k = 1 \\ -y + y_j + \dfrac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}}, & k = 2 \\ -y + y_{j-1} + \dfrac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}}, & k = 3 \\ -y + y_j + \dfrac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i}, & k = 4 \end{cases},$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \quad A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k = 1 \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k = 2 \\ (x_i - 0, y_{j-1} - 0), & k = 3 \\ (x_i + 0, y_{j-1} - 0), & k = 4 \end{cases},$$

$$A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1 \\ (x_{i-1} + 0, y_j + 0), & k = 2 \\ (x_{i-1} + 0, y_j - 0), & k = 3 \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4 \end{cases}.$$

Теорема 1. Функция $S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y)$, $(x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset$ $\subset D\,(k = 1,2,3,4)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_j + 0) = C_1^{(1)}, \quad s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_j + 0) = C_1^{(2)},$$
$$s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_{j+1} - 0) = C_2^{(1)}, \quad s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_{j+1} - 0) = C_2^{(2)},$$
$$s_{ij}^{(1)}(x_{i+1} - 0, y_j + 0) = C_3^{(1)}, \quad s_{ij}^{(2)}(x_{i-1} - 0, y_j + 0) = C_3^{(2)},$$
$$s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_j - 0) = C_1^{(3)}, \quad s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_j - 0) = C_1^{(4)},$$
$$s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_{j-1} - 0) = C_2^{(3)}, \quad s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_{j-1} - 0) = C_2^{(4)},$$
$$s_{ij}^{(3)}(x_{i-1} - 0, y_j - 0) = C_3^{(3)}, \quad s_{ij}^{(4)}(x_{i+1} - 0, y_j - 0) = C_3^{(4)}.$$

Доказательство проводится непосредственной подстановкой значений аргументов в определенный разрывный сплайн (1).

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y)$ приближается оператором $S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y)$, $(x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D\,(k = 1,2,3,4)$ и $\left|f_x'(x,y)\right| \le M$, $\left|f_y'(x,y)\right| \le N$, тогда для оценки погрешности приближения в каждом треугольном элементе разбиения справедливо неравенство:

$$\left|f(x,y) - S(x,y)\right| \le \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2},$$
$$\Delta_x = x_{i+1} - x_i, \ \Delta_y = y_{j+1} - y_j.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если $C_\mu^{(k)} = f\left(A_\mu^{(k)}\right)$, $k = \overline{1,4}$, $\mu = \overline{1,3}$, то в каждом прямоугольном треугольнике $\mathrm{T}_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ оператор (1) точно восстанавливает все линейные функции.

Доказательство вытекает из того, что на трех точках можно разместить только одну плоскость.

Замечание. Если значения функции в узлах треугольной сетки неизвестны, то для нахождения неизвестных коэффициентов $C_p^{(k)}$, $p = 1,2,3$, $k = 1,2,3,4$ в данном случае предлагается использовать метод наименьших квадратов, согласно которому все неизвестные находятся из условия

$$J^{(k)}(C) = \sum_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D} \iint\limits_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)}} \left[f(x,y) - s_{ij}^{(k)}(x,y,C)\right]^2 dxdy \to \min_C.$$

Тогда получаем аппроксимационный разрывный линейный сплайн.

Пример 1. Пусть заданы узлы треугольной сетки: $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}5$, $y_3 = 1$ и функция $f(x, y)$ определена в области $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \mathrm{T}_3 \cup \mathrm{T}_4$, представленной на рис. 2.

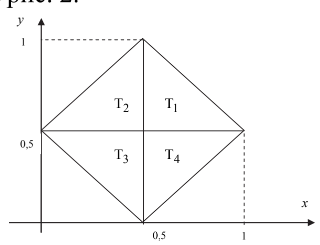

Рис. 2. Область определения приближаемой функции $f(x, y)$

$\mathrm{T}_1 = \{x - 0{,}5 > 0,\ y - 0{,}5 > 0,\ 1{,}5 - x - y > 0\}$,
$\mathrm{T}_2 = \{-(x - 0{,}5) > 0,\ y - 0{,}5 > 0,\ 0{,}5 + x - y > 0\}$,
$\mathrm{T}_3 = \{-(x - 0{,}5) > 0,\ -(y - 0{,}5) > 0,\ -0{,}5 + x + y > 0\}$,

$T_4 = \{x-0,5>0,\ -(y-0,5)>0,\ 0,5-x+y>0\}$,

Зададим функцию $f(x, y)$ с разрывами первого рода в узлах заданной треугольной сетки (рис. 3).

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & (x,y)\in T_1 \\ x-y, & (x,y)\in T_2 \\ y-x, & (x,y)\in T_3 \\ -x-y, & (x,y)\in T_4 \end{cases}.$$

Функция $f(x, y)$ имеет разрывы первого рода в узлах заданной треугольной сетки и в них имеет такие значения:

$$f^{++}(0,5;\,0,5)=1,\ f^{-+}(0,5;\,0,5)=0,$$
$$f^{--}(0,5;\,0,5)=0,\ f^{+-}(0,5;\,0,5)=-1,$$
$$f^{-+}(1;\,0,5)=1,5,\ f^{--}(1;\,0,5)=-1,5,$$
$$f^{+-}(0,5;\,1)=1,5,\ f^{--}(0,5;\,1)=-0,5,$$
$$f^{++}(0;\,0,5)=-0,5,\ f^{+-}(0;\,0,5)=0,5,$$
$$f^{-+}(0,5;\,0)=-0,5,\ f^{++}(0,5;\,0)=-0,5.$$

Разрывный сплайн-интерполянт построим в виде

$$S(x,y)=\begin{cases} S_1 f(x,y,C), & (x,y)\in T_1 \\ S_2 f(x,y,C), & (x,y)\in T_2 \\ S_3 f(x,y,C), & (x,y)\in T_3 \\ S_4 f(x,y,C), & (x,y)\in T_4 \end{cases}, \qquad (2)$$

где

$$S_1(x,y,C)=2C_1^{(1)}(1,5-x-y)+2C_2^{(1)}(y-0,5)+2C_3^{(1)}(x-0,5)$$
$$S_2 f(x,y)=2C_1^{(2)}(0,5+x-y)+2C_2^{(2)}(y-0,5)+2C_3^{(2)}(x-0,5)$$
$$S_3 f(x,y)=2C_1^{(3)}(x+y-0,5)+2C_2^{(3)}(y-0,5)+2C_3^{(3)}(x-0,5)$$
$$S_4 f(x,y,C)=2C_1^{(4)}(0,5-x+y)+2C_2^{(4)}(y-0,5)+2C_3^{(4)}(x-0,5),$$

где C – матрица неизвестных коэффициентов

$$C=\begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} \\ C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ C_1^{(4)} & C_2^{(4)} & C_3^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Далее методом наименьших квадратов рассмотрим выражение

$$F(C)=\iint_D (f(x,y)-S(x,y,C))^2\,dxdy=$$
$$=\iint_{T_1}(f(x,y)-S1(x,y,C))^2\,dxdy+$$
$$+\iint_{T_2}(f(x,y)-S2(x,y,C))^2\,dxdy+$$
$$+\iint_{T_3}(f(x,y)-S3(x,y,C))^2\,dxdy+$$
$$+\iint_{T_4}(f(x,y)-S4(x,y,C))^2\,dxdy.$$

Требуется найти такие элементы матрицы C, чтобы выражение $F(C)$ достигало минимального значения, т.е. решить минимизационную задачу

$$F(C)=\iint_D (f(x,y)-S(x,y,C))^2\,dxdy \to \min.$$

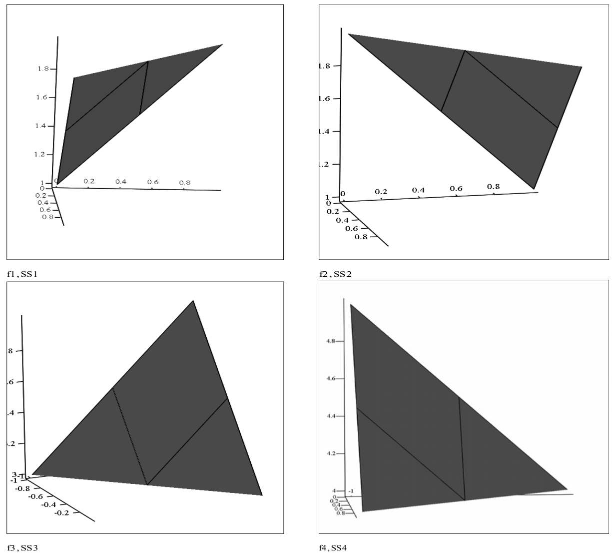

Рис. 3. Графический вид приближаемой функции $f(x, y)$ в каждом из выше определенных треугольников

Эта задача решена в системе компьютерной математики *MathCad* и была получена следующая матрица коэффициентов

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 1,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

После подстановки значений неизвестных коэффициентов в выражение (2), получаем приближаемую функцию $f(x, y)$, т.е. построенный разрывный интерполяционный сплайн совпадает с аппроксимационным и точно восстанавливает заданную разрывную функцию, что и подтверждает изложенную теорию.

Пример 2. Пусть на области, определенной в примере 1, задана функция $f(x, y)$ с разрывами первого рода в узлах заданной сетки

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & (x,y)\in T_1 \\ x^2-y^2, & (x,y)\in T_2 \\ -x^2+y^2, & (x,y)\in T_3 \\ -x^2-y^2, & (x,y)\in T_4 \end{cases}.$$

В каждом рассмотренном треугольном элементе построим интерполяционный сплайн $S(x, y, C)$ в виде, представленном в примере 2; в качестве коэффициентов матрицы C берем значения функции (левосторонние и правосторонние) в узлах сетки. Получим следующий интерполяционный сплайн:

$$S(x,y)=\begin{cases} 1,5x+1,5y-1,0 & (x,y)\in T_1 \\ 0,5x-1,5y+0,5, & (x,y)\in T_2 \\ 0,5x-0,5y, & (x,y)\in T_3 \\ -1,5x-0,5y+0,5, & (x,y)\in T_4 \end{cases}.$$

Максимальное отклонение приближаемой функции $f(x, y)$ от построенного интерполяционного сплайна $S(x, y)$ $\max|f(x,y)-S(x,y)| \approx 0,12$.

Теперь построим аппроксимационный сплайн в виде формулы (1). Коэффициенты матрицы C находим, применяя метод наименьших квадратов, т.е. решаем минимизационную задачу

$$F(C) = \iint_D (f(x,y) - S(x,y,C))^2 \, dxdy \to \min .$$

Получены следующие результаты (рис. 4):

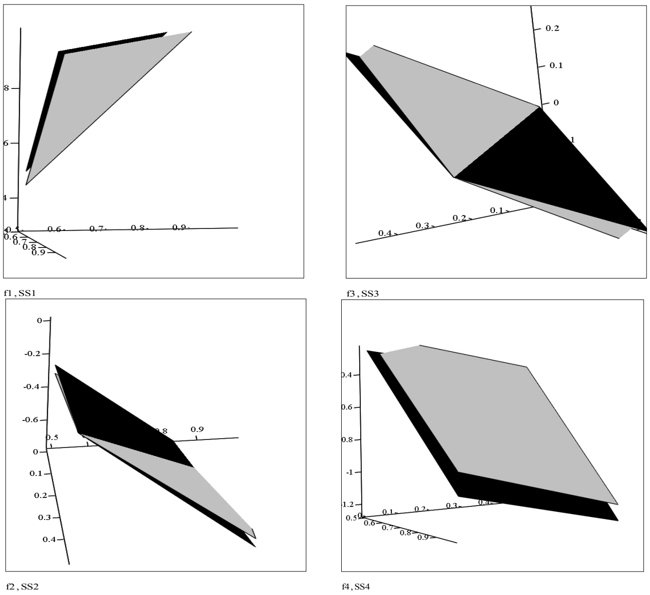

Рис. 4. Графический вид приближаемой функции $f(x,y)$ (светлый цвет) и приближающего сплайна $S(x,y)$ (темный цвет) в каждом из определенных треугольников в примере 2

Далее определим максимальное отклонение приближаемой функции $f(x,y)$ от построенного приближающего сплайна $S(x,y)$

$$\max\left|f(x,y) - S(x,y)\right| \approx 0{,}088 .$$

Пример 3. Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \mathrm{T}_3 \cup \mathrm{T}_4 \cup \mathrm{T}_5 \cup \mathrm{T}_6$ (рис. 5).

$\mathrm{T}_1 = \{x, y > 0,\ 1 - x - y > 0\}$, $\mathrm{T}_4 = \{x < 0,\ y < 0,\ 1 + x + y > 0\}$,

$\mathrm{T}_2 = \{x < 0,\ y < 1,\ x + y > 0\}$, $\mathrm{T}_5 = \{x > 0,\ y > -1,\ -x - y > 0\}$,

$\mathrm{T}_3 = \{x < 0,\ y > 0,\ -x - y > 0\}$, $\mathrm{T}_6 = \{x > 0,\ y < 0,\ x + y > 0\}$.

Зададим функцию $f(x,y)$ с разрывами первого рода в узлах заданной сетки

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1, (x,y) \in \mathrm{T}_1 \\ x^2 - y^2 + 2,\ (x,y) \in \mathrm{T}_2 \\ y^2 - x^2 + 3, (x,y) \in \mathrm{T}_3 \\ -x^2 - y^2 + 4,\ (x,y) \in \mathrm{T}_4 \\ x^2 + y^2 + 5,\ (x,y) \in \mathrm{T}_5 \\ x^2 - y^2 + 6,\ (x,y) \in \mathrm{T}_6 \end{cases} .$$

В каждом треугольнике строим сплайн вида (1) и предсталяем функцию и сплайн на рис. 6.

Далее определим максимальное отклонение приближаемой функции $f(x,y)$ от построенного сплайна $S(x,y)$:

$$\max\left|f(x,y) - S(x,y)\right| \approx 0{,}29 .$$

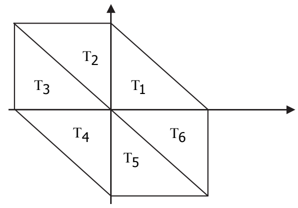

Рис. 5. Область определения приближаемой функции $f(x,y)$

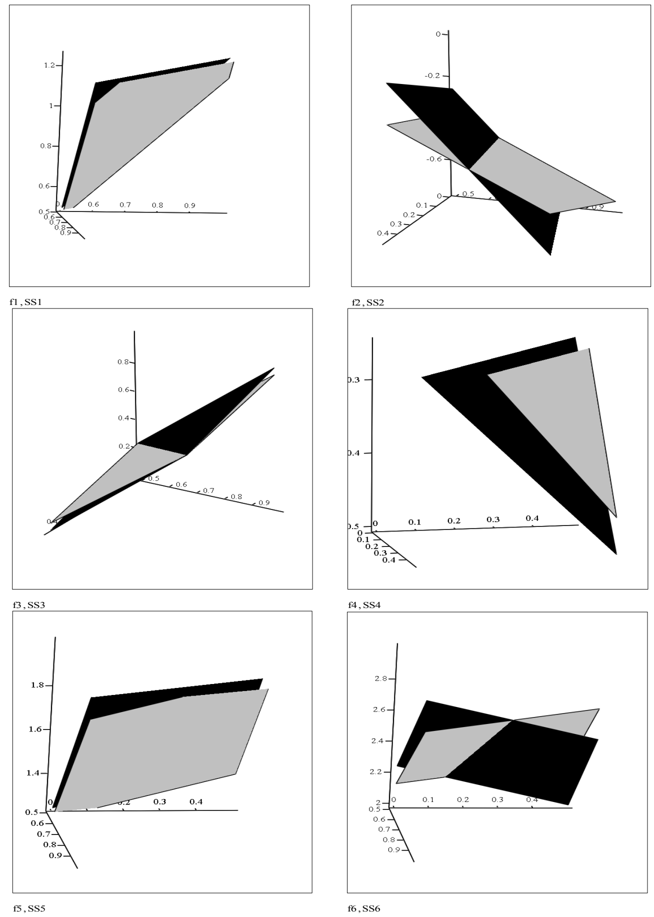

Рис. 6. Графический вид приближаемой функции $f(x,y)$ (светлый цвет) и приближающего сплайна $S(x,y)$ (темный цвет) в каждом из определенных треугольников в примере 3

Заключение. Итак, реализован предложенный метод построения разрывного интерполяционного линейного сплайна для приближения функции с возможными разрывами первого рода, область определения которых разбита на прямоугольные треугольники. Построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени на триангулированной сетке узлов.

Методы приближения разрывных функций, область определения которых разбивается на треугольные элементы с криволинейной границей станут предметом дальнейших разработок.