УДК 621.391:517.518:510.52

О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер

3*D*-коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та інформаційні оператори різних типів з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетації

Рассмотрены и исследованы кубатурные формулы вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации на одном классе дифференцируемых функций. Информация о функции задана ее следами на взаимно перпендикулярных плоскостях, линиях и значениями функции в узловых точках. Получены оценки погрешности кубатурных формул.

Cubature formulas of the calculation of 3*D*-Fourier's coefficients by using piecewice operators of spline-interflatation in the case when information about function is set of flats, set of lines, set of knots on one class of differentiable functions are presented. The estimations of error of approaching of the cubature formulas are obtained.

Запропоновано та досліджено кубатурні формули обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерфлетації на одному класі диференційовних функцій. Інформацію про функцію задано її слідами на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції у вузлових точках. Отримано оцінки похибки кубатурних формул.

Вступ. При наближенні функцій двох та трьох змінних симетричними відрізками ряду Фур'є виникає задача обчислення коефіцієнтів цього ряду за допомогою інформаційних операторів різних типів. Як дані можуть слугувати значення функції у вузлових точках, значення функції на лініях або площинах, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній або площин, що перетинають досліджуваний об'єкт. Задачу наближеного обчислення 3*D* коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації та інтерфлетації функцій [1] на різних їх класах.

Загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій у випадку, коли задані значення функції у вузлах, викладено у [2–4]. Побудова кубатурної формули на основі кусково-сталої інтерфлетації на класі Ліпшиця при даних – слідах функції на площинах, розглянуто в [5]. Метою даної статті є представлення кубатурних формул наближеного обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є, побудованих на основі кусково-сталої інтерфлетації функцій, у випадках, коли як дані задано сліди функції на площинах, на лініях та у значеннях вузлових точок.

Постановка задачі

Для обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є виду

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz$$

побудувати кубатурні формули з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що $\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M$, $\left|f^{(1,1,0)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(1,0,1)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(0,1,1)}(x,y,z)\right|\le \bar{M}$, $\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le \tilde{M}$, у випадку, коли інформацію про функцію задано її слідами на взаємно перпендикулярних площинах, слідами на лініях та значеннями функції у вузлових точках. Отримати оцінки похибки кубатурних формул.

Кусково-сталі оператори інтерполяції, інтерлінації та інтерфлетації

Введемо наступні позначення

$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right]$, $Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right]$, $Z_s=\left[z_{s-1/2},z_{s+1/2}\right]$,

$$\tilde{X}_{\tilde{k}} = \left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right], \quad \tilde{Y}_{\tilde{j}} = \left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right], \quad \widetilde{Z}_{\tilde{s}} = \left[\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2}, \tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}\right],$$

$$\bar{X}_{\bar{k}} = \left[\bar{x}_{\bar{k}-1/2}, \bar{x}_{\bar{k}+1/2}\right], \quad \bar{Y}_{\bar{j}} = \left[\bar{y}_{\bar{j}-1/2}, \bar{y}_{\bar{j}+1/2}\right], \quad \bar{Z}_{\bar{s}} = \left[\bar{z}_{\bar{s}-1/2}, \bar{z}_{\bar{s}+1/2}\right],$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad h_{2j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad h_{3s}(z) = \begin{cases} 1, z \in Z_s, \\ 0, z \notin Z_s, \end{cases}$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{h}_{2\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z) = \begin{cases} 1, z \in \tilde{Z}_{\tilde{s}}, \\ 0, z \notin \tilde{Z}_{\tilde{s}}, \end{cases}$$

$$\bar{h}_{1\bar{k}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \bar{X}_{\bar{k}}, \\ 0, x \notin \bar{X}_{\bar{k}}, \end{cases} \quad \bar{h}_{2\bar{j}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \bar{Y}_{\bar{j}}, \\ 0, y \notin \bar{Y}_{\bar{j}}, \end{cases} \quad \bar{h}_{3\bar{s}}(z) = \begin{cases} 1, z \in \bar{Z}_{\bar{s}}, \\ 0, z \notin \bar{Z}_{\bar{s}}, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \ z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2}, \ \Delta = \frac{1}{\ell}, \ k, j, s = \overline{1, \ell},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{z}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{\ell^{3/2}}, \quad \tilde{k}, \tilde{j}, \tilde{s} = \overline{1, \ell^{3/2}},$$

$$\bar{x}_{\bar{k}} = \bar{k}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2}, \ \bar{y}_{\bar{j}} = \bar{j}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2}, \ \bar{z}_{\bar{s}} = \bar{s}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2},$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\ell^3}, \quad \bar{k}, \bar{j}, \bar{s} = \overline{1, \ell^3}.$$

Розглянемо оператори

$$O_1 f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}(x),$$

$$O_2 f(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}(y),$$

$$O_3 f(x,y,z) = \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}(z),$$

$$\tilde{O}_1 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z) h_{1\tilde{k}}(x),$$

$$\tilde{O}_2 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) \tilde{h}_{2\tilde{j}}(y),$$

$$\tilde{O}_3 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z),$$

$$\bar{O}_1 f(x,y,z) = \sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3} f(\bar{x}_{\bar{k}}, y, z) h_{1\bar{k}}(x),$$

$$\bar{O}_2 f(x,y,z) = \sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3} f(x, \bar{y}_{\bar{j}}, z) \bar{h}_{2\bar{j}}(y),$$

$$\bar{O}_3 f(x,y,z) = \sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3} f(x, y, \bar{z}_{\bar{s}}) \bar{h}_{3\bar{s}}(z).$$

Означення 1. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на лініях розуміємо

$$f(x_k, y_j, z), \quad 0 \le z \le 1, \ f(x_k, y, z_s), \ 0 \le y \le 1, \ f(x, y_j, z_s), \ 0 \le x \le 1.$$

Означення 2. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на площинах розуміємо

$$f(x_k, y, z), \quad 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1, \ f(x, y_j, z), \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le z \le 1,$$

$$f(x, y, z_s), \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

***Лема* 1.** [1] Оператор кусково-сталої інтерфлетації

$$Of(x,y,z) = O_1 f(x,y,z) + O_2 f(x,y,z) + O_3 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left| f(x,y,z) - Of(x,y,z) \right| = O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

***Лема* 2.** [1] Оператор кусково-сталої інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\tilde{O}f(x,y,z) = O_1 \tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1 \tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_1 \tilde{O}_2 \tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2 \tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_2 \tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_2 \tilde{O}_1 \tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_3 \tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3 \tilde{O}_2 f(x,y,z) - O_3 \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left| f(x,y,z) - \tilde{O}f(x,y,z) \right| = O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

***Лема* 3.** [1] Оператор кусково-сталої інтерполяції, побудований на основі інтерфлетації

$$\bar{O}f(x,y,z) = O_1 \tilde{O}_2 \bar{O}_3 f(x,y,z) + O_1 \tilde{O}_3 \bar{O}_2 f(x,y,z) - O_1 \tilde{O}_2 \bar{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2 \tilde{O}_1 \bar{O}_3 f(x,y,z) + O_2 \tilde{O}_3 \bar{O}_1 f(x,y,z) - O_2 \tilde{O}_1 \bar{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_3 \tilde{O}_1 \bar{O}_2 f(x,y,z) + O_3 \tilde{O}_2 \bar{O}_1 f(x,y,z) - O_3 \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 f(x,y,z) - O_1 O_2 \bar{O}_3 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_3 \bar{O}_2 f(x,y,z) - O_2 O_3 \bar{O}_1 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

має властивість $\left| f(x,y,z) - \bar{O}f(x,y,z) \right| = O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

***Лема* 4.** Нехай $f(x,y,z) \in C^{1,1,1}\left(R^3\right)$, тоді справедливі наступні співвідношення:

1.

$$\int_{x_k}^{x} \int_{y_j}^{y} \int_{z_s}^{z} f^{(1,1,1)}(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi d\eta d\varsigma =$$
$$= f(x,y,z) - f(x_k, y, z) - f(x, y_j, z) - f(x, y, z_s) +$$
$$+ f(x_k, y_j, z) + f(x_k, y, z_s) + f(x, y_j, z_s) - f(x_k, y_j, z_s);$$

2.

$$\int_{x_k}^{x} \int_{y_j}^{y} f^{(1,1,0)}(\xi, \eta, z) \, d\xi d\eta =$$
$$= f(x,y,z) - f(x_k, y_j, z) - f(x, y, z) + f(x_k, y_j, z);$$

$$\int_{x_k}^{x} \int_{z_s}^{z} f^{(1,0,1)}(\xi, y, \zeta) \, d\xi d\zeta =$$
$$= f(x,y,z) - f(x_k, y, z) - f(x, y, z_s) + f(x_k, y, z_s);$$

$$\int_{y_j}^{y} \int_{z_s}^{z} f^{(0,1,1)}(x, \eta, \zeta) \, d\eta d\zeta =$$

$$= f(x,y,z) - f(x,y_j,z) - f(x,y,z_s) + f(x,y_j,z_s);$$

3. $$\int_{x_k}^{x} f^{(1,0,0)}(\xi,y,z)\,d\xi = f(x,y,z) - f(x_k,y,z);$$

$$\int_{y_j}^{y} f^{(0,1,0)}(x,\eta,z)\,d\eta = f(x,y,z) - f(x,y_j,z);$$

$$\int_{z_s}^{z} f^{(0,0,1)}(x,y,\zeta)\,d\zeta = f(x,y,z) - f(x,y,z_s).$$

Леми 1–4 доведено.

Кубатурна формула обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu = 1, 2, 3$ пропонуємо формули

$$\Phi_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\Phi_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\Phi_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}\,dxdydz.$$

Підставимо вираз для оператора кусково-сталої сплайн-інтерфлетації та отримаємо відповідні кубатурні формули.

Теорема 1. Для кубатурної формули $\Phi_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива оцінка $\left| I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p) \right| \le \frac{\tilde{M}}{64}\frac{1}{\ell^3}$.

Теорему доведено.

Кубатурна формула обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu = 1, 2, 3$ запропоновано формули:

$$\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\tilde{\Phi}_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\tilde{\Phi}_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}\,dxdydz.$$

Підставимо вираз для оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації, побудованого на основі інтерфлетації, та отримаємо відповідні кубатурні формули.

Теорема 2. Для кубатурної формули $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива оцінка $\left| I_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) \right| \le \left(\frac{\widetilde{M}}{64} + \frac{3\bar{M}}{16} \right)\frac{1}{\ell^3}$.

Теорему доведено.

Кубатурна формула обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерполяції, побудованих на основі інтерфлетації

Для обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu = 1, 2, 3$ пропонуємо формули:

$$\bar{\Phi}_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}\,dxdydz.$$

Підставимо вираз для оператора кусково-сталої сплайн-інтерполяції, побудованого на основі інтерфлетації, та отримаємо відповідні кубатурні формули.

Теорема 3. Для кубатурної формули $\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)$ обчислення $I_1^3(m,n,p)$ справедлива оцінка $\left| I_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p) \right| \le \left(\frac{\widetilde{M}}{64} + \frac{3\bar{M}}{16} + \frac{9}{4}M \right)\frac{1}{\ell^3}$.

За теоремами 1 та 2 маємо:

$$\left| I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p) \right| +$$
$$+ \left| \Phi_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) \right| \le \frac{\widetilde{M}}{64}\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{M}}{16}\frac{1}{\ell^3}.$$

Знайдемо оцінку $\left| \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p) \right|$.

Теорему доведено.

Висновки. Досліджено кубатурні формули обчислення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерфлетації на класі функцій, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що $\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right| \le M$,

$$\left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right| \le M, \quad \left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right| \le M,$$

$$\left|f^{(1,1,0)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}, \quad \left|f^{(1,0,1)}(x,y,z)\right| \le \bar{M},$$

$$\left|f^{(0,1,1)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}, \quad \left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right| \le \tilde{M}.$$

Інформацію про функцію задано слідами на системі взаємно перпендикулярних площин, слідами на системі взаємно перпендикулярних ліній та значеннями функції у вузлових точках. У всіх випадках отримано оцінку похибки наближення 3*D*-коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами.

Тестування та аналіз запропонованих кубатурних формул буде розглянутий у наступних статтях. Питання якості кубатурних формул, тобто чи є побудовані кубатурні формули оптимальними або близькими до них, буде наступним етапом досліджень.

1. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О.М.*, *Удовиченко В.М.* Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4(29). – С. 130–133.
3. *Литвин О.М.*, *Удовиченко В.М.* Оператори фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2005. – № 1, 2 (51, 52). – С. 19–23.
4. *Литвин О.М.*, *Удовиченко В.М.* Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ»: Сб. научн. трудов. Тем. вып. «Автоматика и приборостроение». – 2005. – № 38. – С. 90–130.
5. *Литвин О.М.*, *Нечуйвітер О.П.* Потрійні інтеграли від щвидкоосцилюючих функцій на класі $C^3_{2,L,L,L}$ та інтерфлетація функцій // Інформатика та системні науки (ІСН-2010): Матеріали Всеукр. конф., 18–20 березня 2010 р.– Полтава: РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 108–110.

Поступила 27.08.2013

Тел. для справок: +38 057 771-0545, 63-5923, 771-0545, 376-6026, +38 050 189-4738 (Харьков)

E-mail: *academ@kharkov.ua*, *olesya@email.com*

●

О.Н. Литвин, О.П. Нечуйвитер

3*D*-коэффициенты Фурье на классе дифференцируемых функций и информационные операторы различных типов с использованием кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации

Введение. При приближении функции двух и трех переменных симметричными отрезками ряда Фурье возникает задача вычисления коэффициентов этого ряда с помощью информационных операторов различных типов. В качестве данных могут быть значения функции в узловых точках, значения функции на линиях или плоскостях, интегралы от приближаемой функции вдоль избранной системы линий или плоскостей, пересекающих исследуемый объект. Задачу приближенного вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье в случае, когда начальная информация задана различными информационными операторами, позволяет эффективно решать аппарат интерлинации и интерфлетации функций [1] на различных их классах.

Общий подход к построению операторов финитного трехмерного дискретно-непрерывного и дискретного преобразования Фурье на основании метода Файлона, трилинейных сплайнов (линейных по каждой переменной) и сплайн-интерфлетации на классе дифференцированных функций в случае, когда заданы значения функции в узлах, изложен в [2–4]. Построение кубатурной формулы на основе кусочно-постоянной интерфлетации на классе Липшица при данных – следах функции на плоскостях, рассмотрено в [5]. Цель данной статьи – представление кубатурных формул приближенного вычисления 3*D* коэффициентов Фурье, построенное на базе кусочно-постоянной интерфлетации функций, в случаях, когда в качестве данных заданы следы функции на плоскостях, на линиях и в значениях узловых точек.

Постановка задачи

Для вычисления 3*D*-коэффициентов Фурье вида

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz\,dxdydz,$$

$$I_3^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}\,dxdydz$$

построить кубатурные формулы с использованием операторов кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации на классе действительных функций трех переменных, определенных на $G=[0,1]^3$ и таких, что

$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right| \le M$, $\left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right| \le M$,

$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right| \le M$, $\left|f^{(1,1,0)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}$, $\left|f^{(1,0,1)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}$,

$\left|f^{(0,1,1)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}$, $\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right| \le \tilde{M}$, в случае, когда информация о функции задана ее следами на взаимно перпендикулярных плоскостях, следами на линиях и значениями функции в узловых точках. Получить оценки погрешности кубатурных формул.

Кусочно-постоянные операторы интерполяции, интерлинации и интерфлетации

Введем следующие обозначения

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}],\ Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],\quad Z_s = [z_{s-1/2}, z_{s+1/2}],$$

$$\tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}],\ \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}],\quad \tilde{Z}_{\tilde{s}} = [\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2}, \tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}],$$

$$\bar{X}_{\bar{k}} = [\bar{x}_{\bar{k}-1/2}, \bar{x}_{\bar{k}+1/2}],\ \bar{Y}_{\bar{j}} = [\bar{y}_{\bar{j}-1/2}, \bar{y}_{\bar{j}+1/2}],\quad \bar{Z}_{\bar{s}} = [\bar{z}_{\bar{s}-1/2}, \bar{z}_{\bar{s}+1/2}],$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases}1, x \in X_k,\\ 0, x \notin X_k,\end{cases}\quad h_{2j}(y) = \begin{cases}1, y \in Y_j,\\ 0, y \notin Y_j,\end{cases}\quad h_{3s}(z) = \begin{cases}1, z \in Z_s,\\ 0, z \notin Z_s,\end{cases}$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}(x) = \begin{cases}1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}},\\ 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{2\tilde{j}}(y) = \begin{cases}1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}},\\ 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z) = \begin{cases}1, z \in \tilde{Z}_{\tilde{s}},\\ 0, z \notin \tilde{Z}_{\tilde{s}},\end{cases}$$

$$\bar{h}_{1\bar{k}}(x) = \begin{cases}1, x \in \bar{X}_{\bar{k}},\\ 0, x \notin \bar{X}_{\bar{k}},\end{cases}\quad \bar{h}_{2\bar{j}}(y) = \begin{cases}1, y \in \bar{Y}_{\bar{j}},\\ 0, y \notin \bar{Y}_{\bar{j}},\end{cases}\quad \bar{h}_{3\bar{s}}(z) = \begin{cases}1, z \in \bar{Z}_{\bar{s}},\\ 0, z \notin \bar{Z}_{\bar{s}},\end{cases}$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2},\quad z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2},\quad \Delta = \frac{1}{\ell},\ k, j, s = \overline{1,\ell},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{z}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^{3/2}},\quad \tilde{k}, \tilde{j}, \tilde{s} = \overline{1,\ell^{3/2}},$$

$$\bar{x}_{\bar{k}} = \bar{k}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2},\ \bar{y}_{\bar{j}} = \bar{j}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2},\quad \bar{z}_{\bar{s}} = \bar{s}\Delta_2 - \frac{\Delta_2}{2},\quad \Delta_2 = \frac{1}{\ell^3},\quad \bar{k}, \bar{j}, \bar{s} = \overline{1,\ell^3}.$$

Рассмотрим операторы

$$O_1 f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}(x),\ O_2 f(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}(y),$$

$$O_3 f(x,y,z) = \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}(z),\ \tilde{O}_1 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z) h_{1\tilde{k}}(x),$$

$$\tilde{O}_2 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) \tilde{h}_{2\tilde{j}}(y),\quad \tilde{O}_3 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{3\tilde{s}}(z),$$

$$\bar{O}_1 f(x,y,z) = \sum_{\bar{k}=1}^{\ell^3} f(\bar{x}_{\bar{k}}, y, z) h_{1\bar{k}}(x),\ \bar{O}_2 f(x,y,z) = \sum_{\bar{j}=1}^{\ell^3} f(x, \bar{y}_{\bar{j}}, z) \bar{h}_{2\bar{j}}(y),$$

$$\bar{O}_3 f(x,y,z) = \sum_{\bar{s}=1}^{\ell^3} f(x, y, \bar{z}_{\bar{s}}) \bar{h}_{3\bar{s}}(z).$$

Определение 1. Под следом функции $f(x,y,z)$ на линиях понимается

$$f(x_k, y_j, z),\quad 0 \le z \le 1,$$

$$f(x_k, y, z_s),\ 0 \le y \le 1,\ f(x, y_j, z_s),\ 0 \le x \le 1.$$

Определение 2. Под следом функции $f(x,y,z)$ на плоскостях понимается

$$f(x_k, y, z),\quad 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,$$

$$f(x, y_j, z),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1,$$

$$f(x, y, z_s),\ 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1.$$

***Лемма* 1.** [1] Оператор кусочно-постоянной интерфлетации

$$Of(x,y,z) = O_1 f(x,y,z) + O_2 f(x,y,z) + O_3 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

имеет свойство $\left|f(x,y,z) - Of(x,y,z)\right| = O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

***Лемма* 2.** [1] Оператор кусочно-постоянной интерлинации, построенный на основе интерфлетации

$$\tilde{O}f(x,y,z) = O_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2\tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_3\tilde{O}_1 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_2 f(x,y,z) - O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2 f(x,y,z) - O_1 O_3 f(x,y,z) - O_2 O_3 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

имеет свойство $\left|f(x,y,z) - \tilde{O}f(x,y,z)\right| = O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

***Лемма* 3.** [1] Оператор кусочно-постоянной интерполяции, построенный на основе интерфлетации

$$\bar{O}f(x,y,z) = O_1\tilde{O}_2\bar{O}_3 f(x,y,z) + O_1\tilde{O}_3\bar{O}_2 f(x,y,z) - O_1\tilde{O}_2\tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_2\tilde{O}_1\bar{O}_3 f(x,y,z) + O_2\tilde{O}_3\bar{O}_1 f(x,y,z) - O_2\tilde{O}_1\tilde{O}_3 f(x,y,z) +$$
$$+ O_3\tilde{O}_1\bar{O}_2 f(x,y,z) + O_3\tilde{O}_2\bar{O}_1 f(x,y,z) - O_3\tilde{O}_1\tilde{O}_2 f(x,y,z) -$$
$$- O_1 O_2\bar{O}_3 f(x,y,z) - O_1 O_3\bar{O}_2 f(x,y,z) - O_2 O_3\bar{O}_1 f(x,y,z) + O_1 O_2 O_3 f(x,y,z)$$

имеет свойство $\left|f(x,y,z) - \bar{O}f(x,y,z)\right| = O\left(\frac{1}{\ell^3}\right)$.

***Лемма* 4.** Пусть $f(x,y,z) \in C^{1,1,1}(R^3)$, тогда справедливы следующие соотношения:

1. $$\int_{x_k}^{x}\int_{y_j}^{y}\int_{z_s}^{z} f^{(1,1,1)}(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi d\eta d\varsigma =$$
$$= f(x,y,z) - f(x_k,y,z) - f(x,y_j,z) - f(x,y,z_s) +$$
$$+ f(x_k,y_j,z) + f(x_k,y,z_s) + f(x,y_j,z_s) - f(x_k,y_j,z_s);$$

2. $$\int_{x_k}^{x}\int_{y_j}^{y} f^{(1,1,0)}(\xi,\eta,z)\, d\xi d\eta =$$
$$= f(x,y,z) - f(x_k,y_j,z) - f(x,y,z) + f(x_k,y_j,z);$$
$$\int_{x_k}^{x}\int_{z_s}^{z} f^{(1,0,1)}(\xi,y,\zeta)\, d\xi d\zeta =$$
$$= f(x,y,z) - f(x_k,y,z) - f(x,y,z_s) + f(x_k,y,z_s);$$
$$\int_{y_j}^{y}\int_{z_s}^{z} f^{(0,1,1)}(x,\eta,\zeta)\, d\eta d\zeta =$$
$$= f(x,y,z) - f(x,y_j,z) - f(x,y,z_s) + f(x,y_j,z_s);$$

3. $$\int_{x_k}^{x} f^{(1,0,0)}(\xi,y,z)\, d\xi = f(x,y,z) - f(x_k,y,z);$$
$$\int_{y_j}^{y} f^{(0,1,0)}(x,\eta,z)\, d\eta = f(x,y,z) - f(x,y_j,z);$$
$$\int_{z_s}^{z} f^{(0,0,1)}(x,y,\zeta)\, d\zeta = f(x,y,z) - f(x,y,z_s).$$

Леммы 1–4 доказаны.

Кубатурная формула вычисления 3D-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной интерфлетации

Для вычисления интегралов $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu = 1,2,3$ предложены формулы

$$\Phi_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\Phi_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\Phi_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 Of(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz.$$

Подставим выражение для оператора кусочно-постоянной сплайн-интерфлетации и получим соответствующие кубатурные формулы.

Теорема 1. Для кубатурной формулы $\Phi_1^3(m,n,p)$ вычисления $I_1^3(m,n,p)$ справедлива оценка

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p)\right| \le \frac{\tilde{M}}{64}\frac{1}{\ell^3}.$$

Теорема доказана.

Кубатурная формула вычисления 3D-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной интерлинации, построенных на основе интерфлетации

Для вычисления интегралов $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu = 1,2,3$ предложены формулы:

$$\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\tilde{\Phi}_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\tilde{\Phi}_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \tilde{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz.$$

Подставим выражение для оператора кусочно-постоянной сплайн-интерлинации, построенного на основе интерфлетации, и получим соответствующие кубатурные формулы.

Теорема 2. Для кубатурной формулы $\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)$ вычисления $I_1^3(m,n,p)$ справедлива оценка

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le \left(\frac{\widetilde{M}}{64} + \frac{3\bar{M}}{16}\right)\frac{1}{\ell^3}.$$

Теорема доказана.

Кубатурная формула вычисления 3D-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной интерполяции, построенных на основе интерфлетации

Для вычисления интегралов $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu = 1,2,3$ предложены формулы

$$\bar{\Phi}_1^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_2^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dxdydz,$$

$$\bar{\Phi}_3^3(m,n,p) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \bar{O}f(x,y,z)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny}e^{-i2\pi pz}dxdydz.$$

Подставим выражение для оператора кусочно-постоянной сплайн-интерполяции, построенного на основе интерфлетации, и получим соответствующие кубатурные формулы.

Теорема 3. Для кубатурной формулы $\bar{\Phi}_1^3(m,n,p)$ вычисления $I_1^3(m,n,p)$ справедлива оценка

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le \left(\frac{\widetilde{M}}{64} + \frac{3\bar{M}}{16} + \frac{9}{4}M\right)\frac{1}{\ell^3}.$$

По теоремам 1 и 2 имеем

$$\left|I_1^3(m,n,p) - \Phi_1^3(m,n,p)\right| + \left|\Phi_1^3(m,n,p) - \tilde{\Phi}_1^3(m,n,p)\right| \le$$

$$\le \frac{\widetilde{M}}{64}\frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{M}}{16}\frac{1}{\ell^3}.$$

Найдем оценку $\left|\tilde{\Phi}_1^3(m,n,p) - \bar{\Phi}_1^3(m,n,p)\right|$.

Теорема доказана.

Заключение. Исследованы кубатурные формулы вычисления 3D-коэффициентов Фурье с использованием операторов кусочно-постоянной интерфлетации на классе функций, определенных на $G = [0,1]^3$ и таких, что

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right| \le M, \quad \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right| \le M,$$

$$\left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right| \le M, \quad \left|f^{(1,1,0)}(x,y,z)\right| \le \bar{M},$$

$$\left|f^{(1,0,1)}(x,y,z)\right| \le \bar{M}, \quad \left|f^{(0,1,1)}(x,y,z)\right| \le \bar{M},$$

$\left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right| \le \tilde{M}$. Информация о функции задана следами на системе взаимно перпендикулярных плоскостей, следами на системе взаимно перпендикулярных линий и значениями функции в узловых точках. Во всех случаях получена оценка погрешности приближения 3D-коэффициентов Фурье кубатурными формулами.

Тестирование и анализ предлагаемых кубатурных формул будет рассмотрен в следующих статьях. Вопрос качества кубатурных формул, т.е., будут ли построенные кубатурные формулы оптимальными или близкими к ним, будет следующим этапом исследований.

●