

С.А. Багирова

## Анализ системы обслуживания–запасания с мгновенным обслуживанием и переменным объемом заказов

Исследована модель системы, в которой расходующие заявки могут образовывать источник повторных заявок – конечных или бесконечных. Разработаны точный и приближенный методы для определения характеристик изучаемой системы. Приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** системы обслуживания–запасания, мгновенное обслуживание, переменный объем заказа

Вивчено модель системи, в якій витрачальні вимоги можуть утворювати джерело повторних вимог – скінченних або нескінченних. Розроблено точний і наближений методи для визначення характеристик системи, що вивчається. Подано результати числових експериментів.

**Ключові слова:** системи обслуговування–запасання, миттєве обслуговування, змінний обсяг замовлень.

**Введение.** В последние десятилетия интенсивно исследуются модели систем обслуживания–запасания (СОЗ) при различных допущениях относительно схемы обслуживания расходующих заявок (далее – заявок), политики пополнения запасов (ППЗ) и времени доставки заказанных запасов [1–3]. Достаточно подробный обзор известных результатов в данном направлении можно найти в работах [4, 5].

### Актуальность

Анализ литературы показал, что почти не исследованы модели СОЗ, в которых объемы заказов являются переменными величинами, зависящими от текущего уровня запасов системы. Лишь в недавней работе [6] изучена подобная модель управления запасами, но в ней не учтено наличие станции обслуживания, т.е. изучаемая модель не есть моделью системы обслуживания–запасания. Отметим, что, с одной стороны, изучение моделей СОЗ с переменным объемом заказов представляет определенный теоретический интерес, так как они в ряде случаев обобщают известные ППЗ; а с другой, – с практической точки зрения использование таких ППЗ расширяет область определения подлежащей политике, которая в свою очередь позволяет повысить эффективность работы системы.

Исходя из сказанного, в данной статье предложен новый класс ППЗ, основанной на переменном объеме заказов, и предложены точный и приближенный методы расчета характеристик одной модели СОЗ. Для конкретности из-

ложения рассмотрена модель СОЗ с мгновенным обслуживанием и повторными заявками.

### Модель

Максимальный размер склада изучаемой СОЗ равен  $S, 0 < S < \infty$ . В эту систему поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Рассматривается модель с мгновенным обслуживанием заявок. Это означает, что в системе невозможно образование очереди. Вместе с тем, неудовлетворенные заявки (*backlog customers*), т.е. первичные заявки (*p-заявки*), поступившие в моменты отсутствия запасов системы, окончательно не утрачиваются, а образуют орбит – источник повторных заявок (*r-заявки*). При этом, если в момент поступления *p-заявки* в системе отсутствуют запасы, то она либо с вероятностью  $H_p > 0$  уходит в орбит для повторения запроса либо с дополнительной вероятностью  $1 - H_p$  окончательно уходит из системы.

Времена пребывания в орбите *r-заявок* независимы друг от друга случайными величинами (с.в.) с общей показательной функцией распределения (ф.р.) с конечным параметром  $\eta, 0 < \eta < \infty$ . После завершения времени пребывания в орбите *r-заявки* независимо одна от другой повторяют запросы. При этом, если в момент поступления *r-заявки* на складе имеется хотя бы одна единица запаса, то она мгновенно обслуживается и уходит из орбита; иначе *r-заявка* либо с вероятностью  $H_r > 0$  покидает орбит, либо с дополнительной вероятностью

1 –  $H_r$  остается там для дальнейшего повторения своего запроса.

Каждая заявка (первичная или повторная) требует запас единичного размера, т.е. после обслуживания заявки любого типа уровень запасов системы уменьшается на единицу.

В данной статье рассмотрены модели с ограниченным и неограниченным размером орбита для повторных заявок. В случае модели с неограниченным размером орбита любая  $p$ -заявка принимается в орбит, однако в модели с ограниченным размером орбита максимальное  $r$ -число заявок в нем может быть равно  $R$ ,  $R < \infty$ . Если  $p$ -заявка поступила в орбит в момент, когда в нем уже имеются  $R$  заявок, то она утрачивается.

Политика пополнения запасов определяется следующим образом. Отпуск запасов по заявкам продолжается, пока склад системы не опустеет. Определяется некоторая пороговая величина  $s$ ,  $s < S$ , и если уровень запасов на складе выше этой величины, то система не делает заказов для их пополнения; а когда текущий уровень запасов системы  $m$  становится меньшим или равным величине  $s$ , отправляется заказ на вышестоящий склад на поставку запасов объема  $d_s(m)$ , при этом, очевидно, выполняется соотношение  $0 < d_s(m) \leq S - m$ . Эту ППЗ назовем политикой переменного объема заказа (*Variable Size of Order – VSO*).

Величина заказываемого запаса  $d_s(m)$  определяется так:

$$d_s(m) = \begin{cases} S - m, & \text{если } m \leq s, \\ 0, & \text{если } m > s. \end{cases} \quad (1)$$

Соотношение (1) означает, что когда уровень запасов опускается до величины  $m$ , делается заказ такого объема, чтобы заполнить склад системы. Сделанный заказ выполняется с некоторой задержкой, при этом для общности здесь предполагается, что указанная задержка имеет показательную ф.р. с параметром  $\nu_n(m)$ , который в общем случае зависит от текущего уровня запасов  $m$  на складе системы,  $m = 0, 1, \dots, s$ , и числа  $r$ -заявок в орбите,  $n = 0, 1, \dots, R$ .

Задача исследования состоит в определении совместного распределения уровня запасов системы и числа заявок в орбите. Решение этой задачи позволяет вычислить характеристики изучаемых СОЗ: средний уровень запасов на складе ( $S_{av}$ ), вероятности потери  $p$ -заявок ( $P_p$ ) и  $r$ -заявок ( $P_r$ ), а также среднее число  $r$ -заявок в орбите ( $L_o$ ).

### Методы расчета

Рассмотрим модель с ограниченным размером орбита. Работа данной модели описывается двумерной конечной ЦМ с состояниями вида  $(m, n)$ , где  $m$  означает уровень запасов системы, а  $n$  указывает число  $r$ -заявок в орбите. Фазовое пространство состояний (ФПС) определяется так:

$$E = \{(m, n) : m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots, R\}. \quad (2)$$

Интенсивность перехода из состояния  $(m_1, n_1) \in E$  в другое состояние  $(m_2, n_2) \in E$  обозначим как  $q((m_1, n_1), (m_2, n_2))$ . Для вычисления элементов  $Q$ -матрицы данной двумерной ЦМ необходимо учитывать, что переходы между состояниями ФПС (2) связаны со следующими событиями: поступлением  $p$ -заявок, уходом  $p$ -заявок в орбит, поступлением  $r$ -заявки с орбита и поступлением запасов со склада верхнего уровня.

Исходя из принятой ППЗ, необходимо различать следующие случаи для исходного состояния  $(m_1, n_1) \in E$ :  $m_1 > s$ ;  $0 < m_1 \leq s$ ;  $m_1 = 0$ .

С учетом принятой схемы обслуживания заявок, их ухода в орбит и возвращения из него, а также предложенной политики пополнения запасов, получим, что элементы  $Q$ -матрицы данной модели определяются так (рис. 1):

случай  $m_1 > s$ :

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1, \\ n_1 \eta, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (3)$$

случай  $0 < m_1 \leq s$ :

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1, \\ n_1 \eta, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1, \\ v_{n_1}(m_1), & \text{если } m_2 = S, n_2 = n_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (4)$$

случай  $m_1 = 0$ :

$$q((0, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda H_p, & \text{если } m_2 = 0, n_2 = n_1 + 1, \\ n_1 \eta H_r, & \text{если } m_2 = 0, n_2 = n_1 - 1, \\ v_{n_1}(0), & \text{если } m_2 = S, n_2 = n_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

С учетом соотношений (3) – (5) получим, что все состояния этой конечной двумерной ЦМ – сообщающиеся (см. рис. 1), следовательно, в этой системе существует стационарный режим, т.е. существуют стационарные вероятности состояний  $(m, n) \in E$ .

Стационарную вероятность состояния  $(m, n) \in E$  обозначим через  $p(m, n)$ . Эти величины в

результате решения СУР выглядят так:

$$\begin{aligned} & (\lambda I(m > 0) + \lambda H_p I(m = 0) + n \eta I(m > 0) + \\ & + n \eta H_r I(m = 0) + v_n(m) I(m \leq s)) p(m, n) = \\ & = \lambda p(m + 1, n) + (n + 1) \eta p(m + 1, n + 1) + \\ & + \sum_{i=0}^s v_n(i) p(i, n) I(m = S). \end{aligned} \quad (6)$$

Эта система уравнений дополняется условием нормировки:

$$\sum_{(m,n) \in E} p(m, n) = 1. \quad (7)$$

Поиск стационарных вероятностей состояний позволяет вычислить характеристики исследуемой системы. Действительно, используя результаты работ [4, 5], можно показать, что искомые величины определяются так:

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^R p(m, n); \quad (8)$$

$$L_o = \sum_{n=1}^R n \sum_{m=0}^S p(m, n). \quad (9)$$

$$P_p = p(0, N) + (1 - H_p) \sum_{n=0}^{R-1} p(0, n). \quad (11)$$

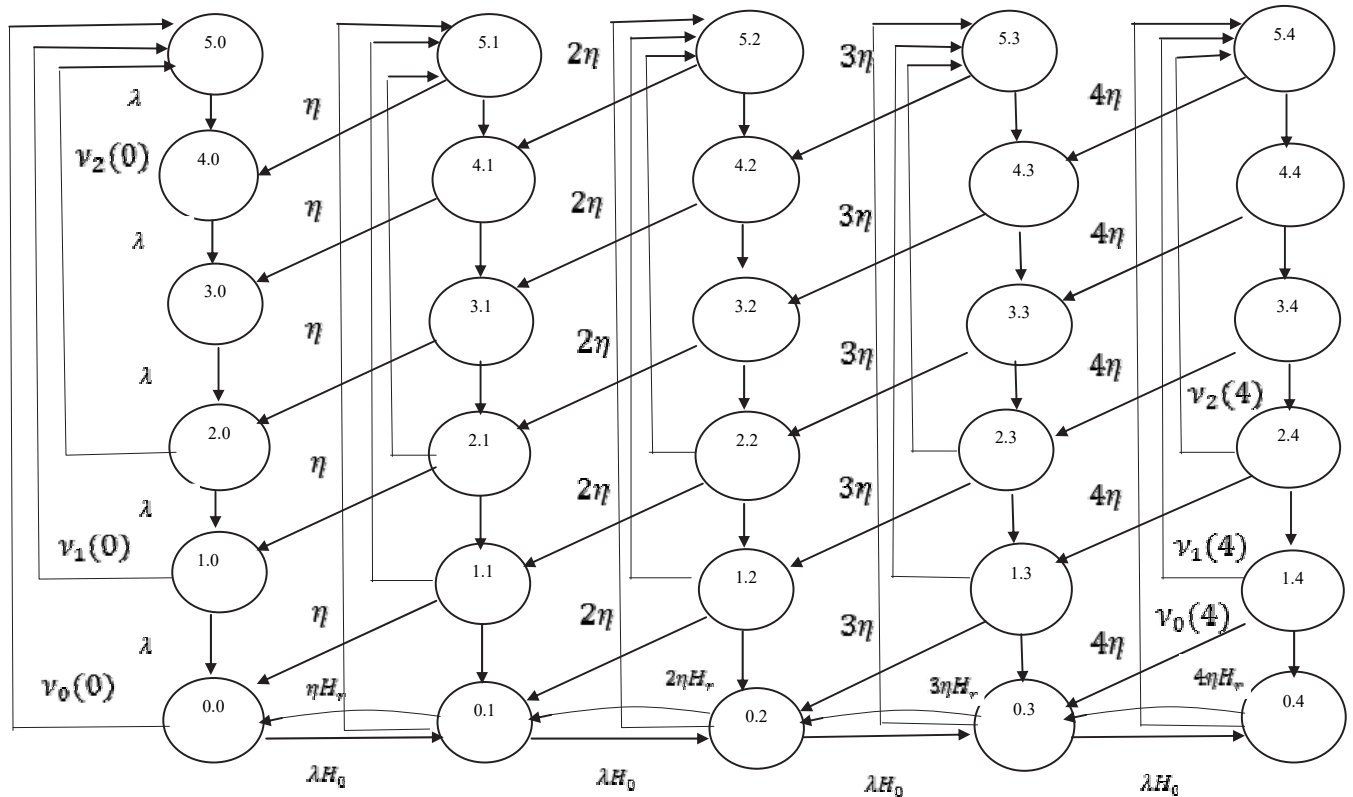


Рис. 1. Граф переходов между состояниями исходной модели

$$P_r = H_r \sum_{n=1}^R p(0, n). \quad (12)$$

Следовательно, проблема состоит в определении стационарных вероятностей состояний из СУР (6), (7). В этой связи отметим, что указанная СУР имеет матрицу сложной структуры, и потому не удалось найти ее аналитическое решение, т.е. возникает необходимость использования стандартных численных методов теории марковских процессов. Указанные методы – работоспособны для моделей умеренной размерности и становятся бесполезными для моделей большой размерности.

Далее предложен приближенный метод расчета стационарного распределения данной модели, где использован подход, разработанный в [4, 5].

Этот метод имеет высокую точность для моделей СОЗ, в которых интенсивность  $p$ -заявок намного превосходит интенсивности  $r$ -заявок. При выполнении данного допущения рассмотрим следующее расщепление исходного ФПС (2):

$$E = \bigcup_{n=0}^R E_n, \quad E_n \cap E_{n'} = \emptyset, \quad n \neq n', \quad (13)$$

где  $E_n = \{(m, n) \in E : m = 0, 1, \dots, S\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, R$ . Иными словами, класс состояний  $E_n$  содержит те состояния  $(m, n)$  из исходного ФПС (2), в которых число  $r$ -заявок в орбите равно  $n$  независимо от уровня запасов системы. Далее в исходном ФПС (2) определяется следующая функция укрупнения:

$$U((m, n)) = \langle n \rangle, \quad (14)$$

где  $\langle n \rangle$  означает укрупненное состояние, объединяющее в себе класс состояний  $E_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, R$ . Обозначим  $\Omega = \{\langle n \rangle : n = 0, 1, \dots, R\}$ .

Через  $\rho_n(m)$  обозначается вероятность состояния  $(m, n)$  внутри расщепленной модели с пространством состояний  $E_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, R$ . Тогда из соотношений (3) – (5) получим, что эти вероятности вычисляются так:

$$\rho_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^m} \prod_{i=1}^m (v_n(i-1) + \lambda) \rho_n(0), & \text{если } 1 \leq m \leq s+1, \\ \frac{1}{\lambda^{s+1}} \prod_{i=1}^{s+1} (v_n(i-1) + \lambda) \rho_n(0), & \text{если } s+1 < m \leq S, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\rho_n(0)$  находим из условия нормировки, т.е.

$$\sum_{m=0}^S \rho_n(m) = 1.$$

Укрупненная модель описана процессом размножения и гибели. Интенсивность перехода из укрупненного состояния  $\langle n_1 \rangle$  в другое укрупненное состояние  $\langle n_2 \rangle$  обозначим через  $q(\langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle)$ . Тогда с учетом (3) – (5) и (15) после определенных математических преобразований получим, что указанные величины вычисляются так:

$$\begin{aligned} q(\langle i \rangle, \langle i+1 \rangle) &= \lambda H_p \rho_n(0), \quad i = 0, 1, \dots, R-1; \\ q(\langle i \rangle, \langle i-1 \rangle) &= i \eta (1 - (1 - H_r) \rho_n(0)), \quad (16) \\ & \quad i = 1, 2, \dots, R; \\ q(\langle i \rangle, \langle j \rangle) &= 0, \quad \text{если } |i - j| > 1. \end{aligned}$$

Тогда из системы соотношений (16) найдем, что вероятности укрупненных состояний  $\pi(\langle n \rangle), \langle n \rangle \in \Omega$ , вычисляются следующим образом:

$$\pi(\langle n \rangle) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{q(i, i+1)}{q(i+1, i)} \pi(\langle 0 \rangle), \quad n = 1, \dots, R, \quad (17)$$

где вероятность  $\pi(\langle 0 \rangle)$  находим из условия нормировки, т.е.  $\sum_{n=0}^R \pi(\langle n \rangle) = 1$ .

Вероятности состояний исходной модели приближенно определяются так:

$$p(m, n) \approx \rho_n(m) \pi(\langle n \rangle). \quad (18)$$

Тогда из соотношений (15) – (18) найдем следующие формулы для приближенного расчета характеристик исследуемой системы:

$$S_{av} \approx \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^R \rho_n(m) \pi(\langle n \rangle); \quad (19)$$

$$L_o \approx \sum_{n=1}^R n\pi(<n>); \quad (20)$$

$$P_p \approx (1-H_p) \sum_{n=0}^{R-1} \rho_n(0)\pi(<n>) + \rho_R(0)\pi(<R>); \quad (21)$$

$$P_r \approx H_r \sum_{n=1}^R \rho_n(0)\pi(<n>). \quad (22)$$

*Замечание.* В частном случае, когда интенсивности пополнения запасов  $v_n(m)$  не зависят от числа  $r$ -заявок в орбите, т.е.  $v_n(m) = v(m)$  для любого  $n = 0, 1, \dots, R$ , указанные формулы еще больше упрощаются. Так, в этом случае вероятности состояний расщепленных моделей  $\rho_n(m)$  не зависят от параметра  $n$  (т.е. вероятности состояний всех расщепленных моделей совпадают). Вероятности укрупненных состояний  $\pi(<n>)$ ,  $n = 0, 1, \dots, R$ , определяются как вероятности состояний классической модели Эрланга  $M/M/R/0$  с нагрузкой  $\alpha = \Lambda / M \text{ erl}$ , где  $\Lambda = \lambda H_p \rho(0)$ ,  $M = \eta(1 - (1 - H_r)\rho(0))$ . Таким образом, из соотношений (19)–(22) получим следующие простые формулы для вычисления характеристик системы:

$$S_{av} \approx \sum_{m=1}^S m\rho(m); \quad (23)$$

$$L_o \approx \alpha(1 - E_B(\alpha, R)); \quad (24)$$

$$P_p \approx \rho(0)(1 - H_p(1 - E_B(\alpha, R))); \quad (25)$$

$$P_r \approx H_r \rho(0)(1 - \pi(<0>)). \quad (26)$$

В формулах (24) и (25) запись  $E_B(\alpha, R)$  обозначает  $B$ -формулы Эрланга, т.е.  $E_B(\alpha, R) = \frac{\alpha^R}{R!} / \sum_{n=0}^R \frac{\alpha^n}{n!}$  (в литературе имеется много рекуррентных формул для вычисления этой величины). Следует обратить внимание на формулу (23). Из нее видно, что в данном случае средний уровень запасов не зависит от интенсивности поступления  $r$ -заявок. Этот факт объясняется тем, что здесь интенсивность поступления не зависит от числа таких заявок, и предположительно интенсивность  $p$ -заявок намного превос-

ходит интенсивность  $r$ -заявок, и потому на значения указанной характеристики почти не влияет интенсивность  $r$ -заявок.

Теперь рассмотрим модель с неограниченным размером орбита для пребывания  $r$ -заявок, т.е. предположим, что  $R = \infty$ . В этой модели предполагается, что  $v_n(m) = v(m)$  для любого  $n = 0, 1, 2, \dots$

Работа данной системы также описывается двумерной, но в данном случае бесконечной ЦМ с состояниями вида  $(m, n)$ , где  $m$  – уровень ресурсов на складе,  $n$  – число  $p$ -заявок в орбите, т.е. фазовое пространство состояний в данном случае бесконечномерно по второй компоненте.

Элементы  $Q$ -матрицы данной двумерной ЦМ определяются аналогично (3)–(5). Используя описанный метод, можно составить СУР для вероятностей состояний, при этом в данном случае она имеет бесконечный размер. Потому для ее решения невозможно использовать стандартные методы линейной алгебры. Использование для этой цели метода двумерных производящих функций сопровождается известными трудностями. Исходя из этого, далее используется описанный ранее приближенный метод.

Как и выше, рассматривается аналогичное (13) расщепление бесконечного ФПС модели и соответствующим образом строится функция укрупнения (см. (14)).

В данной модели вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей вычисляются одинаково (см. (15)).

Укрупненная модель в данном случае описывается бесконечным процессом размножения и гибели, при этом интенсивности переходов между его соседними состояниями равны  $\Lambda = \lambda H_p \rho(0)$ ,  $M = \eta(1 - (1 - H_r)\rho(0))$ . Отсюда получим, что вероятности состояний укрупненной модели вычисляются как вероятности состояний модели  $M/M/\infty$  с нагрузкой  $\alpha = \Lambda / M \text{ erl}$ , т.е.

$$\pi(<n>) = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Средний уровень запасов также определяется с помощью формулы (23), а среднее число  $r$ -заявок в орбите и вероятность их потери в данной модели определяются так (вероятность потери  $p$ -заявок в данной модели равна нулю):

$$L_{av} \approx \alpha; \quad (28)$$

$$P_r \approx H_r \rho(0) (1 - e^{-\alpha}). \quad (29)$$

### Результаты

Рассмотрим результаты численных экспериментов, проведенных с использованием разработанных выше алгоритмов. Сначала рассмотрим результаты для модели с ограниченным размером орбита. Исходные параметры модели выбираются так:  $S = 50$ ,  $R = 100$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\eta = 1$ .

Здесь интенсивность пополнения запасов определяется так:  $v_n(m) = (n+1)/(m+1)$  для каждого  $n = 0, 1, \dots, R$  и  $m = 0, 1, \dots, s$ . Исходя из практических соображений, предполагается, что с ростом числа  $r$ -заявок в орбите (при фиксированном уровне запасов  $m$ ) возрастает интенсивность пополнения запасов, а с возрастанием уровня запасов  $m$  (при фиксированном числе  $r$ -заявок в орбите) интенсивность пополнения запасов уменьшается.

Изменяемый параметр системы – критический уровень запасов (т.е.  $s$ ). При этом изучаются два варианта значений вероятностей  $H_p$  и  $H_r$ : в первом варианте принимается, что  $H_p = 0,2$ ,  $H_r = 0,8$ , а во втором варианте –  $H_p = 0,8$ ,  $H_r = 0,2$ . Отметим, что в первом варианте  $p$ -заявки – менее настойчивы (в сравнении со вторым вариантом) при поступлении в орбит и  $r$ -заявки более нетерпеливы (в сравнении со вторым вариантом) при поступлении из орбита в отсутствие запасов системы.

Поведение характеристик СОЗ относительно критического уровня запасов показано на рис. 2–5, где легенды  $o$  и  $\times$  указывают кривые изменения показателя  $QoS$  при первом и втором вариантах изменения вероятностей  $H_p$  и  $H_r$ , соответственно.

Из рис. 2 видно, что в обоих вариантах с ростом критического уровня запасов среднее число заявок в орбите сокращается с достаточно высокой скоростью, при этом во втором ва-

рианте среднее число заявок в орбите почти в четыре раза больше, чем в первом. Этого следовало ожидать, так как во втором варианте заявки с большей вероятностью, чем в первом, уходят в орбит, а также с меньшей вероятностью, чем в первом, покидают его при отсутствии запасов системы.

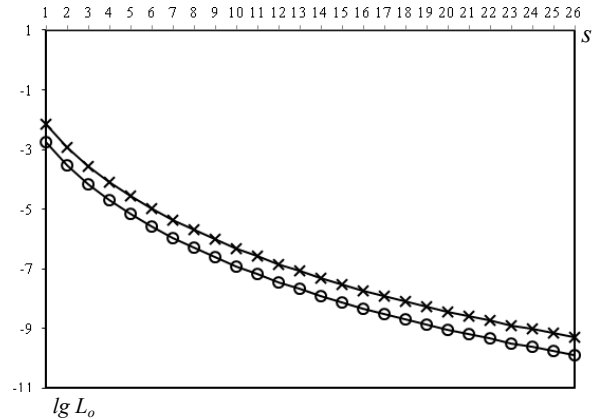


Рис. 2. Зависимость среднего числа заявок в орбите от параметра  $s$  в модели с ограниченным орбитом

На рис. 3 показано поведение вероятности потери  $p$ -заявок. Видно, что этот показатель также уменьшается в обоих вариантах, при этом интересен тот факт, что здесь во втором варианте вероятности потери  $p$ -заявок почти в четыре раза меньше, чем в первом. Этот факт также имеет логическое объяснение, так как во втором варианте  $p$ -заявки более настойчивы при поступлении в орбит. Интересен также тот результат, что вероятность потери  $r$ -заявок в обоих вариантах одинакова и намного меньше, чем вероятности потери  $p$ -заявок (рис. 4).

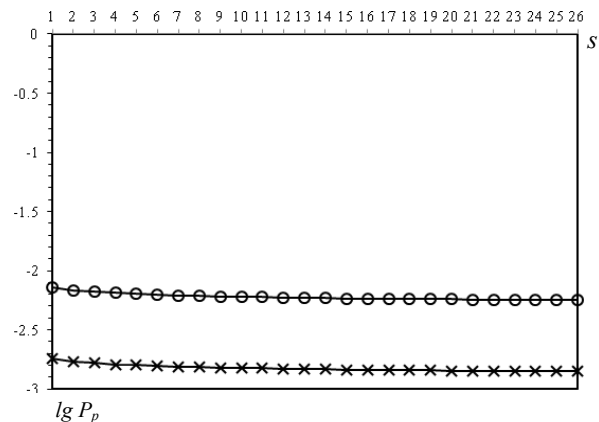


Рис. 3. Зависимость вероятности потери  $p$ -заявок от параметра  $s$  модели с ограниченным орбитом

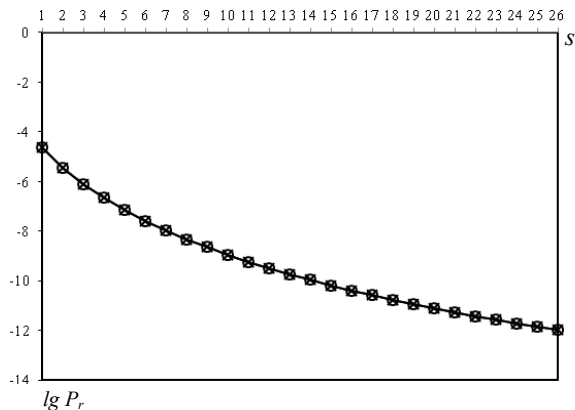


Рис. 4. Зависимость вероятности потери  $r$ -заявок от параметра  $s$  в модели с ограниченным орбитом

Средний уровень запасов системы в обоих вариантах почти одинаков и возрастает с очень малой скоростью в интервале  $[12,1; 12,5]$  (рис. 5).

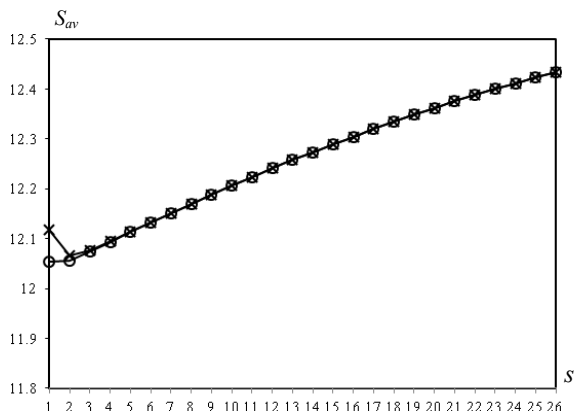


Рис. 5. Зависимость среднего уровня запасов от параметра  $s$  в модели с ограниченным орбитом

Теперь рассмотрим результаты для модели с неограниченным размером орбита, т.е. предположим, что  $R = \infty$ . Другие параметры модели остаются неизменными.

Предполагается, что интенсивность пополнения запасов определяется так:  $v(m) = \frac{1}{m+1}$

для  $m = 0, 1, \dots, s$ . Поведение характеристик данной модели СОЗ относительно критического уровня запасов показано на рис. 6–8.

Как и в случае модели с конечным орбитом, здесь также в обоих вариантах с ростом критического уровня запасов среднее число заявок в орбите сокращается, при этом в данной модели абсолютные значения этого показателя существенно большие, чем в модели с конечным орбитом

(см. рис. 6). Интересен тот результат, что здесь также во втором варианте среднее число заявок в орбите почти в четыре раза больше, чем в первом. В данной модели лишь при  $s = 0$  вероятности потери  $r$ -заявок существенно отличаются друг от друга в различных вариантах, а при  $s > 0$  в обоих вариантах этот показатель одинаков (см. рис. 7).

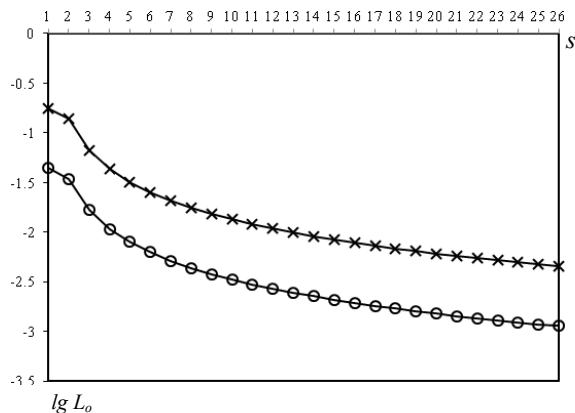


Рис. 6. Зависимость среднего числа заявок в орбите от параметра  $s$  в модели с неограниченным орбитом

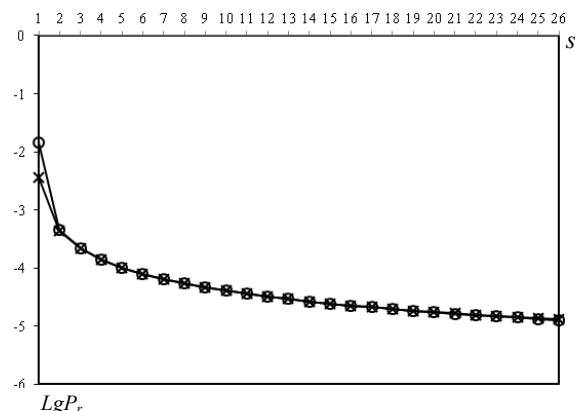


Рис. 7. Зависимость вероятности потери  $r$ -заявок от параметра  $s$  в модели с неограниченным орбитом

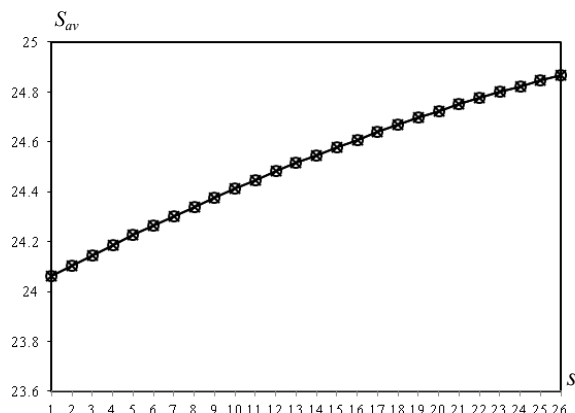


Рис. 8. Зависимость среднего уровня запасов от параметра  $s$  в модели с неограниченным орбитом

Как и ранее, в данной модели средний уровень запасов системы в обоих вариантах почти одинаков и растет с очень малой скоростью в интервале [24.2; 24.8] (см. рис. 8), т.е. в данной модели этот показатель почти в два раза больше, чем в модели с конечным орбитом.

**Заключение.** Применение предложенных в статье точных и приближенных методов исследования систем обслуживания-запасания с мгновенным обслуживанием и повторными заявками, основанных на использовании процедур последовательного укрупнения их состояний, позволили получить явные формулы для расчета их характеристик, адекватность которых подтверждена числовыми экспериментами.

1. Schwarz M., Daduna H. Queuing systems with inventory management with random lead times and with

backordering // *Mathematical Methods of Operations Research*. – 2006. – 64, Issue 3. – P. 383–414.

2. M/M/1 queuing systems with inventory / M. Schwarz, C. Sauer, H. Daduna et al. // *Queuing systems. Theory and applications*. – 2006. – 54, Issue 1. – P. 55–78.
3. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
4. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Bagirova S.A. Analysis of queuing-inventory systems with impatience consume customers // *J. of Autom. and Inform. Sci.* – 2016. – 48, N 1. – P. 53–68.
5. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Bagirova S.A. Models of queuing-inventory systems with randomized lead policy // *Ibid.* – 2016. – 48, N 10. – P. 53–68.
6. Демченко И.Ю. Стационарные распределения в моделях управления запасами // *Кибернетика и системный анализ*. – 2016. – № 2. – С. 163–166.

Поступила 09.12.2016

E-mail: aseva@gmail.com

© С.А. Багирова, 2016

UDC 519.872

S.A. Bagirova

## Analysis of Queuing–Inventory Systems with Instantaneous Service and Variable Size of Order

**Keywords:** queuing–inventory systems, lead policy, variable order size.

**Introduction.** In the scientific literature, the queuing-inventory systems with the different kinds of lead policy and service mechanisms are investigated. In this paper a model of the queuing-inventory systems with the variable order size and instantaneous service is considered. It is assumed that the customers can form orbit of the retrial customers. The exact and approximate methods to calculate the characteristics of the systems are developed.

**Purpose.** The following model of queuing-inventory systems with the finite size of stock is proposed. The input flow of customers is Poisson one and service time is zero. The backlog customers forms the orbit of the finite size and retrial calls from an orbit either lost the orbit or return to the orbit in order to repeat in the future. Sojourn time in orbit is random variable with exponential distribution function. The models of queuing-inventory systems with the finite and infinite size of orbit for the retrial customers are investigated. Lead policy is in class of variable size of order. The main characteristics of the system are average level of inventory, probability of loss of the initial and retrial customers and the average number of customers in the orbit. The effective method to calculate the indicated characteristics of the system is worked out.

**Method.** The functioning of the investigated model is described by two-dimensional Markov Chain (2-D MC). Infinitesimal matrix of the appropriate 2-D MC is developed. It is shown that stationary distribution of indicated 2-D MC has no analytical solution and the method to calculate the approximate values of characteristics of the system is demonstrated.

**Results.** The results of numerical experiments for both kinds of models with finite and infinite size of orbit for retrial customers are represented. Different schemas for changing the lead times are investigated. These results allow to perform the detailed analysis of the system behavior in the wide area of the changing parameters.

**Conclusion.** In this paper the simple algorithms to calculate the characteristics of queuing-inventory systems are developed. Complexities of the algorithms are very low and they allow to select an optimal size of order in the investigated systems. The last problems will be studied in the future works.

