

Е.Г. Ревунова

Восстановление сигналов, полученных косвенными измерениями, на основе усеченного сингулярного разложения и случайного проецирования

Рассмотрены методы устойчивого решения дискретных некорректных задач с применением случайного проецирования, усеченного сингулярного разложения, регуляризации Тихонова, дан их сравнительный анализ и результаты экспериментального исследования.

Ключевые слова: дискретная некорректная задача, регуляризация, усеченное сингулярное разложение, случайное проецирование.

Розглянуто методи стійкого рішення дискретних некоректних задач із застосуванням випадкового проектування, усеченого сингулярного розкладання, регуляризації Тихонова, наведено їх порівняльний аналіз та результати експериментального дослідження.

Ключові слова: дискретна некоректна задача, регуляризація, усечене сингулярне розкладання, випадкове проектування.

Введение. Решение некорректных задач актуально для многих областей науки и техники. Дискретные некорректные задачи (ДНЗ) возникают, например, при дискретизации интегральных уравнений в таких областях, как спектрометрия, гравиметрия, магнитометрия, электроразведка и других [1–3].

Известно, что решение ДНЗ как задачи наименьших квадратов неустойчиво: малым изменениям в векторе измерений соответствуют большие изменения в векторе решения, при этом велико значение ошибки решения. Для преодоления неустойчивости и повышения точности решения используют методы регуляризации.

В данной статье рассмотрены методы устойчивого решения ДНЗ с применением случайного проецирования [4–7], усеченного сингулярного разложения [8–11], регуляризации Тихонова [11, 12], дан их сравнительный анализ и результаты экспериментального исследования.

Дискретная некорректная обратная задача

Во многих практических приложениях преобразование сигнала описывается линейной моделью вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где известны матрица $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ и вектор измерений $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^N$ ($\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{Ax}$). Компоненты вектора шума $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{R}^N$ – реализации независимых, нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Требуется оценить вектор сигнала $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^N$.

В случае, когда \mathbf{y} содержит шум и ряд сингулярных чисел матрицы \mathbf{A} стремится к нулю (при этом \mathbf{A} имеет высокое число обусловленности) задачу оценки \mathbf{x} называют *дискретной некорректной задачей* [11].

ДНЗ часто возникают в результате приведения интегральных уравнений $\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds = f(t)$ к дискретному виду. Примерами служат задачи Carasso [13], Delves [14] и Phillips [15]. Дискретное представление функций $K(t,s)$ и $f(t)$ для этих задач, полученное с использованием программ *Regularization Toolbox* [16], дано на рис. П.1.1 и П.1.2, ряд сингулярных значений – на рис. П.1.3.

Для ДНЗ решение (оценка сигнала \mathbf{x}), полученное методом наименьших квадратов в Приложениях (МНК) на основе псевдообращения как $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$, где \mathbf{A}^+ – псевдообратная матрица, неустойчиво и неточно. Пример неустойчивого решения задач Carasso, Phillips, Delves методом наименьших квадратов приведен на рис. П.1.4.

Для преодоления неустойчивости и повышения точности решения используют подход регуляризации. Классический метод – регуляризация Тихонова. Задача стандартного вида формулируется так:

$$\mathbf{x}_{reg} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2), \quad (2)$$

где λ – параметр регуляризации.

Для выбора параметра регуляризации используются такие специальные методы: метод L -кривой [17], метод обобщенной невязки [18], метод перекрестной проверки [19]. В реальных задачах, где уровень (дисперсии) шума в векторе измерений \mathbf{y} велик, методы выбора параметра регуляризации могут давать оценку λ , отличную от оптимальной, что снижает точность решения.

Примеры работы методов выбора параметра регуляризации приведены в приложении 2.

Другая проблема состоит в том, что полученные решения (2), например с использованием SVD -разложения, характерно большой вычислительной сложностью $O(kN \min\{k, N\})$, где $k \times N$ – размер матрицы \mathbf{A} .

Таким образом, недостатки существующих методов решения ДНЗ на основе регуляризации Тихонова таковы:

- трудность правильного подбора параметра регуляризации,
- вычислительная сложность.

Поэтому остается актуальным поиск альтернативных подходов к решению ДНЗ, позволяющих преодолеть эти недостатки.

При другом подходе к обеспечению устойчивости решения задачи используется целочисленный параметр регуляризации, в качестве которого выступает число членов модели (линейной относительно параметров), аппроксимирующей исходные данные. Для получения устойчивого решения (оценки \mathbf{x}^*) можно использовать, например, такие методы, как усеченное сингулярное разложение [10], усеченное QR разложение [20, 21], метод на основе рандомизации [5–7].

Вектор оценки \mathbf{x} на основе усеченного сингулярного разложения получают такой линейной моделью [10]:

$$\mathbf{x}_{k\ SVD}^* = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i s_i^{-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{y}, \quad (3)$$

где $\mathbf{u}_i \in \mathcal{R}^N$ – левые сингулярные векторы, $\mathbf{v}_i \in \mathcal{R}^N$ – правые сингулярные векторы, s_i – сингулярные числа.

Вектор оценки \mathbf{x} на основе случайного проецирования получают линейной моделью вида [5]:

$$\mathbf{x}_{k\ R}^* = \sum_{i=1}^k \mathbf{c}_i \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{y}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{R}^N$ – столбец матрицы $\boldsymbol{\Omega}_k = [\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_k]$, есть результат сингулярного разложения матрицы \mathbf{G} , элементы которой – случайные величины с нормальным распределением; $\mathbf{c}_i \in \mathcal{R}^N$ – столбец матрицы $(\boldsymbol{\Omega}_k^T \mathbf{A})^+ = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k]$.

Среднеквадратичную ошибку восстановления \mathbf{x} будем вычислять как

$$e_x(k) = E\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^*\|^2\} = E\{\|\mathbf{e}_{x\ k}\|^2\}, \quad (5)$$

где $E\{\cdot\}$ – оператор усреднения по реализациям шума в векторе измерений, \mathbf{x}_k^* – вектор восстановленного сигнала, т.е. вектор оценки \mathbf{x} по (3) или (4), $\mathbf{e}_{x\ k}$ – вектор ошибки восстановления истинного сигнала \mathbf{x} с использованием k компонент модели.

Существует оптимальное число k компонент линейных моделей (3) и (4), минимизирующее ошибку (5). Наличие оптимального $k < N$ возможно потому, что ошибку восстановления истинного сигнала можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых (детерминированная) убывает с ростом количества компонент модели, а другая (стохастическая) возрастает и пропорциональна уровню шума в векторе измерений [11, 9, 6]. Таким образом, при некотором уровне шума глобальный минимум ошибки может быть достигнут при $1 < k < N$.

В отличие от регуляризации, связанной с минимизацией функционала (2), где параметр регуляризации – действительное число, подход к решению ДНЗ путем регуляризации с целочисленным параметром позволяет обеспечить подход к решению ДНЗ путем регуляризации с целочисленным параметром и выбор модели наилучшей в смысле ошибки (точности) восстановления \mathbf{x} (5), путем перебора N k -компонентных моделей (3) и (4).

Кроме того, решение ДНЗ на основе случайного проецирования (4) позволяет понизить вычислительную сложность путем снижения размерности задачи при $k < N$ [5].

Рассмотрим методы выбора оптимального количества членов линейной модели, построенной посредством сингулярного разложения, а также построение и выбор оптимального количества членов линейной модели на основе случайного проецирования.

Решение ДНЗ на основе сингулярного разложения

Такое решение ДНЗ получают [11] так:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}, \quad \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}^T. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{A}_k = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$ – приближение матрицы \mathbf{A} , полученное по k ($k < N$) компонентам сингулярного разложения, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ – матрица левых сингулярных векторов с ортонормированными столбцами, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ – матрица правых сингулярных векторов с ортонормированными столбцами, $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_k)$ – матрица сингулярных чисел, \mathbf{A}^+ – псевдообращение матрицы \mathbf{A} .

Оценка решения $\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{s_i} \mathbf{v}_i$ формируется

как сумма векторов \mathbf{v}_i , взвешенных коэффициентами $w_i = \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{s_i}$. Типичный вид векторов \mathbf{v}_i

(полученных для задачи *Phillips*) приведен на рис. 1, где видно, что с ростом индекса i векторы становятся все более знакопеременными, шумоподобными.

В случае, когда оценка \mathbf{x}^* определяется преимущественно членами суммы, соответствующими большим сингулярным значениям (т.е. гладким сингулярным векторам), обеспечивается гладкость и малая погрешность решения. Если \mathbf{x}^* определяется членами суммы, соответствующими малым сингулярным значениям (сильно знакопеременным сингулярным векторам), ошибка решения увеличивается. Понятно, что может существовать некоторое оптимальное количество компонент в вы-

ражении (3), достаточное для передачи всех особенностей моделируемого сигнала, но без шумоподобных сингулярных векторов.

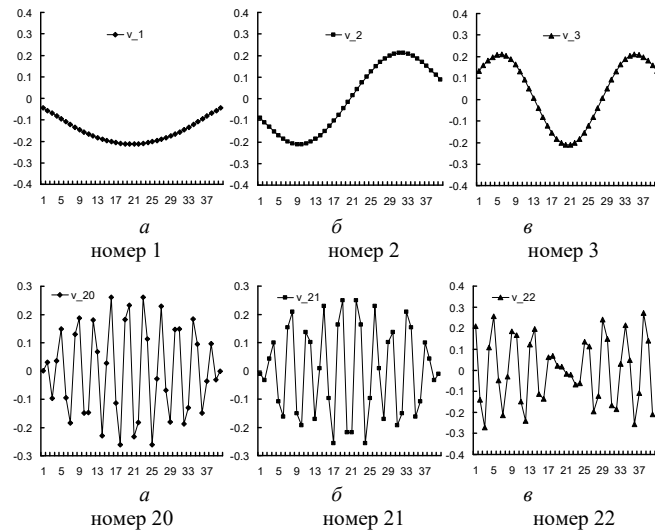


Рис. 1. Сингулярный вектор: а, б, в – с номерами 1–3 и 20–22

Поэтому актуальна разработка подхода к определению оптимального количества компонент сингулярного разложения для решения ДНЗ. Оптимальным количеством компонент сингулярного разложения будем считать такое, при котором точность решения максимальна. Рассмотрим точность восстановления истинного сигнала \mathbf{x} и точность восстановления вектора выхода \mathbf{y} при решении ДНЗ на основе сингулярного разложения.

В работах [7, 9] получено выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления \mathbf{x}

$$e_x(k) = \|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+) \quad (7)$$

и ее составляющих

$$e_{xd}(k) = \|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 \quad \text{и} \quad e_{xs}(k) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+), \quad (8)$$

где e_{xd} – детерминированная составляющая ошибки восстановления \mathbf{x} и e_{xs} – стохастическая.

Выражение для ошибки восстановления выхода [7, 9] имеет вид

$$e_y(k) = \|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \quad (9)$$

Составляющие ошибки восстановления выхода

$$e_{y_d}(k) = \|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0\|^2,$$

$$e_{y_s}(k) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+), \quad (10)$$

где e_{y_d} – детерминированная составляющая ошибки восстановления \mathbf{y}_0 , e_{y_s} – стохастическая.

Пример зависимости ошибки восстановления \mathbf{x} (e_x), ее детерминированной (e_{x_1}) и стохастической составляющих (e_{x_2}) от k для задачи *Phillips* приведен на рис. 2. Зависимости ошибки имеют минимум при $k < N$, положение которого смещается в область меньших k с возрастанием уровня шума. Детерминированная составляющая ошибки убывает, а стохастическая возрастает с ростом k .

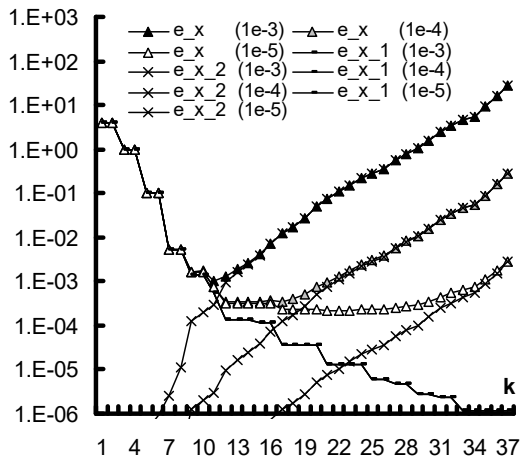


Рис. 2. Зависимости ошибки восстановления \mathbf{x} и ее составляющих от k для задачи *Phillips*

Пример зависимости ошибки восстановления выхода \mathbf{y}_0 , ее детерминированной и стохастической составляющих от k приведен на рис. 3. Видно, что тенденции поведения составляющих ошибки для \mathbf{x} и \mathbf{y}_0 аналогичны и положение минимумов ошибок восстановления \mathbf{x} и \mathbf{y}_0 совпадают.

В реальных условиях вычислить ошибку $e_x(k)$ восстановления \mathbf{x} нельзя ввиду отсутствия информации об \mathbf{x} , поэтому нельзя непосредственно определить и оптимальное k .

Для выбора k , близкого к оптимальному, нужно разработать критерий выбора модели (КВМ) – т.е. функцию, которая бы имела экс-

тремум при k , близком или равном оптимальному, и не включала неизвестный вектор \mathbf{y}_0 . Для разработки КВМ используем среднюю ошибку восстановления \mathbf{y}_0 :

$$e_y(k) = E\{\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_k^*\|^2\} = E\{\|\mathbf{e}_y\|^2\}, \quad (11)$$

где $\mathbf{y}_k^* = \mathbf{A}\mathbf{x}_k^*$, вектор \mathbf{e}_y – вектор ошибки восстановления \mathbf{y}_0 . Отметим, что хотя \mathbf{y}_0 неизвестен, его можно оценить с использованием известного вектора измерений \mathbf{y} .

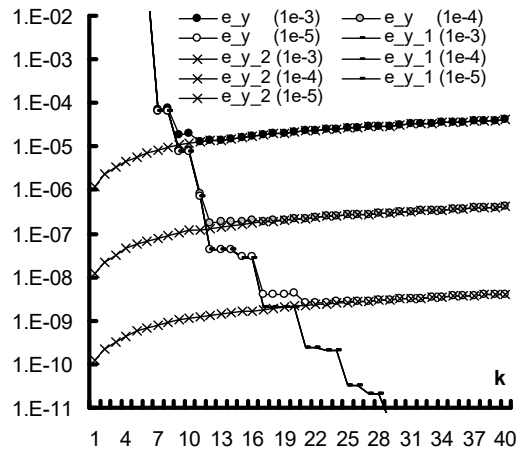


Рис. 3. Зависимости ошибки восстановления выхода \mathbf{y} и ее составляющих от k для задачи *Phillips*

Таким образом, при создании КВМ для решения ДНЗ следует:

- показать, что глобальные минимумы зависимости ошибки восстановления \mathbf{x} и ошибки восстановления \mathbf{y}_0 от k совпадают или близки;
- получить выражение для оценивания ошибки восстановления \mathbf{y}_0 с использованием известного вектора измерений \mathbf{y} .

Для сравнения положения минимума ошибки $e_x(k)$ восстановления истинного сигнала и ошибки $e_y(k)$ восстановления незашумленного вектора измерений получим выражения (неравенства), характеризующие размерность модели k , при которой ошибка минимальна. Полную ошибку (как $e_x(k)$, так и $e_y(k)$) представим в виде [6, 8]

$$e(k) = e_d(k) + e_s(k) = e_d(k) + \sigma^2 e_g(k), \quad (12)$$

где $e_d(k)$ – зависимость детерминированной составляющей ошибки от k , $e_s(k)$ – зависимость стохастической составляющей ошибки от k , σ^2 – дисперсия шума, $e_g(k) = e_s(k) / \sigma^2$.

Представление ошибки в форме (12), исследование составляющих ошибки и разработка КВМ – приемы, используемые направлением индуктивного моделирования [22, 23] для поиска оптимального решения. Рассуждения, приводящие к (14), сходны с подходом критических дисперсий [23], развитым в рамках МГУА [22].

Условие наличия минимума (который может быть локальным или глобальным) ошибки для модели размерности k таково:

$$e(k) - e(k-1) < 0, \quad e(k+1) - e(k) > 0. \quad (13)$$

Обозначим $\Delta e_d(k) = e_d(k-1) - e_d(k)$ и $\Delta e_s(k) = e_s(k) - e_s(k-1)$ для детерминированной и стохастической составляющих ошибки, из (13) получим неравенство (см. Приложение 3)

$$\frac{\Delta e_d(k+1)}{\Delta e_g(k+1)} < \sigma^2 < \frac{\Delta e_d(k)}{\Delta e_g(k)}. \quad (14)$$

Если значение дисперсии шума находится в диапазоне (14), значит, при модели размерности k наблюдается минимум ошибки.

Обозначим $J_x = \frac{\Delta e_{d_x}(k)}{\Delta e_{g_x}(k)}$ – отношение из-

менений составляющих ошибки e_d и e_g в зависимости от k для ошибки восстановления истинного сигнала \mathbf{x} , и $J_y = \frac{\Delta e_{d_y}(k)}{\Delta e_{g_y}(k)}$ – аналогичное отношение для ошибки восстановления вектора измерений \mathbf{y}_0 . Если J_x и J_y для некоторого метода совпадают или близки, то и оптимальные значения k для ошибок восстановления \mathbf{x} и \mathbf{y}_0 совпадают или близки.

Если значение J_x (J_y) для исследуемой задачи монотонно убывает в зависимости от k , минимум ошибки восстановления \mathbf{x} (\mathbf{y}_0) для этой задачи будет единственным при любом

σ^2 . В этом случае любое значение σ^2 принадлежит только одному диапазону $J(k+1) < \sigma^2 < J(k)$ согласно (14), т.е. минимум ошибки достигается при k . В противном случае, т.е. когда σ^2 принадлежит не одному диапазону J_x или J_y , зависимости ошибок восстановления истинного сигнала и выхода от k имеют локальные минимумы.

Пример зависимостей $J_x(k)$, $J_y(k)$, полученных экспериментально для задач Carasso и Delves приведен в Приложении 4.

Поведение составляющих ошибки в зависимости от количества компонент модели. Составляющие ошибки восстановления истинного сигнала \mathbf{x} и ошибка восстановления \mathbf{y}_0 в зависимости от количества k компонент сингулярного разложения исследованы в работах [7, 9], получены аналитические выражения для $\Delta e_d(k)$ и $\Delta e_g(k)$.

Для детерминированной составляющей ошибки $e_{x_d}(k)$ получено выражение:

$$e_{x_d}(k) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \sum_{i=1}^k \mathbf{x}^T \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{x} = e_{x_d}(k-1) - \mathbf{x}^T \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}, \quad (15)$$

так как $\mathbf{x}^T \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x} > 0$, значение детерминированной составляющей ошибки $e_{x_d}(k)$ убывает с возрастанием k .

Из рекурсивного выражения для стохастической составляющей ошибки

$$e_{x_s}(k) = e_{x_s}(k-1) + \sigma^2 s_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) = e_{x_s}(k-1) + \sigma^2 s_k^{-2}, \quad (16)$$

следует, что ее значение возрастает с ростом k .

Выражение для детерминированной составляющей ошибки восстановления \mathbf{y}_0 имеет вид

$$e_{y_d}(k) = e_{y_d}(k-1) - \mathbf{y}_0^T \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_0. \quad (17)$$

Поскольку $\mathbf{y}_0^T \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_0 > 0$, значение $e_{y_d}(k)$ убывает с ростом k .

Значение стохастической составляющей ошибки восстановления \mathbf{y}_0

$$e_{y_s}(k) = \sigma^2 \text{trace} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right) = \sigma^2 k \quad (18)$$

возрастает с ростом k .

Учитывая, что $\Delta e_{x_d}(k) = \mathbf{x}^T \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}$ и $\Delta e_{x_g}(k) = s_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T) = s_k^{-2}$,

$$J_x(x) = \frac{\Delta e_{x_d}(k)}{\Delta e_{x_g}(k)} = s_k^2 \mathbf{x}^T \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}. \quad (19)$$

Вычислим соотношение $J_y(k)$ для ошибки восстановления \mathbf{y}_0 .

Так как $\Delta e_{y_d}(k) = s_k^2 \mathbf{x}^T \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}$ и $\Delta e_{y_g}(k) = \text{trace}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = 1$,

$$J_y(x) = \frac{\Delta e_{y_d}(k)}{\Delta e_{y_g}(k)} = s_k^2 \mathbf{x}^T \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}. \quad (20)$$

Из выражений (19) и (20) видно, что $J_x(k)$ и $J_y(k)$ совпадают, т.е. для усеченного сингулярного разложения положение минимумов ошибки восстановления входа и выхода всегда совпадают. Поэтому зависимость ошибки восстановления \mathbf{y}_0 от количества компонент модели можно использовать для определения оптимального числа компонент модели. Однако вектор измерений \mathbf{y}_0 неизвестен. Оценим его и получим выражение для КВМ.

КВМ для решения ДЗН на основе сингулярного разложения. Как отмечалось, использовать для определения минимума ошибки непосредственно выражение средней ошибки восстановления \mathbf{y}_0 (9) невозможно при наличии в нем неизвестного в реальных условиях вектора \mathbf{y}_0 .

Запишем неизвестный вектор \mathbf{y}_0 с использованием полученного в результате измерений \mathbf{y} и вектора шума $\boldsymbol{\varepsilon}$ как $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon}$ и проведем усреднение по реализациям шума:

$$e_y = E\left\{\left\|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon})\right\|^2\right\} + \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+), \quad (21)$$

$$e_y = E\left\{\left\|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}\right\|^2\right\} + E\left\{\left\|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}\right\|^2\right\} - 2E\left\langle(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}\right\rangle + \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \quad (22)$$

В результате усреднения в [7] получено выражение (23), аппроксимирующее ошибку восстановления \mathbf{y}_0 , которое можно использовать для определения количества компонент сингулярного разложения, близкого к оптимальному

$$CR_{SVD} = E\left\{\left\|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}\right\|^2\right\} - \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})) + \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \quad (23)$$

Для оценки дисперсии шума σ^2 могут быть применены известные методы [24–27].

На рис. 4 для задачи *Carasso* приведены графики зависимости значений критерия CR_{SVD} , средней ошибки восстановления выхода (e_{y_mean}) и средней ошибки восстановления истинного сигнала (e_{x_mean}) от количества компонент сингулярного разложения k . Графики зависимостей критерия CR_{SVD} и средней ошибки восстановления \mathbf{y}_0 близки, критерий выбора модели CR_{SVD} хорошо аппроксимирует ошибку восстановления выхода \mathbf{y}_0 .

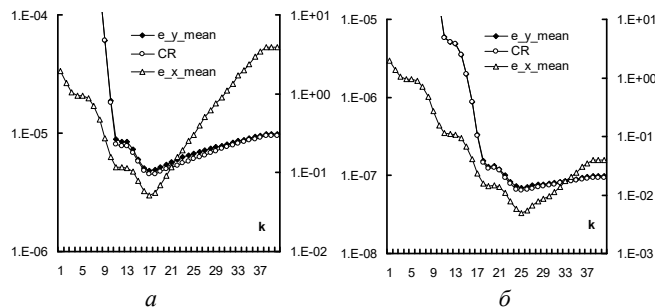


Рис. 4. Зависимости значений критерия CR и ошибки восстановления выхода от k : a – для уровня шума $1e-4$; b – для уровня шума $1e-5$

Положения минимумов зависимости ошибки восстановления \mathbf{x} и ошибки восстановления \mathbf{y}_0 от k совпадают.

Решение ДЗН с использованием случайного проецирования

Одна из проблем использования *SVD*-разложения для решения ДЗН – это его высокая вычислительная сложность – для квадратной матрицы $O(N^3)$. Авторами [4–7] разрабатывается подход, основанный на поиске минимума ошибки решения дискретной некорректной за-

дачи с использованием случайного проецирования, обеспечивающего устойчивость решения и позволяющего понизить вычислительную сложность. Случайное проецирование – разновидность методов формирования нейросетевых распределенных представлений [28–33].

Для решения на основе проекционного подхода обе части исходного уравнения (1) умножим на матрицу $\mathbf{Q}_k \in \mathcal{R}^{k \times N}$ и получим уравнение

$$\mathbf{F}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}_k, \text{ где } \mathbf{F}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}, \mathbf{F}_k \in \mathcal{R}^{k \times N},$$

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{y}, \mathbf{b}_k \in \mathcal{R}^k. \quad (24)$$

В работе [5] предложено получать матрицу \mathbf{Q} QR -разложением матрицы $\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, где \mathbf{Q} – ортонормированная матрица, \mathbf{R} – верхнетреугольная. Элементы матрицы \mathbf{G} – реализации случайной величины с нормальным распределением, нулевым средним и единичной дисперсией, $k \leq N$.

Восстановление сигнала \mathbf{x} на основе псевдообращения получим как

$$\mathbf{x}_Q^* = \mathbf{F}_k^+ \mathbf{b}_k. \quad (25)$$

Для метода случайного проецирования получено выражение среднеквадратической ошибки восстановления \mathbf{x} [5]:

$$e_x = \left\| (\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2 + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k^+) \quad (26)$$

и ее составляющих

$$e_{x_d} = \left\| (\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2, \quad e_{x_s} = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k^+), \quad (27)$$

где e_{y_d} – детерминированная составляющая ошибки восстановления \mathbf{x} и e_{x_s} – стохастическая.

Выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления \mathbf{y}_0 имеет вид

$$e_y = \left\| (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 \right\|^2 + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{F}_k^+). \quad (28)$$

Составляющие ошибки восстановления \mathbf{y}_0 :

$$e_{y_d} = \left\| (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 \right\|^2,$$

$$e_{y_s} = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{F}_k^+), \quad (29)$$

где e_{y_d} – детерминированная составляющая ошибки восстановления вектора измерений и e_{y_s} – стохастическая.

На рис. 5 приведен пример зависимостей от k ошибки восстановления \mathbf{x} (e_{xQ}), и ее составляющих (e_{xQ_1}) и (e_{xQ_2}) для задачи Phillips для трех уровней шума $\{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$. Ошибка восстановления приведена на рис. 6.

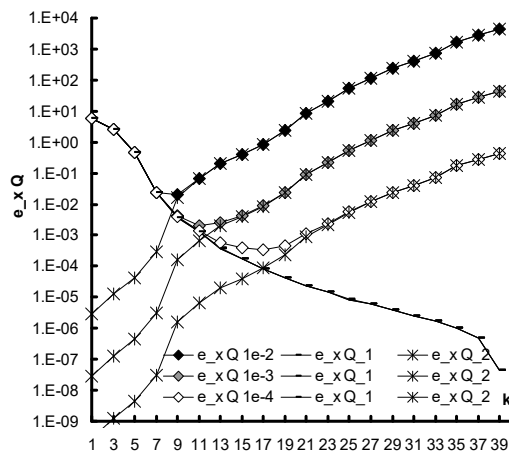


Рис. 5. Зависимости ошибки восстановления \mathbf{x} и ее составляющих от k

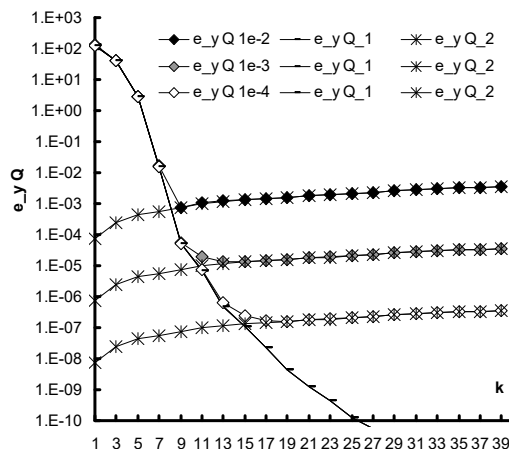


Рис. 6. Зависимости ошибки восстановления \mathbf{y}_0 и ее составляющих от k

Поведение составляющих ошибки в зависимости от количества компонент модели

Количество столбцов N матрицы \mathbf{Q}_k определяется количеством столбцов исходной матрицы \mathbf{A} , количество строк k априори не фиксировано и может изменяться от единицы до N . Исследование зависимости составляющих ошибки (26) от количества строк k матрицы \mathbf{Q}_k , проведенное в [6], основано на представлении матрицы $\mathbf{F}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}$ в виде суммы исходной матрицы и матрицы возмущения.

Псевдообратная матрица $\mathbf{F}_k^+ = (\mathbf{Q}_k^T \mathbf{A})^+$, используемая для оценки \mathbf{x} , может быть представлена в виде возмущения псевдообратной матрицы через возмущение исходной матрицы [34]. На основе такого представления получены рекурсивные выражения для стохастической и детерминированной составляющих ошибки восстановления \mathbf{x} . Эти выражения служат инструментом для исследования тенденций поведения (возрастания, убывания) составляющих ошибки в зависимости от k .

Матрица $\mathbf{F}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}$ имеет структуру

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k-1} \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix}, \quad (30)$$

где $\mathbf{F}_{k-1} \in \mathfrak{R}^{(k-1) \times N}$, вектор-строка $\mathbf{f}_k = \mathbf{q}_k \mathbf{A}$ имеет размерность k , \mathbf{q}_k – строка матрицы $\mathbf{Q}_k = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k]^T$.

В качестве возмущения матрицы \mathbf{F}_{k-1} рассматривается матрица $\mathbf{E}_k \in \mathfrak{R}^{k \times N}$, содержащая одну ненулевую k -ю строку \mathbf{f}_k , которая добавляется на k -м шаге:

$$\mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{E}_k = \mathbf{F}_k. \quad (31)$$

т.е.

$$\mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{k-1} \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где \mathbf{O}_{k-1} – нулевая подматрица размерности $((k-1) \times N)$.

В [6] сформулированы рекурсивные выражения для стохастической и детерминированной составляющих ошибки. Для стохастической составляющей ошибки восстановления истинного сигнала рекурсивное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} e_{x_s}(k) &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k^+) = \\ &= e_{x_s}(k-1) + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1}) + \sigma^2 d_k, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\mathbf{M}_{k-1} = \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+$, $d_k = \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^+$. Если \mathbf{f}_k ненулевой, $d_k = \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^+ > 0$. Для ненулевой \mathbf{M}_{k-1} след $\text{trace}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1}) > 0$. Поэтому значение

стохастической составляющей ошибки возрастает с ростом k .

Для детерминированной составляющей ошибки восстановления истинного сигнала рекурсивное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} e_{x_d}(k) &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k \mathbf{x} = \\ &= e_{x_d}(k-1) - \mathbf{x}^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (34)$$

Как показано в [6], матрица $\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1})$ может быть получена произведением вектор-столбца $(\mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}))^T$ на этот же (не транспонированный) вектор-строку, деленным на квадрат его нормы. Поэтому для неортогональных \mathbf{x} и $\mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1})$ значение $\Delta e_d(k)$ положительно, и значение детерминированной составляющей ошибки восстановления истинного сигнала убывает с ростом k .

Рекурсивные выражения для стохастической и детерминированной составляющих ошибки восстановления вектора измерений \mathbf{y}_0 имеют вид

$$\begin{aligned} e_{y_g}(k) &= \text{trace}(\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{F}_{k-1}^+) + \\ &+ \text{trace}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}) - \\ &- 2 \text{trace}(\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} e_{y_d}(k) &= e_{y_d}(k-1) + \\ &+ 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{A}^T \mathbf{q}_k \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{q}_k^T \mathbf{A} - \\ &- 2 \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{q}_k \mathbf{A} + \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{q}_k \mathbf{A}) + \\ &+ \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_k) + \\ &+ (\mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \times \\ &\times (\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k + \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_k + \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_k). \end{aligned}$$

Экспериментально показана [7] положительность $\Delta e_d(k)$ и $\Delta e_s(k)$ для ошибки восстановления незашумленного вектора измерений при усреднении по реализациям случайных матриц.

Из рекурсивных выражений (33), (34) следует, что для ошибки восстановления \mathbf{x}

$$\Delta e_{x_d}(k) = \mathbf{x}^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x},$$

$$\Delta e_{x_g}(k) = \text{trace}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+). \quad (37)$$

Соответственно,

$$J_x(k) = \frac{\Delta e_{x_d}(k)}{\Delta e_{x_g}(k)} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^+ (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^+) \mathbf{x}}{\text{trace}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+)}. \quad (38)$$

Из рекурсивных выражений (35), (36) следует, что для ошибки восстановления \mathbf{y}_0

$$\begin{aligned} \Delta e_{y_g}(k) &= \text{trace}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}) - \\ &- 2\text{trace}(\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^{+T} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A}), \quad \Delta e_{y_d}(k) = \\ &= 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^+ (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^+) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (39)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} J_y(k) &= \frac{\Delta e_{y_d}(k)}{\Delta e_{y_g}(k)} = \\ &= \frac{2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^+ (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^+) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\text{trace}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}) - 2\text{trace}(\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^{+T} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A})}. \end{aligned} \quad (40)$$

Сопоставление выражений (38) и (40) говорит о том, что, в отличие от метода на основе сингулярного разложения, оптимальное значение k для ошибки решения ДНЗ с использованием случайного проецирования не совпадает с оптимальным значением k для ошибки восстановления вектора измерений. Для анализа положения минимумов ошибки восстановления \mathbf{x} и ошибки восстановления \mathbf{y}_0 для метода случайного проецирования экспериментально исследованы зависимости $J_x(k)$ и $J_y(k)$, что показало близость зависимостей для метода случайного проецирования (см. далее). Поскольку зависимости $J_x(k)$ и $J_y(k)$ и положения их минимумов близки, используем это для разработки КВМ.

КВМ для решения ДЗН методом случайного проецирования получен в [7] путем замены в (28) неизвестного вектора \mathbf{y}_0 на $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon}$ и усреднения по реализациям шума:

$$\begin{aligned} e_{y_Q} &= E\left\{ \left\| (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon}) \right\|^2 \right\} + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{F}_k^+), \end{aligned}$$

$$e_{y_Q} = E\left\| (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})\mathbf{y} \right\|^2 + E\left\| (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 -$$

$$\begin{aligned} - 2E\left\langle (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})\mathbf{y}, (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle + \\ + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{F}_k^+). \end{aligned}$$

Аппроксимация ошибки восстановления вектора измерений (28), полученная в результате усреднения по реализациям шума, имеет вид

$$\begin{aligned} CR_Q &= E\left\| (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})\mathbf{y} \right\|^2 - \\ &- \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\mathbf{F}_k^+ \mathbf{Q}_k^T - \mathbf{I})) + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{F}_k^+). \end{aligned} \quad (41)$$

На рис. 7 для задачи *Carasso* приведены графики зависимости значений критерия CR_Q средней ошибки восстановления выхода (e_{y_mean}) и средней ошибки восстановления истинного сигнала (e_{x_mean}) от k . Графики зависимостей критерия CR_Q и средней ошибки восстановления \mathbf{y}_0 близки, критерий выбора модели CR_Q хорошо аппроксимирует ошибку восстановления выхода \mathbf{y}_0 . Положения минимумов зависимости ошибки восстановления \mathbf{x} и ошибки восстановления \mathbf{y}_0 от k также близки.

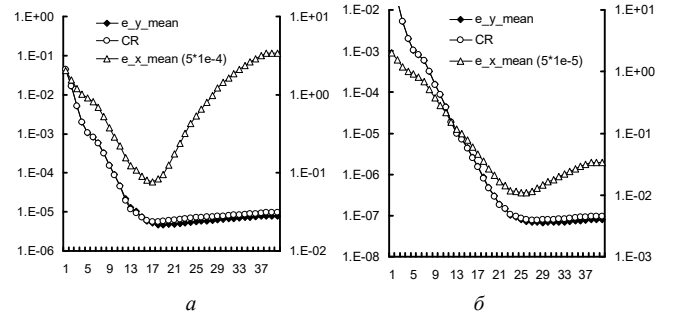


Рис. 7. Зависимости значений критерия CR и ошибки восстановления выхода от k : a – для уровня шума $5e-4$, b – для уровня шума $5e-5$

Эксперимент

Исследование проведено для ДНЗ *Carasso*, *Phillips*, *Delves*. В табл. 1 приведены результаты ДНЗ на основе сингулярного разложения для матрицы \mathbf{A} размерности 40×40 . Результаты (средние и с.к.о.) получены для трех уровней шума в \mathbf{y} при 100 реализациях на каждом уровне. Для определения оптимального количества компонент сингулярного разложения использованы критерии выбора модели:

Маллоуза (C_p), Акаике (AIC), минимальной длины описания (MDL) и CR_{svd} . Анализ результатов показал, что наименьшее значение ошибки решения обеспечивается при использовании критерия CR_{svd} .

В табл. 2 приведены результаты решения дискретных некорректных задач на основе случайного проецирования матрицей Q , размерность матрицы A составляла 40×40 . Приведенные результаты, получены для трех уровней шума в y при 100 реализациях на каждом уровне.

Анализ результатов показал, что использование критериев CR_Q и Акаике обеспечивает значение ошибки, близкое к минимальному.

В табл. 3 приведены результаты решения ДНЗ методом наименьших квадратов с использованием псевдообращения матрицы ($Pseudo-Inverse$), а также регуляризации Тихонова с поиском параметра регуляризации методами: перекрестной проверки ($Tikhonov GCV$), L -кривой ($Tikhonov LC$), невязки ($Tikhonov DSC$). Отметим, что методы перекрестной проверки и

Таблица 1. Среднее значение ошибки решения и его стандартное отклонение, среднее значение k и его стандартное отклонение для задач *Carasso*, *Phillips*, *Delves* при размерности матриц ядра 40×40 . Метод усеченного сингулярного разложения

Задача	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.
Phillips	$nl=1E-2$				$nl=1E-3$				$nl=1E-4$			
e	4,6E-3	1,38E-3	7,88	1,003	8,58E-4	1,99E-4	11,5	0,505	3,11E-4	3,38E-5	15,26	2,35
CR_{svd}	5,5E-3	2,53E-3	7,76	0,98	1,09E-3	4,33E-4	11,08	1,027	3,37E-4	7,22E-5	14,92	2,41
C_p	5,64E-3	3,11E-4	7	0	4,09E-3	1,79E-3	7,72	0,970	3,37E-4	1,71E-5	12	0
AIC	8,93E-3	8,74E-3	7,36	0,75	2,00E-3	2,23E-3	10,9	1,474	3,52E-4	5,05E-5	12,44	1,15
MDL	5,64E-3	3,11E-4	7	0	4,16E-3	1,78E-3	7,68	0,957	3,37E-4	1,71E-5	12	0
Carasso	$nl=1E-2$				$nl=1E-3$				$nl=1E-4$			
e	6,05E-1	1,70E-1	8,86	1,44	9,42E-2	2,03E-2	15,72	2,051	1,06E-2	3,16E-3	23,6	1,97
CR_{svd}	8,21E-1	2,64E-1	6,98	2,35	1,12E-1	3,02E-2	14,26	2,546	1,30E-2	5,02E-3	22,62	2,69
C_p	1,08	1,00E-1	2,9	0,30	1,83E-1	4,40E-2	9,84	0,422	2,31E-2	3,62E-3	17,18	0,438
AIC	1,03	4,34E-1	6,34	2,40	1,34E-1	1,87E-2	11,32	1,151	1,71E-2	2,10E-3	18,28	0,927
MDL	1,04	9,81E-2	3,9	1,34	1,49E-1	1,85E-2	10,4	0,495	7,93E-2	4,63E-2	13,44	3,163
Delves	$nl=1E-3$				$nl=1E-4$				$nl=1E-5$			
e	6,26E-2	1,14E-2	3,42	0,93	2,78E-2	3,19E-3	8,08	1,63	1,21E-2	1,18E-3	17,26	2,19
CR_{svd}	7,33E-2	1,96E-2	3,56	1,31	3,18E-2	6,02E-3	7,64	1,96	1,32E-2	1,78E-3	15,9	2,70
C_p	1,01E-1	2,44E-2	1,6	0,49	4,65E-2	4,93E-3	3,88	0,44	2,17E-2	1,36E-3	8,52	0,58
AIC	4,78E-1	1,41	3,34	1,83	4,31E-2	2,41E-2	6,76	1,64	1,53E-2	1,77E-3	12,92	1,70
MDL	8,38E-2	2,13E-2	2,3	0,51	4,05E-2	3,95E-3	4,58	0,54	2,19E-2	2,04E-3	8,5	0,84

Таблица 2. Среднее значение ошибки решения и его стандартное отклонение, среднее значение k и его стандартное отклонение для задач *Carasso*, *Phillips*, *Delves* при размерности матриц ядра 40×40 , метод случайного проецирования

Задача	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.
Phillips	$nl=1E-2$				$nl=1E-3$				$nl=1E-4$			
e_0	6,44E-3	1,56E-3	7,7	0,68	1,37E-3	5,14E-4	11,88	1,04	3,05E-4	3,84E-5	16,76	1,64
CR_Q	8,15E-3	5,85E-3	7,6	0,57	1,77E-3	1,07E-3	11,14	1,11	3,37E-4	6,02E-5	15,48	1,43
C_{p0}	7,60E-3	2,48E-3	7,2	0,64	4,66E-3	1,54E-3	8,2	0,81	5,46E-4	1,65E-4	12,34	1,19
AIC_Q	8,15E-3	5,85E-3	7,6	0,57	1,75E-3	7,80E-4	11	1,01	3,38E-4	5,02E-5	15,06	1,25
MDL_Q	7,30E-3	2,17E-3	7,26	0,63	4,58E-3	1,68E-3	8,22	0,84	6,28E-4	2,20E-4	11,92	1,05
Carasso	$nl=1E-2$				$nl=1E-3$				$nl=1E-4$			
e_0	7,69E-1	1,81E-1	6,86	2,00	9,85E-2	2,91E-2	15,34	1,85	1,50E-2	4,91E-3	21,7	1,93
CR_Q	1,04	3,80E-1	7,16	2,32	1,27E-1	5,10E-2	13,78	1,94	2,79E-2	2,05E-2	23,34	3,15
C_{p0}	1,06	1,41E-1	3,12	0,94	2,42E-1	1,05E-1	9,84	1,33	3,35E-2	1,86E-2	16,82	1,99
AIC_Q	1,07	3,21E-1	5,98	2,15	1,33E-1	4,11E-2	12,78	1,68	1,99E-2	5,89E-3	19,34	1,92
MDL_Q	1,00	1,34E-1	4,04	1,23	1,71E-1	6,62E-2	11,26	1,29	5,09E-2	3,68E-2	15,46	2,58
Delves	$nl=1E-3$				$nl=1E-4$				$nl=1E-5$			
e_0	6,95E-2	1,36E-2	3,3	0,953	3,20E-2	5,28E-3	6,68	1,45	1,24E-2	1,84E-3	16,14	2,14
CR_Q	1,91E-1	8,02E-1	2,48	0,91	6,49E-2	2,93E-2	9,04	1,64	1,67E-2	1,21E-2	15,34	2,58
C_{p0}	9,21E-2	2,50E-2	1,64	0,49	4,80E-2	9,14E-3	3,62	0,90	2,02E-2	3,89E-3	8,76	1,72
AIC_Q	1,91E-1	8,02E-1	2,48	0,91	6,43E-2	2,91E-2	8,6	1,83	1,46E-2	1,76E-3	12,72	2,03
MDL_Q	8,05E-2	1,86E-2	2,14	0,45	4,19E-2	8,01E-3	4,22	0,98	2,09E-2	4,39E-3	8,4	1,8364

Таблица 3. Среднее значение ошибки решения и его стандартное отклонение для задач *Carasso*, *Phillips*, *Delves* при размерности матрицы ядра 40×40 , метод регуляризации Тихонова

Задача	$M(err)$	с.к.о.	$M(err)$	с.к.о.	$M(err)$	с.к.о.
Carasso	$nl = 1E-2$		$nl = 1E-3$		$nl = 1E-4$	
<i>PseudoInverse</i>	1404,042	473,0003	14,04042	4,730003	0,140404	0,0473
<i>Tikhonov GCV</i>	129,6115	380,2707	2,027807	4,882454	0,050377	0,045534
<i>Tikhonov LC</i>	1373,342	512,4452	13,84332	5,091144	0,140368	0,047283
Tikhonov DSC	0,692184	0,165216	0,114613	0,030601	0,013329	0,003951
Phillips	$nl = 1E-3$		$nl = 1E-4$		$nl = 1E-5$	
<i>PseudoInverse</i>	160,0434	120,3506	1,600594	1,203584	0,016199	0,012044
<i>Tikhonov GCV</i>	4,557545	11,79132	0,04597	0,116915	0,001043	0,0017
<i>Tikhonov LC</i>	1,454624	1,856999	0,098596	0,097598	0,001234	0,001006
Tikhonov DSC	0,001115	0,000328	0,000299	3,30E-05	0,000205	5,25E-06
Delves	$nl = 1E-3$		$nl = 1E-4$		$nl = 1E-5$	
<i>PseudoInverse</i>	3490,266	1109,165	34,90266	11,09165	0,349027	0,110917
<i>Tikhonov GCV</i>	22,24972	122,4749	0,442406	1,754381	0,027332	0,034129
<i>Tikhonov LC</i>	0,062229	0,014573	0,039162	0,015731	0,015842	0,003792
Tikhonov DSC	0,062875	0,015669	0,029327	0,004625	0,012666	0,001632

L -кривой не используют априорной информации о шуме, в то время как метод невязки требует оценки нормы возмущения y . В экспериментах, результаты которых приведены в табл. 3, в методе невязки использована информация о норме вектора шума $\|e\|$ (именно того вектора шума, посредством которого моделировалось возмущение правой части). Анализ результатов показал, что регуляризация Тихонова с поиском параметра регуляризации по методу невязки обеспечивает наилучшую точность.

Сравнительный анализ точности решения ДНЗ методами регуляризации Тихонова (табл. 3), усеченного сингулярного разложения (см. табл. 1) и на основе случайного проецирования (см. табл. 2) показал, что метод усеченного сингулярного разложения с критерием CR_{svd} и метод на основе случайного проецирования с критериями CR_Q и AIC обеспечивают точность на уровне регуляризации Тихонова с поиском параметра регуляризации методом невязки.

На рис. 8–10 для метода случайного проецирования матрицами Q ($e_x_Q_mean$) и R ($e_x_R_mean$), а также для метода усеченного сингулярного разложения приведены графики зависимостей ошибки восстановления вектора x , соответственно, от числа количества строк матрицы проектора и от числа компонент сингулярного разложения.

Анализ зависимостей на рис. 8–10 показывает, что ошибка восстановления x для метода случайного проецирования матрицей Q и для метода усеченного сингулярного разложения близки, и, как следствие, методы обеспечивают близкую точность при $k = k_{opt}$. Ошибка восстановления x для метода случайного проецирования матрицей R (в сравнении с ошибкой при проецировании матрицей Q) отстоит несколько дальше от ошибки метода усеченного сингулярного разложения, однако также обеспечивает близкую точность.

Результаты экспериментального исследования зависимостей $J_x(k)$, $J_y(k)$ для решения дискретной некорректной задачи методом случайного проецирования приведены на рис. 11. При их построении проводилось усреднение по 500 реализациям матрицы Q .

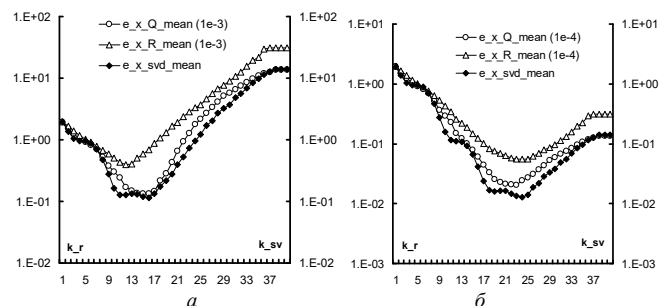


Рис. 8. Зависимости значений ошибки восстановления входа от k для задачи *Carasso*: a – при уровне шума $1e-3$, b – при уровне шума $1e-4$

Из рис. 11 видно, что при решении дискретной некорректной задачи методом случайного проецирования близки зависимости $J_x(k)$ и $J_y(k)$ для ошибки восстановления x и y_0 , а значит, близки и положения (т.е. k) минимумов зависимостей ошибки x и y_0 от k . Это позволяет использовать ошибку восстановления y_0 и соответствующий критерий выбора оптимальной размерности матрицы Q для определения минимума ошибки восстановления x . Отметим, что, как следует из анализа зависи-

мостей $J_x(k)$ и $J_y(k)$, для метода на основе случайного проецирования графики зависимостей $J_x(k)$, $J_y(k)$ для исследованных задач существенно более гладки.

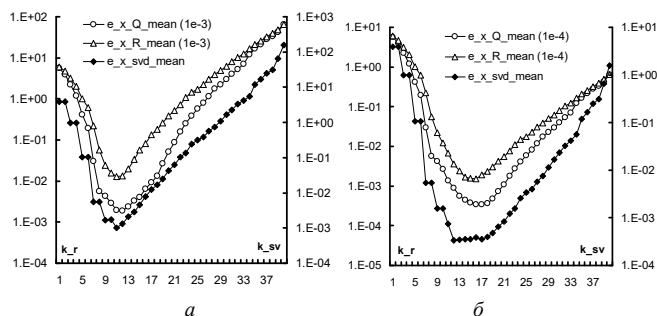


Рис. 9. Зависимости значений ошибки восстановления входа от k для задачи *Phillips*: a – при уровне шума $1e-3$, b – при уровне шума $1e-4$

Для задачи *Carasso* (см. рис. 11, b) наличие локальных минимумов возможно только при уровнях шума $0,03-0,01$. Во всем остальном диапазоне шумов зависимости $J_x(k)$ и $J_y(k)$ для данной задачи не имеет возрастающих участков, а значит, минимум зависимости ошибки от k – единственный.

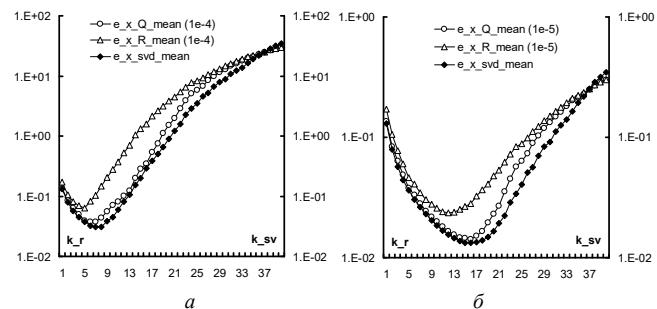


Рис. 10. Зависимости значений ошибки восстановления входа от k для задачи *Delves*: a – при уровне шума $1e-4$; b – при уровне шума $1e-5$

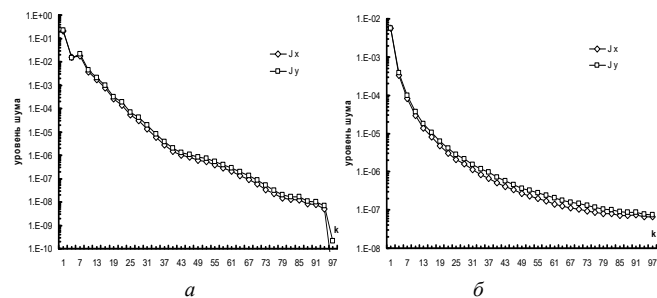


Рис. 11. Зависимости $J_x(k)$, $J_y(k)$ при решении ДНЗ методом случайного проецирования для задач: a – *Carasso*; b – *Delves*

Заключение. В статье дан сравнительный анализ и результаты экспериментального исследования таких методов устойчивого решения ДНЗ, как регуляризация Тихонова, усеченное сингулярное разложение, случайное проецирование.

Исследование точности решения ДНЗ на основе усеченного сингулярного разложения с поиском оптимального решения по критериям выбора модели Маллоуза, Акаике, минимальной длины описания и CR_{SVD} показало, что наименьшее значение ошибки решения обеспечивается при использовании критерия CR_{SVD} .

Исследование точности решения ДНЗ на основе случайного проецирования показало, что использование критериев CR_Q и Акаике обеспечивает значение ошибки, близкое к минимальному.

Сравнительный анализ точности решения ДНЗ методами регуляризации Тихонова, усеченного сингулярного разложения и на основе случайного проецирования показал, что метод усеченного сингулярного разложения с критерием CR_{SVD} и метод на основе случайного проецирования с критериями CR_Q и AIC обеспечивают точность на уровне регуляризации Тихонова с поиском параметра регуляризации методом невязки.

Преимущество метода случайного проецирования относительно метода на основе сингулярного разложения состоит в меньшей вычислительной сложности [5] в связи с уменьшением размерности результирующей матрицы ($N \times k$) после проецирования относительно исходной матрицы ($N \times N$) и соответствующих затрат на выполнение *SVD*.

Целью дальнейших исследований будет снижение вычислительной сложности получения решения и усреднение по реализациям случайной матрицы.

Приложение 1

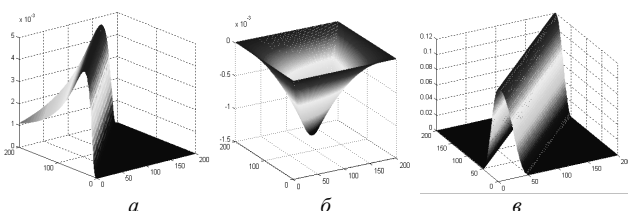


Рис. П.1.1. Матрица A для задачи: a – *Carasso*, b – *Delves*, v – *Phillips*

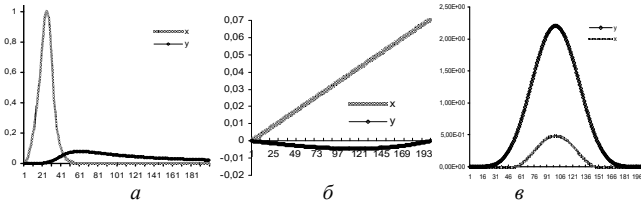


Рис. П.1.2. Дискретно заданные сигнал \mathbf{x} и правая часть \mathbf{y} в задаче: a – Carasso, b – Delves, c – Phillips

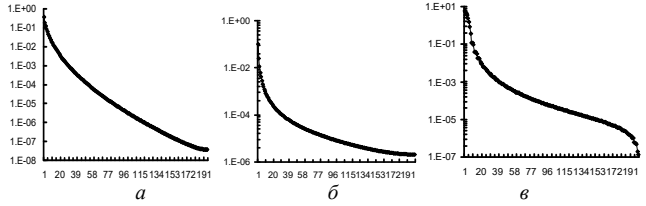


Рис. П.1.3. Сингулярные значения в задаче: a – Carasso, b – Delves, c – Phillips

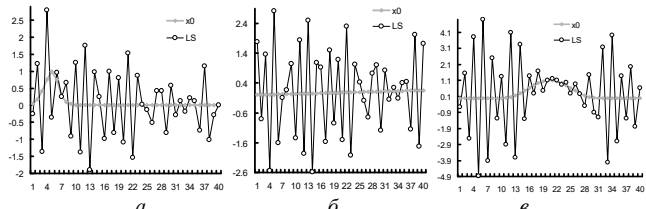


Рис. П.1.4. Решение МНК для задач: a – Carasso, b – Delves, c – Phillips. x_0 – истинный сигнал, LS – оценка сигнала \mathbf{x} по МНК

Приложение 2

В методе L -кривой строится график $\|\mathbf{x}_{reg}\|_2$ от $\|\mathbf{Ax}_{reg} - \mathbf{y}\|_2$ для допустимых значений параметра регуляризации. Вертикальную и горизонтальную части кривой разделяет выраженный угол. В качестве оптимального выбирается параметр регуляризации, соответствующий точке вблизи от угла L -кривой.

Методом невязки предлагается выбирать параметры регуляризации так, чтобы норма остатка для регуляризованного решения удовлетворяла $\|\mathbf{Ax}_{reg} - \mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{d}\|_2$, где \mathbf{d} есть возмущение правой части (шум), и, следовательно, требуется оценка $\|\mathbf{d}\|_2$.

Выбор параметра регуляризации в методе перекрестной проверки (кросс-валидации) осуществляется путем минимизации функции $G(\lambda) = \frac{\|\mathbf{Ax}_{reg} - \mathbf{y}\|_2^2}{\text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{AA}^1)^2}$, где \mathbf{A}^1 – матрица, с помощью которой получают регуляризованное решение $\mathbf{x}_{reg} = \mathbf{A}^1 \mathbf{y}$.

На рис. П.2.1 и П.2.2 приведены примеры неустойчивого решения задачи Phillips с использованием методов перекрестной проверки и L -кривой; на рис. П.2.3 и П.2.4 – пример $G(\lambda)$ и L -кривой для них.

В данном примере неустойчивость решения, полученного методом перекрестной проверки, связана с тем,

что функция $G(\lambda)$ (рис. П.2.4) имеет не единственный минимум. Неустойчивость решения, полученного методом L -кривой (см. рис. П.2.3), связана с тем, что вследствие высокого уровня шума в векторе правой части угол L -кривой не достаточно выражен, и параметр регуляризации определяется некорректно.

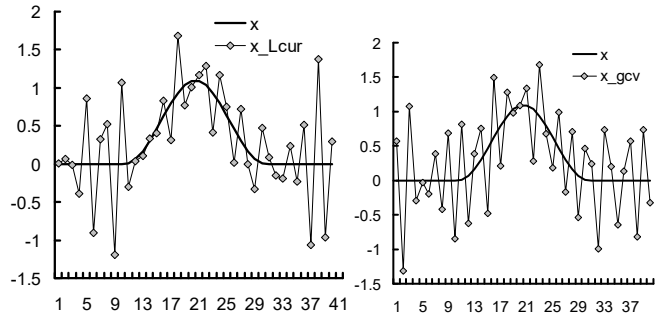


Рис. П.2.1. Пример неустойчивого решения задачи Phillips методом L -кривой

Рис. П.2.2. Пример неустойчивого решения задачи Phillips методом перекрестной проверки

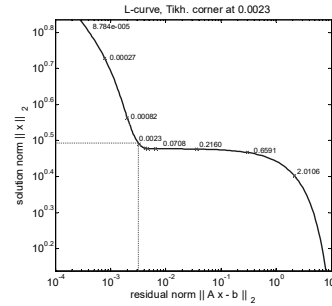


Рис. П.2.3. Вид L -кривой, ведущей к неустойчивому решению

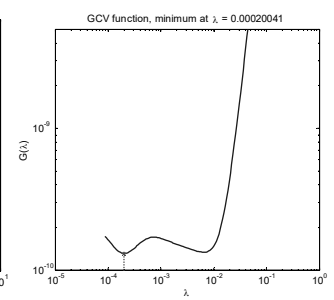


Рис. П.2.4. Вид функции $G(\lambda)$, ведущей к неустойчивому решению

Приложение 3

Выше отмечено, что детерминированная составляющая ошибки убывает, а стохастическая возрастает с ростом k , поэтому Δe_d и Δe_s – положительны (если $\Delta e = 0$ для k и $k+1$, в качестве $k+1$ можно использовать то значение k , где $\Delta e > 0$).

Используя начальные значения составляющих ошибки $e_d(1)$, $e_g(1)$ и значения $\Delta e_d(k)$, $\Delta e_s(k)$ для моделей размерности от единицы до k , запишем выражения для значений составляющих ошибки $e_d(k)$, $e_g(k)$ в виде

$$e_d(k) = e_d(1) - \Delta e_d(1) - \Delta e_d(2) - \dots - \Delta e_d(k), \quad (\text{П.3.1})$$

$$e_g(k) = e_g(1) + \Delta e_g(1) + \Delta e_g(2) + \dots + \Delta e_g(k). \quad (\text{П.3.2})$$

Поэтому

$$e(k) - e(k-1) = -\Delta e_d(k) + \sigma^2 \Delta e_g(k),$$

$$e(k+1) - e(k) = -\Delta e_d(k+1) + \sigma^2 \Delta e_g(k+1). \quad (\text{П.3.3})$$

Условие наличия минимума при размерности модели k перепишем как

$$\sigma^2 \Delta e_g(k) - \Delta e_d(k) < 0, \quad (\text{П.3.4})$$

$$\sigma^2 \Delta e_g(k+1) - \Delta e_d(k+1) > 0. \quad (\text{П.3.5})$$

Из неравенства (П.3.4) следует, что $\sigma^2 \Delta e_g(k) < \Delta e_d(k)$, т.е. $\sigma^2 < \frac{\Delta e_d(k)}{\Delta e_g(k)}$, а из неравенства (П.3.5), что $\sigma^2 \Delta e_g(k+1) > \Delta e_d(k+1)$, т.е. $\sigma^2 > \frac{\Delta e_d(k+1)}{\Delta e_g(k+1)}$.

Приложение 4

Рассмотрим результаты экспериментов для задач *Carasso* и *Delves*, для которых были рассчитаны зависимости $J_x(k)$, $J_y(k)$, полученные методом усеченного сингулярного разложения (см. рис. П.4.1, а и П.4.2, а), а также зависимости ошибок восстановления входа и выхода от k при заданном уровне гауссова шума с нулевым средним и дисперсией σ^2 (рис. П.4.1, б и П.4.2, б).

Линия, параллельная оси абсцисс, соответствует определенному уровню шума. Как видно из рис. П.4.1, а и П.4.2, а, $J_x(k)$ и $J_y(k)$ совпадают для обеих задач. Следовательно, и минимумы значений ошибки восстановления входа и выхода совпадают.

Для задачи *Delves* зависимости $J_x(k)$ и $J_y(k)$ монотонно убывают. Поэтому зависимости ошибки восстановления входа и выхода будут иметь единственный минимум.

Поскольку для задачи *Carasso* характер убывания зависимостей $J_x(k)$ и $J_y(k)$ не монотонный, зависимости ошибки восстановления входа и выхода для определенных уровней шума будут иметь как глобальный минимум, так и локальные. Проведем на графике зависимостей $J_x(k)$, $J_y(k)$ (см. рис. П.4.1, а) линию, параллельную оси абсцисс и соответствующую уровню шума $1e-3$. Число пересечений данной линии с убывающими (в силу (14)) участками графика соответствует количеству минимумов зависимости ошибки от k при данном уровне шума, так как каждое пересечение соответствует попаданию значения шума в определенный интервал.

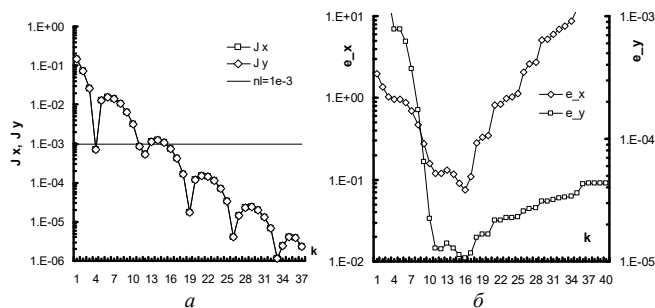


Рис. П.4.1. Решение задачи *Carasso* методом усеченного сингулярного разложения: а – зависимость J_x , J_y от размерности модели k ; б – зависимость ошибок восстановления входа и выхода от k , уровень шума $1e-3$

При решении задачи *Carasso* графики зависимостей $J_x(k)$, $J_y(k)$ трижды пересекаются линией уровня шума $1e-3$ (см. рис. П.4.1, а). Построенные для этого уровня шума зависимости ошибки входа и выхода от k (см. рис. П.4.1, б) имеют три минимума при размерностях модели: $k = 4$, $k = 11$, $k = 16$.

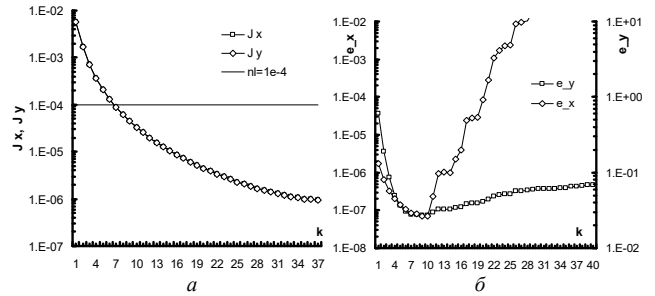


Рис. П.4.2. Решение задачи *Delves* методом усеченного сингулярного разложения: а – зависимость J_x , J_y от размерности модели k ; б – зависимость ошибок восстановления входа и выхода от k , уровень шума $1e-4$

1. Хмелевский В.К., Бондаренко В.М. Электроразведка. – М.: Недра, 1999. – 438 с.
2. Забулонов Ю.Л., Коростиль Ю.М., Ревунова Е.Г. Оптимизация решения обратной задачи по восстановлению функции плотности распределения поверхностных загрязнений // Сб. научн. тр. ИПМЭ НАН Украины «Моделирование и информационные технологии». – 2006. – С. 77–83.
3. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Intelligent Gamma-Ray Data Processing for Environmental Monitoring // Intel. data analysis in global monitoring for environmental and security. – 2009. – P. 124–145.
4. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems // Int. J. Inform. Theor. and Appl. – 2009. – 16, N 2. – P. 176–192.
5. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Randomized method for solving discrete ill-posed problems // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – 48, N 4. – P. 621–635.
6. Revunova E.G. Analytical study of the error components for the solution of discrete ill-posed problems using random projections // Ibid. – 2015 – 51 – Issue 6 – P. 978–991.
7. Revunova E.G. Model Selection Criteria for a Linear Model to Solve Discrete Ill-posed Problems on the Basis of Singular Decomposition and Random Projection // Ibid. – 2016 – 52, N 4. – P. 647–664.
8. Revunova E.G., Tyshchuk A.V. A Model Selection Criterion for Solution of Discrete Ill-Posed Problems Based on the Singular Value Decomposition // The 7th Int. Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2015), Kyiv–Zhukyn on July 20–24, 2015. – P. 43–47.
9. Ревунова Е.Г., Тишук А.В. Критерий выбора модели для решения дискретных некорректных задач на основе сингулярного разложения // УСИМ. – 2014. – № 6. – С. 3–11.
10. Hansen P.C. The truncated SVD as a method for regularization. BIT 27, 1987. – P. 534–553.
11. Hansen P.C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical Aspects of Linear Inversion. – SIAM, Philadelphia, 1998. – 247 p.
12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solution of ill-posed problems. – V.H. Winston, Washington, 1977. – 231 p.

13. Carasso A.S. Determining surface temperatures from interior observations // SIAM J. Appl. Math. – 1982. – N 42. – P. 558–574.
14. Delves L.M., Mohamed J.L. Computational methods for integral equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 388 p.
15. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of integral equation of the first kind // J. ACM. – 1962. – N 9. – P. 84–97.
16. Hansen P.C. Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // Numer. Algorithms. – 1994. – 6. – P. 1–35.
17. Hansen P.C., O'Leary D.P. The use of L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems // SIAM J. Sci. Comput. – 1993. – 14. – P. 1487–1503.
18. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 239 с.
19. Golub G.H., Heath M., Wahba G., Generalised cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. Technometrics. – 1979. – 21 (2). – P. 215–223.
20. Chan T.F., Hansen P.C. Some applications of the rank revealing QR factorization // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1992. – N 13. – P. 727–741.
21. Chan T.F., Hansen P.C. Low-rank revealing QR factorizations // Numer Linear Algebra Appl. – 1994. – N 1. – P. 33–44.
22. Ивахненко А.Г., Степанко В.С. Помехоустойчивость моделирования. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
23. Степанко В.С. Теоретические аспекты МГУА как метода индуктивного моделирования разложения // УСиМ. – 2003. – № 2. – С. 31–38.
24. Belloni A., Chernozhukov V. Least Squares after Model Selection in High-Dimensional Sparse Models. – Bernoulli, 2013.
25. Mohsen Bayati, Murat A. Erdogan, Andrea Montanari. Estimating LASSO Risk and Noise Level // NIPS 2013, Proc. of Advances in Neural Information Processing Syst. – Т. 19. – N 2. – P. 512–547.
26. Fan J., Guo S., Hao N. Variance estimation using refitted cross-validation in ultrahigh dimensional regression // J. of the Royal Stat. Society: Series B (Statistical Methodology). – 2012. – 74. – P. 1467–9868.
27. Fedorov V.V. Theory of optimal experiments. – New York: Acad. Press., 1972.
28. Adaptive neural network classifier with multfloat input coding / E.M. Kussul, T.N. Baidyk, V.V. Lukovich et al. // Proc. Neuro-Nimes'93. – 1993. – P. 209–216.
29. Lukovich V.V., Goltsev A.D., Rachkovskij D.A. Neural Network Classifiers for Micromechanical Equipment Diagnostics and Micromechanical Product Quality Inspection // Proc. EUFIT'97. – 1997. – 1. – P. 534–536.
30. Application of random threshold neural networks for diagnostics of micro machine tool condition / E.M. Kussul, L.M. Kasatkina, D.A. Rachkovskij et al. // Neural Networks Proc., 1998. IEEE World Congr. on Comp. Intel. – 1998. – 1. – P. 241–244.
31. Properties of numeric codes for the scheme of random subspaces RSC / D.A. Rachkovskij, S.V. Slipchenko, E.M. Kussul et al. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2005. – 41, N 4. – P. 509–520.
32. Rachkovskij D.A., Misuno I.S., Slipchenko S.V. Randomized projective methods for construction of binary sparse vector representations // Jbid. – 2012. – 48, N 1. – P. 146–156.
33. Neural distributed representation for intelligent information technologies and modeling of thinking / V.I. Gritsenko, D.A. Rachkovskij, A.D. Goltsev et al. // Cybernetics and Computer Engineering. – 2013. – 173. – P. 7–24.
34. Stewart G.W. On the perturbation of pseudo-inverses, projections and linear least squares problems // SIAM Review. – 1977. – 19, N 4. – P. 634–662.

Поступила 09.04.2015

Тел. для справок: +38 044 502-6341 (Киев)

E-mail: helab@i.com.ua

© Е.Г. Ревунова, 2016

UDC 004.942 + 623.454.862

E.G. Revunova

Recovering Signals Obtained by Indirect Measurements Based on Truncated Singular Value Decomposition and Random Projection

Keywords: discrete ill-posed problem, regularization, truncated singular value decomposition, random projection.

Introduction. The solution of the ill-posed inverse problem by the least squares method is unstable with a large solution error. Tikhonov regularization, truncated singular value decomposition, and random projection were used to overcome the instability and to increase the accuracy of the solution.

Purpose. We provide an experimental comparison of the solution accuracy for the ill-posed inverse problem by Tikhonov regularization, truncated singular value decomposition, and random projection.

Methods. Tikhonov's regularization imposes some restrictions on the solution, i.e. penalty on its Euclidean norm, that improves stability. Another approach approximates the original data by a model linear with respect to parameters. Selection of the optimal number of components of the linear model minimizes the error of solution and ensures stability. To obtain the optimal number of components, model selection criteria are used.

Results and Conclusion. A comparative analysis of the accuracy shows that the truncated singular value decomposition method with the CR_{SVD} criterion and the random projection method with the CR_Q and AIC criteria ensured the accuracy at the level of Tikhonov regularization with the regularization parameter selected by the discrepancy method. The advantage of the random projection method is a lower computational complexity due to the dimensionality reduction.

Perspective. The directions for further research include the decreasing of the computational complexity and averaging over the realizations of the random matrix.