УДК 519.17

З.А. Шерман

Методы построения квадратной разностной разметки

Предложен конструктивный метод построения квадратных разностных деревьев, основанный на методе Δ-построения грациозных деревьев и методы построения таких деревьев больших размеров, имеющих три подхода.

Ключевые слова: квадратная разностная разметка, квадратный разностный граф, метод Δ-построения.

Запропоновано конструктивний метод побудови квадратних різницевих дерев, заснований на методі Δ-побудови граціозних дерев та методи побудови таких дерев великих розмірів, які мають три підходи.

Ключові слова: квадратна різницева розмітка, квадратний різницевий граф, метод Δ-побудови.

Введение. Математическими моделями многих задач служат графы. В основе методов решения некоторых из них в таких областях, как рентгеновская кристаллография, теория кодирования, радиолокация, астрономия, проектирование схем и сетей, управление базами данных, лежит теория разметок графов. Зарождение теории началось в 1963 г. с гипотезы Г. Рингеля, предположившего, что граф K_{2n+1} можно разложить на $2n + 1$ подграфа, каждый из которых изоморфен заданному дереву с n ребрами [1]. При решении этой гипотезы А. Роса в 1967 г. ввел понятие β-оценки графа, а также ряд других оценок как инструмент для разложения графа на изоморфные подграфы [2]. В 1972 г. Голомб [3] назвал β-оценку *грациозной* разметкой.

Актуальность проблемы грациозной разметки графов, а именно, проблема Котцига–Рингеля–Роса принесла волну различных методов разметок графов. В частности, один из конструктивных подходов нахождения грациозных деревьев больших размеров из известных грациозных деревьев был предложен Р. Стентоном, С. Занке [4], К. Кохом, Д. Роджерсом и Т. Таном [5–7], выполнившими построение нового графа, добавив к дизъюнктивному объединению изоморфных копий данного грациозного графа T, дополнительную вершину, соединенную ребрами с изоморфными образами некоторой фиксированной вершины T. Данный метод использован при исследовании на грациозность симметричных деревьев. Эти же авторы обобщили указанный метод, отождествив изоморфные образы фиксированной вершины графа T, с дополнительной вершиной. Построение грациозного дерева реализовано по заданной паре грациозных деревьев и названо Δ-построением [7]. Используя его, К. Кох и другие доказали грациозность полного m-арного дерева.

В данной работе применены методы построения грациозных разметок для нахождения квадратной разностной разметки определенных видов графов, что позволило решить задачу построения квадратного разностного дерева из деревьев меньших порядков.

Предварительные сведения

Рассмотрим конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $G = (V, E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Будем считать, что $|V(G)| = p$, $|E(G)| = q$.

Определение 1 [8]. Функцию f называют квадратной разностной разметкой графа G с p вершинами, если f – биекция из $V(G)$ на множество $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, и индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u,v) = |[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$ является инъекцией из $E(G)$ в множество натуральных чисел.

Граф, допускающий квадратную разностную разметку, называется квадратным разностным графом, или SD-графом.

Теорема 1 [9]. Дизъюнктивное объединение звезд K_{1,n_i}, где $i = 1, 2, \ldots, m$ допускает квадратную разностную разметку для любых натуральных m и n_i.

Построение нового квадратного разностного дерева из данного дерева

Построение квадратного разностного дерева большего размера из данного разностного дерева выполним методом построения грациозных деревьев, предложенным в [7].

Пусть дерево T порядка n имеет квадратную разностную разметку f с наибольшей меткой $n-1$ в вершине w, т.е. $f(w)=n-1$ и $T_1, T_2, \ldots, T_p$ – изоморфные копии дерева T, а вершины w_1, $w_2, \ldots, w_p$ являются изоморфными образами вершины w. Пусть вершины $w_1, w_2, \ldots, w_p$ отождествляются в вершину w_0. Выполним построение и получим дерево T_w^p (рис. 1).

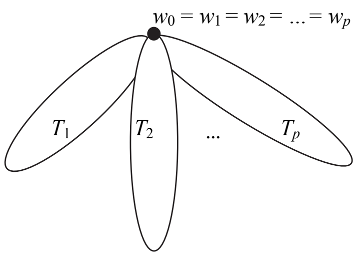

Рис. 1

Теорема 2. Если звезда $K_{1,n} = T$ имеет квадратную разностную разметку f с наибольшей меткой n в вершине w, т.е. $f(w) = n$, то дерево T_w^p допускает квадратную разностную разметку.

Доказательство. Пусть $V(T) = \{w, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ – множество вершин дерева T. Выполним построение дерева T_w^p. Обозначим $V(T_i) =\{w_i$, $u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,n}\}$ – множество вершин копии T_i, изоморфной дереву T, w_i – изоморфные образы вершины w, где $i = 1, 2, \ldots, p$. Пусть вершины $w_1, w_2, \ldots, w_p$ отождествляются в вершину w_0 и $u_{i,1}$ – изоморфные образы центральной вершины звезды $K_{1,n} = T$ (рис. 2).

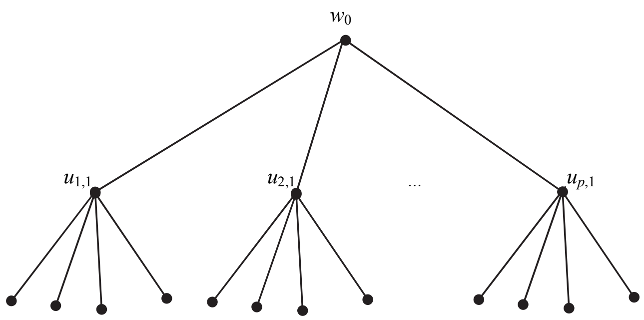

Рис. 2

Зададим вершинную разметку f^* графа T_w^p с множеством вершин $pn + 1$ так:

$$f^*(w_0) = pn,\ f^*(u_{i,1}) = i-1,\ f^*(u_{1,j}) = f(u_j) + p - 1,$$
$$f^*(u_{i+1,j}) = f(u_{i,j}) + n - 1,$$

где $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 2, \ldots, n - 1$.

Для каждой изоморфной копии T_i дерева T, где $i = 1, 2, ..., p$, функция f^* является биективным отображением множества вершин $V(T_i)$ на множество чисел K_i, которое для каждого i имеет следующий вид:

$$K_1 = \{p, p + 1, p + 2, \ldots, p + n - 2\},$$
$$K_2 = \{p + n-1, p + n, p + n +1 , \ldots, p + 2n - 3\},$$
$$K_3 = \{p + 2n - 2, p + 2n - 1, p + 2n, \ldots, p + 3n - 4\},$$
$$\ldots$$
$$K_p = \{pn - n + 1, pn - n + 2, pn - n + 3, \ldots, pn -1\}.$$

Таким образом, $f^*\colon V(T_w^p) \to \bigcup_{i=1}^{p} K_i$ – биекция.

Метки ребер в соответствии с определением 1 для T_i, где $i = 1, 2, ..., p$, образуют множества:

$$K_1^* = \{p^2, (p+1)^2, (p+2)^2, \ldots, (p+n-2)^2, (pn)^2\},$$
$$K_2^* = \{(p+n-1)^2 - 1, (p+n)^2 - 1, (p+n+1)^2 - 1, \ldots$$
$$\ldots, (p+2n-3)^2 - 1, (pn)^2 - 1\},$$
$$K_3^* = \{(p+2n-2)^2 - 4, (p+2n-1)^2 - 4, (p+2n)^2 - 4, \ldots$$
$$\ldots, (p+3n-4)^2 - 4, (pn)^2 - 4\},$$
$$\ldots$$
$$K_p^* = \{(pn-n+1)^2 - (p-1)^2, (pn-n+2)^2 - (p-1)^2,$$
$$(pn-n+3)^2 - (p-1)^2, \ldots, (pn-1)^2 - (p-1)^2,$$
$$(pn)^2 - (p-1)^2\}.$$

В результате выполненных действий, образуется множество $K = K_1^* \cup \ \ldots \cup K_p^* \subset N$. Аналогичными рассуждениями, изложенными при доказательстве теоремы 1 в [9], приходим к выводу, что множество K состоит из различных чисел. Значит, f^{**} – инъекция на множество чисел K. Поэтому разметка f^* – квадратная разностная разметка графа $S\Delta T$, который является SD-графом. Теорема доказана.

Применим алгоритм построения квадратного разностного дерева, изложенный в теореме 2. На рис. 3 представлена квадратная разностная разметка звезды $K_{1,5}$. Для $p = 3$ получим квадратное разностное дерево T_w^3 (рис. 4).

Пусть дерево T порядка n имеет квадратную разностную разметку f с наибольшей меткой n–1 в вершине v_1, т.е. $f(v_1) = n - 1$ и $T_1, T_2, \ldots, T_p$ – изоморфные копии дерева T. Выполним построение дерева T_w^{*p} с применением новой вершины w_0 и ребер w_0w_i, где $w_i \in V(T_i)$ – изоморфные образы вершины v_1, $i = 1, 2, \dots, p$, $p \geq 1$. Получим дерево T_w^{*p} (рис. 5).

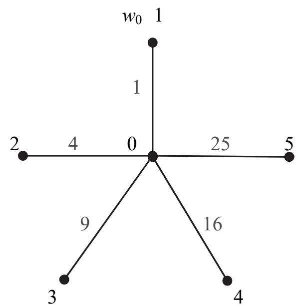

Рис. 3

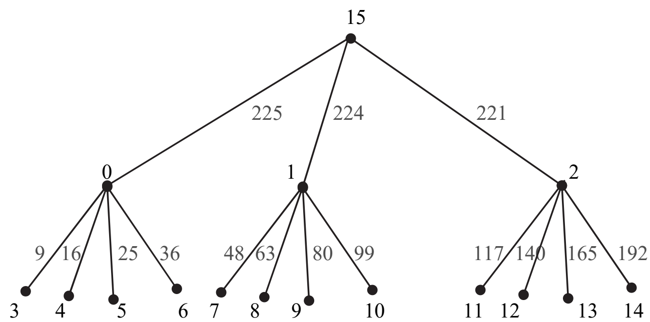

Рис. 4

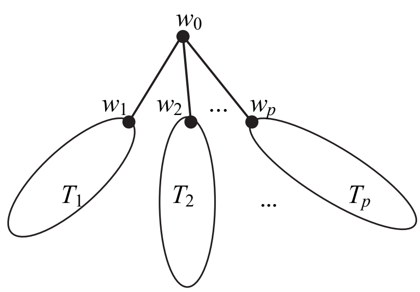

Рис. 5

Теорема 3. Если звезда $K_{1,n} = T$ имеет квадратную разностную разметку f с наибольшей меткой $n - 1$ в вершине v_1, то дерево T_w^{*p} допускает квадратную разностную разметку.

Доказательство. Пусть $V(T) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$ – множество вершин дерева $K_{1,n} = T$. Выполним построение дерева T_w^{*p}. Обозначим $V(T_i) = \{w_i, u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n}\}$ – множество вершин копии T_i, изоморфной дереву T, где $i = 1, 2, \dots, p$. Пусть w_0 – новая вершина и w_0w_i – ребра, полученные при построении дерева T_w^{*p}, где $p \geq 1$ и $w_i \in V(T_i)$ – изоморфные образы вершины v_1 и $u_{i,1}$ – изоморфные образы центральной вершины звезды $K_{1,n} = T$ (рис. 6).

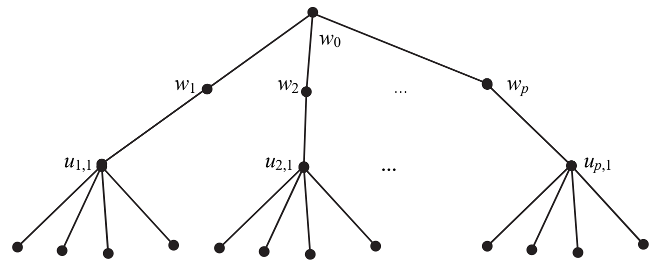

Рис. 6

Зададим вершинную разметку f^* графа T_w^{*p} с множеством вершин $p(n+1) + 1$ следующим образом:

$$f^*(w_0) = p(n+1),\ f^*(u_{i,1}) = i–1,$$
$$f^*(u_{1,j}) = f(u_j) + p–1,\ f^*(u_{i+1,j}) = f(u_{i,j}) + n,$$

где $i = 1, 2, \dots, p,\ j = 2, \dots, n.$

Вершинные метки образуют множество $S = \{0, 1, 2, \dots, p(n+1)\}$. Таким образом, f^* – биективное отображение множества вершин графа T_w^{*p} на множество чисел S.

Покажем, что метки ребер, смежных с вершиной w_0, разные. Пусть w_i, w_j – вершины изоморфных копий T_i и T_j, смежные с вершиной w_0 графа T_w^{*p} с метками $f(w_i) = k$, $f(w_j) = l$, где k, $l \in \{0, \dots, p(n+1))\}$, $k \neq l$. Не нарушая общности, примем $k > l$. Получим:

$$f^{**}(w_0,u_{i,1}) = |[f^*(w_0)]^2 – [f^*(u_{i,1})]^2| =$$
$$= |p^2(n+1)^2 – k^2| = p^2(n+1)^2 – k^2,$$
$$f^{**}(w_0,u_{j,1}) = |[f^*(w_0)]^2 – [f^*(u_{j,1})]^2| =$$
$$= |p^2(n+1)^2 – l^2| = p^2(n+1)^2 – l^2,$$

где $i, j = 1, 2, \dots, n–1,\ i \neq j.$

Тогда $p^2(n+1)^2 – k^2 < p^2(n+1)^2 – l^2$ и $f^{**}(w_0,u_{i,1}) < f^{**}(w_0,u_{j,1})$. Так, метки ребер, смежных с вершиной w_0 графа T_w^{*p}, различны и образуют множество $S_1 = \{p^2(n+1)^2 – (p+n–1)^2,\ p^2(n+1)^2 – (p+2n–1)^2, p^2(n+1)^2 – (pn+p–2)^2\}$.

Для каждой изоморфной копии T_i дерева T, где $i = 1, 2, ..., p$, функция f^* – биективное отображение множества вершин $V(T_i)$ на множество чисел K_i, которое для каждого i имеет следующий вид:

$$K_1 = \{p, p+1, p+2, \dots, p+n–1\},$$
$$K_2 = \{p+n, p+n+1, p+n+2, \dots, p+2n–1\},$$

$$K_3=\{p+2n, p+2n+1, p+2n+2, \ldots, p+3n-1\},$$
$$\ldots$$
$$K_p=\{p+(p-1)n, p+(p-1)n+1, p+(p-1)n+2, \ldots, pn+p-1\}.$$

Метки ребер в соответствии с определением 1 для T_i, где $i = 1, 2, ..., p$, образуют множества:

$$K_1^*=\{p^2, (p+1)^2, (p+2)^2, \ldots, (p+n-2)^2, (p+n-1)^2\},$$
$$K_2^*=\{(p+n)^2-1, (p+n+1)^2-1, (p+n+2)^2-1, \ldots, (p+2n-2)^2-1, (p+2n-1)^2-1\},$$
$$K_3^*=\{(p+2n)^2-4, (p+2n+1)^2-4, (p+2n+2)^2-4, \ldots, (p+3n-2)^2-4, (p+3n-1)^2-4\},$$
$$\ldots$$
$$K_p^*=\{(p+(p-1)n)^2-(p-1)^2, (p+(p-1)n+1)^2-(p-1)^2, (p+(p-1)n+2)^2-(p-1)^2, \ldots, (pn+p-1)^2-(p-1)^2\}.$$

В результате выполненных действий, образуется множество $K=S_1\cup K_1^*\cup \ldots \cup K_p^* \subset N$. Рассуждения, аналогичные изложенным при доказательстве теоремы 1 в [9], приводят к выводу, что множество K состоит из различных чисел. Значит, f^{**} – инъекция на множество натуральных чисел. Поэтому разметка f^* – квадратная разностная разметка графа T_w^{*p}, который является *SD*-графом. Теорема доказана.

Применим к квадратной разностной звезде $K_{1,5}$ (см. рис. 3) метод построения дерева T_w^{*p} для $p = 3$, предложенный в теореме 3. Получим квадратную разностную разметку дерева T_w^3 (рис. 7).

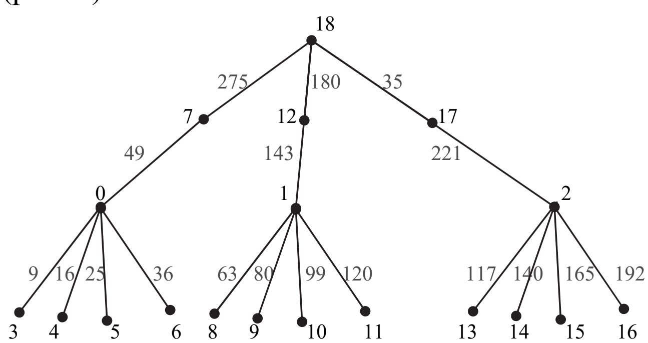

Рис. 7

Теорема 4. Если дерево S порядка m имеет квадратную разностную разметку f_m, а звезда $K_{1,n}=T$, где $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ имеет квадратную разностную разметку f_n с наибольшей меткой n в вершине v_1, т.е. $f_n(v_1)=n$ и $T_1, T_2, \ldots, T_m$ – изоморфные копии звезды $K_{1,n}$, то дерево $S\Delta K_{1,n}$, полученное путем отождествления каждой вершины w_i, графа S с образом вершины v_1 звезды $K_{1,n}=T$ в каждой изоморфной копии T_i, где $i = 1, 2, ..., m$, является *SD*-графом.

Доказательство. Пусть $V(S)=\{w_1, w_2, \ldots w_m\}$, $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ – множества вершин деревьев S и T, соответственно. Согласно условию теоремы, f_m и f_n – квадратные разностные разметки деревьев S и T соответственно. Пусть вершина v_1 имеет наибольшую метку n, т.е. $f(v_1) = n$. Для построения дерева $S\Delta K_{1,n}$ за основу принимаем дерево S. Выполним отождествление каждой вершины w_i графа S с образом вершины v_1 в каждой изоморфной копии T_i дерева T, где $i = 1, 2, ..., m$. Обозначим $V(T_i) = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,n}\}$ – множество вершин изоморфной копии T_i дерева T, где $i = 1, 2, \ldots, m$, т.е. $V(T_i) = V(S\Delta K_{1,n})$. Зададим вершинную разметку f^* дерева $S\Delta T$ с множеством вершин $m(n+1)$ так:

$$f^*(u_{i,j}) = (n+1)f_m(w_i) + f_n(v_j),$$

где $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$.

Для изоморфной копии T_i дерева T, где $i = 1, 2, ..., m$, функция f^* – биективное отображение множества вершин $V(T_i)$ на множество чисел K_i, которое для каждого i имеет следующий вид:

$$K_1=\{0, 1, 2, \ldots, n\},$$
$$K_2=\{n+1, n+2, \ldots, 2n, 2n+1\},$$
$$K_3=\{2n+2, 2n+3, \ldots, 3n, 3n+1, 3n+2\},$$
$$K_4=\{3n+3, 3n+4, \ldots, 4n+2, 4n+3\},$$
$$\ldots$$
$$K_m=\{(m-1)n + (m-1), (m-1)n + m, \ldots, m(n+1) - 2, m(n+1) - 1\}.$$

Метки ребер, в соответствии с определением 1, для T_i, где $i = 1, 2, ..., m$, образуют множества:

$$K_1^*=\{1, 4, \ldots, n^2\},$$
$$K_2^*=\{(2n+3), 2(2n+4), 3(2n+5), \ldots, (n-1)(3n+1), n(3n+2)\},$$
$$K_3^*=\{(4n+5), 2(4n+6), 3(4n+7), \ldots, (n-2)(5n+2), (n-1)(5n+3), n(5n+4)\},$$

$$K_4^* = \{(6n+7),\ 2(6n+8),\ 3(6n+9),\ \ldots,\ (n-2)(7n+4),$$
$$(n-1)(7n+5),\ n(7n+6)\},$$
$$\ldots$$
$$K_m^* = \{(2m-2)n + (2m-1),\ 2(2m-2)n + 2m,\ \ldots,$$
$$(n-1)(2m-1)n + 2m-3,\ n(2m-1)n + 2m-2\}.$$

Рассмотрим изоморфные копии T_l и T_{l+1} дерева T. Пусть f^{**} – реберная разметка дерева $S\Delta K_{1,n}$, порождаемая функцией f^* согласно определению 1. Тогда для изоморфной копии T_l имеем следующие метки ребер:

$$f^{**}\left(u_{l,i}u_{lj}\right) = \left[f^*\left(u_{l,i}\right)\right]^2 - \left[f^*\left(u_{l,j}\right)\right]^2 =$$
$$= ((n+1)f_m(w_l) + f_n(v_i))^2 - ((n+1)f_m(w_l) + f_n(v_j))^2 =$$
$$= [f_n(v_i)]^2 - [f(v_j)]^2 + 2(n+1)f_m(w_l)(f_n(v_i) - f(v_j)),$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, $i \neq j$.

Найдем реберную разметку f^{**}, индуцированную функцией f^*, для изоморфной копии T_{l+1}, согласно определению 1:

$$f^{**}\left(u_{l+1,i}u_{l+1,j}\right) = \left[f^*\left(u_{l+1,i}\right)\right]^2 - \left[f^*\left(u_{l+1,j}\right)\right]^2 =$$
$$=((n+1)f_m(w_{l+1}) + f_n(v_i))^2 - ((n+1)f_m(w_{l+1}) + f_n(v_j))^2 =$$
$$= [f_n(v_i)]^2 - [f(v_j)]^2 + 2(n+1)f_m(w_{l+1})(f_n(v_i) - f(v_j)),$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, $i \neq j$.

Получим, что элементы множеств $f^{**}(E(T_l))$ и $f^{**}(E(T_{l+1}))$, где $l = 1, 2, \ldots, m$, отличаются на число $2(n+1)(f_n(v_i) - f_n(v_j))(f_m(w_l) - f_m(w_{l+1}))$.

Функция f^* так же индуцирует метки ребер дерева основы S, образующие множество чисел

$$S^* = \{(n+1)(3n+1),\ (n+1)(5n+3),\ (n+1)(7n+5),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (n+1)((2m-3)n + 2m-5)\}.$$

В результате проведенных действий, образуется множество $K = S^* \cup K_1^* \cup \ldots \cup K_m^* \subset N$, состоящее из разных чисел. Значит, f^{**} представляет собой инъекцию на множество натуральних чисел. Поэтому разметка f^* – квадратная разностная разметка графа $S\Delta T$, который является SD-графом. Теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы 4 рассмотрим дерево S порядка 5 и дерево T порядка 5 (рис. 8, 9). Выполним Δ-построение графа $S\Delta T$, как показано в доказательстве теоремы 4 (рис. 10). За основу примем дерево S, тогда множество меток его вершин образует множество последовательных натуральных чисел, а множество меток ребер – множество различных натуральных чисел. Значит, $S\Delta T$ – квадратный разностный граф.

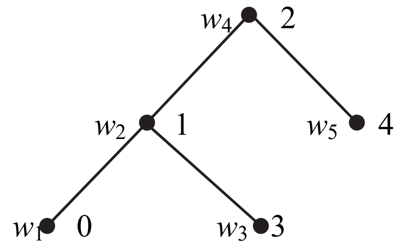

Рис. 8

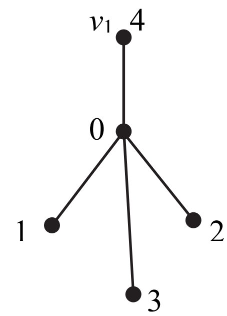

Рис. 9

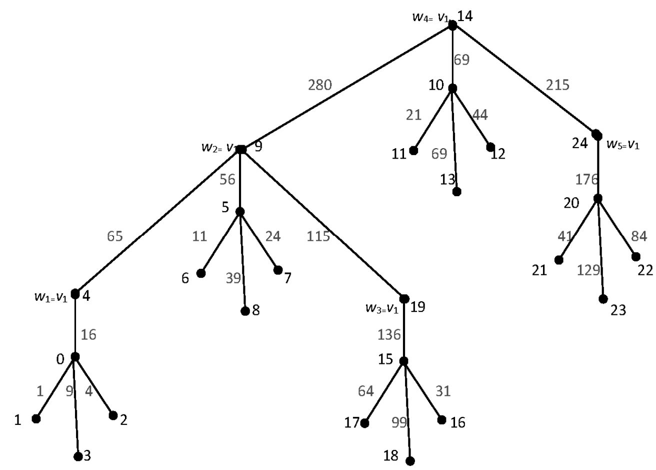

Рис. 10

Заключение. Использованные в статье методы построения квадратного разностного дерева могут быть применены в дальнейших теоретических исследованиях.

1. *Ringel G.* Problem 25 / Theory of Graphs and Its Applications. // Proc. Symp., Smolenice, 1963. – Czech. Acad. Sci. 162 p.
2. *Rosa A.* On certain valuations of the vertices of a graph / Theory of Graphs. Int. Symp., Rome, July.

1966. – Gordon and Breach, New York and Dunod Paris. – P. 349–355.
3. *Bermond J.* Graceful graphs, radio antennae and French windmills / Graph Theory and Combinatorics, 1979. – P. 18–37.
4. *Stanton R.*, *Zarnke C.* Labeling of balanced trees. // Proc. 4th Southeast Conf. Combin. Graph Theory, Computing., 1973. – P. 479–495.
5. *Koh K.M.*, *Rogers D.G.*, *Tan T.* On graceful trees. // Nanta Mathematics, 1977. – **10**(2). – P. 207–211.
6. *Koh K.M.*, *Rogers D.G.*, *Tan T.* Two theorems on graceful trees // Discrete Mathematics. – 1979. – **25**. – P. 41–148.
7. *Koh K.M.*, *Rogers D.G.*, *Tan T.* Products of graceful trees // Discrete Mathematics. – 1980 – **31**, – P. 279–292.
8. *On square* difference Graphs / V. Ajitha, K.L. Princy, V. Lokesha et al. / Int. J. of Mathematical Combinatorics. – 2012. – **1**, N 1. – P. 31–40.
9. *Шерман З.А.* Квадратная разностная разметка соединений циклов и цепей // Научн.-техн. конф. «Информатика, математика, автоматика». – Сумы, 18–22 апр. 2016. – С. 251.

Поступила 07.03.2017
E-mail: *sherman.zoya@gmail.com*

UDC 519.17

Z.O. Sherman[1]

Methods of Constructing Square Difference Labeling

[1] Post-graduate student at V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Mikhailovskaya str. 1, apt. 4, Kropivnitsky, Ukraine 25015

Keywords: square difference labeling, square difference graph, Δ-construction.

Introduction. The urgency of the graceful labeling of graphs, namely, the problem of Kotzig-Ringel Rosa brought a wave of different methods of labeling graphs. In particular, one of the constructive approach of finding graceful trees of large size from the known graceful trees was offered by R. Stanton, C. Zarnke, K. Koh, D. Rogers, T. Tan. K. Koch, D. Rogers and T. Tan have completed the construction of a new graph, adding to the disjunctive union of isomorphic copies of a given graceful graph *T* an additional vertex connected by its edges to isomorphic images of some fixed vertex of *T*. This method is used to study gracefulness of the symmetrical trees. The same authors generalized this method by identifying isomorphic images of a fixed vertex of *T*, with the additional vertex. The construction of a graceful tree is implemented for a given pair of graceful trees and named Δ-constructing. Using it, K. Koh and others proved gracefulness of full m-arch tree.

Methods and results. The methods of construction of square difference trees are applied. A new square difference tree is built from one square difference tree by identifying vertices with the greatest label of the isomorphic copies of the tree and using a new vertex and edges connecting the isomorphic copies of the square difference of a tree with the vertex. A method of Δ-constructing a square difference tree from two square difference trees is used.

Conclusion. The class of square differential trees is expanded. Methods used to build square difference tree can be applied in further theoretical studies.

●