УДК 621.828

Леонід Дмитрієв
кандидат технічних наук,
кафедра архітектурних конструкцій НАОМА

Одношарові шарнірно-стрижневі моделі тонких пластинок в архітектурному проектуванні

Анотація. Описано шарнірно-стрижневу систему як об'єкт будівельної механіки та як альтернативу загальноприйнятим засобам для числового аналізу напружено-деформованого стану тонких пластинок – об'єктів теорії пружності. Система рівнянь методу деформацій пропонованої моделі збігається із системою рівнянь методу скінченних різниць.

Ключові слова: числовий аналіз, тонка пластина, шарнірно-стрижнева система, попередній натяг, алгоритм програми.

Аналіз напружено-деформованого стану тонких пластинок – одне із завдань, які часто зустрічаються у процесі проектування сучасних споруд. Простота алгоритму числового аналізу і простота архітектури відповідних програм істотно залежать від вибору вихідних моделей цих об'єктів теорії пружності. Передбачається, що об'єкти будівельної механіки – напружені шарнірно-стрижневі системи – як найпростіші дискретні моделі тонких пластин сприяють досягненню визначених цілей.

Розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє граничні умови, здійснювався у вигляді ступеневих або тригонометричних рядів [1, 2].

В даний час поширені числові методи [3], зокрема такі, як методи скінченних різниць і методи скінченних елементів. Алгоритми та система зовнішніх даних програм, що реалізують ці методи, характеризуються певними структурними та змістовими складнощами, і потребують від користувача спеціальних знань і навичок, для усвідомленого моделювання об'єктів проектування і для інтерпретації результатів аналізу.

Методи стрижневих апроксимацій [4], передбачають інженерний підхід до проблеми. Безперервне середовище пластини моделюється певною стрижневою системою, однак задовільно обгрунтована оцінка точності результатів, при цьому як правило, відсутня.

У статті наведено результати альтернативного методу стрижневих апроксимацій. За єдиний елемент прийнято нестиснутий попередньонапружений стрижень, шарнірно закріплений у вузлах. Усі стрижні розташовуються в одній площині.

Нижче описуються моделі для задач згину пластини та плоского напруженого стану.

Кожна модель тонкої пластини являє собою одношарову шарнірно-стрижневу систему, основними елементами якої є попередньонапружений шарнірний ланцюжок стрижнів.

Для початку розглянемо **шарнірно-стрижневу модель прямолінійного стрижня** .

Математична модель згину:

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q}{EI}, \quad M(x) = EI \cdot \frac{d^2w}{dx^2}, \quad Q(x) = \frac{dM}{dx},$$

де *w (x)* – функція прогинів;

M (x) – функція згинальних моментів;

Q (x) – функція перерізувальних сил;

q (x) – поперечне навантаження.

Відповідні скінченні різницеві вирази:

$$\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} = \frac{q_{(i)}}{EI}, \quad M(x) = EI \cdot \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}, \quad Q(x) = \frac{\Delta M}{\Delta x}, \quad \Delta x = \text{const},$$

де, наприклад, для послідовності вузлів {0 1 2 3 4 5 6 7 8} і вузла ?:

$$\Delta^4 w_{(2)} = +1 \cdot w_{(0)} - 4 \cdot w_{(1)} + 6 \cdot w_{(2)} - 4 \cdot w_{(3)} + 1 \cdot w_{(4)};$$

$$\Delta^2 w_{(0)} = -1 \cdot w_{(1)} + 2 \cdot w_{(2)} - 1 \cdot w_{(3)}, \quad \Delta M_{(2)} = -M_{(2)} + M_{(1)}.$$

Шарнірно-стрижнева модель згинаного стрижня (див. іл. 1) складається з множини шарнірних вузлів (відстань між вузлами = 1 · Δх), одного попередньо розтягнутого ланцюжка стрижнів (сила попереднього розтягування = +4 · Н, крок вузлів = 1 · Δх) і двох попередньо стиснутих ланцюжків стрижнів (сила попереднього стиску = - 2 · Н; крок вузлів = 2 Δх); *Н = ЕІ).*

Тепер розглянемо тонку пластину.

Математична модель згину тонкої пластини:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

$$M_x = D\left((\partial^2 w)/(\partial x^2) + \mu\, (\partial^2 w)/(\partial y^2) \right);$$

$$M_y = D\left((\partial^2 w)/(\partial y^2) + \mu\, (\partial^2 w)/(\partial x^2) \right),$$

$$M_{xy} = D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad D = \frac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)},$$

де *h* – товщина пластини,

w (x, y) – функція прогинів.

Відповідні скінченні різницеві вирази:

$$\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} + 2 \cdot \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2} = \frac{q_{(i,j)}}{D};$$

$M_x = D \cdot (\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \mu \cdot \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2});$

$M_y = D \cdot (\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} + \mu \cdot \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2});$

$M_{xy} = D \cdot (1 - \mu)$;

x = const. y = const. ;

де, наприклад, для сітки 9 × 9 множини вузлів {0 1 2 3 4 5 6 7 8. . . 42 43 44 45 46 47 48} і для вузла 16 (див. іл. 2, 3):

$\frac{\Delta^4 w_{(16)}}{\Delta x^4} = (+ 1 \cdot w_{(14)} - 4 \cdot w_{(15)} + 6 \cdot w_{(16)} - 4 \cdot w_{(17)} +$
$+1 \cdot w_{(18)}) \div \Delta x^4;$

$\frac{\Delta^4 w_{(16)}}{\Delta y^4} = (+ 1 \cdot w_{(2)} - 4 \cdot w_{(9)} + 6 \cdot w_{(16)} - 4 \cdot w_{(23)} +$
$+1 \cdot w_{(31)}) \div \Delta y^4$,

$\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2} = (+ 2 \cdot w_{(8)} - 4 \cdot w_{(9)} + 2 \cdot w_{(10)};$
$- 4 \cdot w_{(15)} + 8 \cdot w_{(16)} + 2 \cdot w_{(17)} + 2 \cdot w_{(22)} -$
$- 4 \cdot w_{(23)} + 2 \cdot w_{(24)}) \div \Delta x^2 \cdot \Delta y^2.$

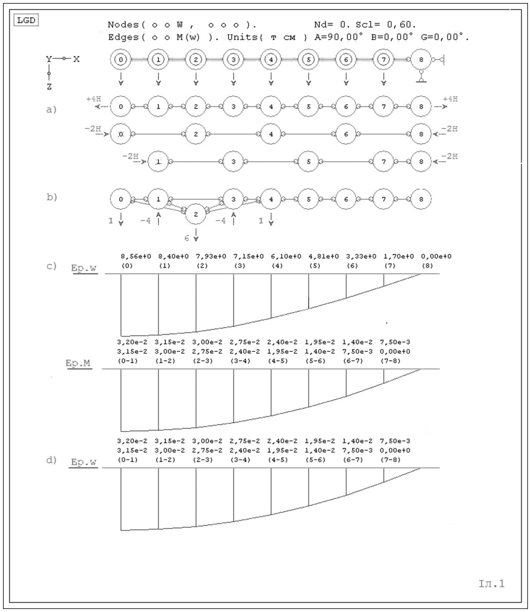
Запропонована модель дозволяє розв’язувати бігармонічні рівняння для багатьох випадків граничних умов засобами програм аналізу шарнірно-стрижневих систем, зокрема, для плоскої задачі теорії пружності (див. іл. 4).

Насамкінець розглянемо **плоску задачу теорії пружності у переміщеннях**:

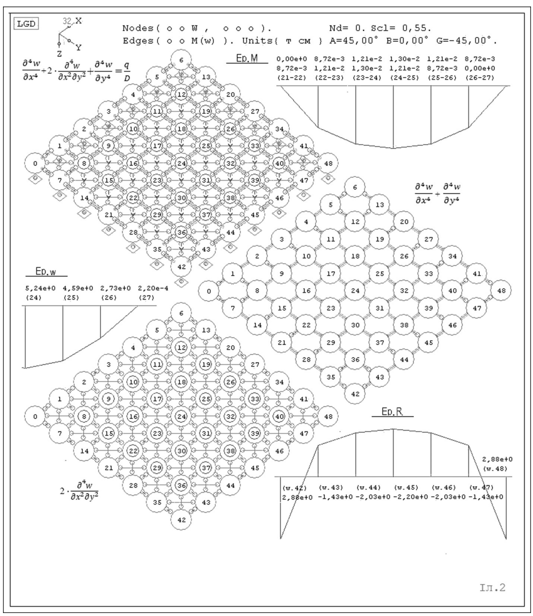
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\mu^2)}{E} X = 0;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{(1-\mu^2)}{E} Y = 0;$$

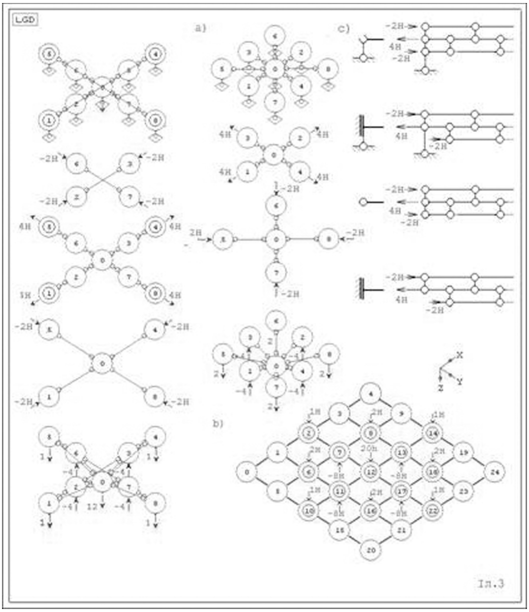
де $u(x, y)$ і $v(x, y)$ – переміщення, X і Y – об’ємні сили.



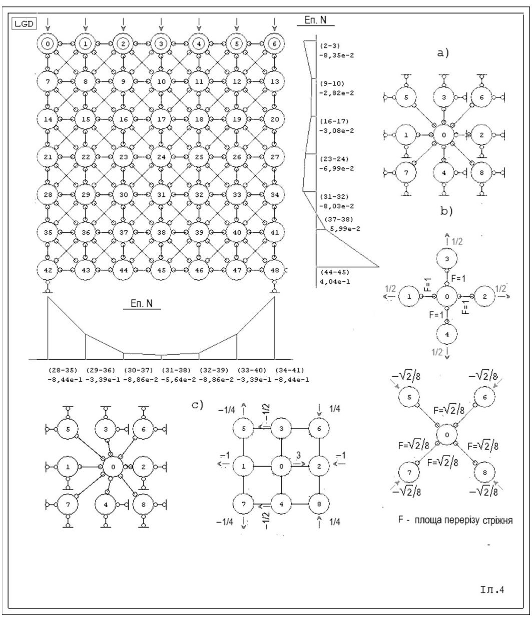
Іл. 1: a – схеми елементарних структур моделі;
b – схеми операторів;
c – епюри прогинів, моментів;
d – точна епюра прогинів стержня (для порівняння)



Іл. 2. Основні структури моделі



Іл. 3: a – елементи операторів;
b – схеми операторів;
c – граничні структури моделі



Іл. 4. Основні схеми шарнірно-стрижневої моделі:
a – елементи операторів;
b – схеми операторів

На іл. 1–4 наведено результати роботи програми, призначеної для реалізації вищеописаної моделі тонкої пластини.

Висновки. У статті описано нову розрахункову модель для визначення напружено-деформованого стану тонких пластин при поперечному згині і при розтягу. В основу моделі покладено стержньову апроксимацію – суцільну пластину замінено шарнірно-стрижневою системою.

Запропонована автором статті модель дозволяє спростити розрахунки порівняно з іншими відомими моделями і може бути застосована при проектуванні міжповерхових перекриттів та несучих стін у цивільних і промислових спорудах.

1. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки : пер. с англ. / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Изд. 2-е, стер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
2. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки : пер. с англ. / Л. Г. Доннелл. – М. : Наука, 1976. –568 с.
3. *Щербо А. Г.* Основы теории упругости и пластичности / А. Г. Щербо – Новополоцк : ПГУ, 2008. – 240 с.
4. *Котляревский В. А.* Безопасность резервуаров и трубопроводов / В. А. Котляревский, А. А. Шаталов, Х. М. Ханухов. – М. : Экономика и информатика, – 2000. – 555 с.

Однослойные шарнирно-стержневые модели тонких пластинок в архиректурном проектировании

Леонид Дмитриев

Аннотация. Описывается шарнирно-стержневая система как объект строительной механики и как альтернатива общепринятым средствам для числового анализа напряженно-деформированного состояния тонких пластинок — объектов теории упругости. Система уравнений метода деформаций предлагаемой модели совпадает с системой уравнений метода конечных разностей.

Ключевые слова: числовой анализ, тонкая пластинка, шарнирно-стержневая система, предварительное натяжение, алгоритм программы.

Single-layer hinged-rod model of thin plates in archittctual design thin plates in architectural design

Leonid Dmytriev

Annotation. Hinged bar system is described as an object of structural mechanics and as an alternative to the conventional means for the numerical analysis of the stress strain state of thin plates, objects theory of elasticity. The system of equations of deformations for the proposed model coincides with the system of equations of finite difference method.

Keywords: numerical analysis, thin plate, hinged bar system, pre-tension, the program algorithm.