



УДК 621.517

ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ФАЗОВЫХ ШУМОВ МЕР ЧАСТОТЫ В БАЗИСЕ ВЕЙВЛЕТОВ

В.Н. Романько, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, директор научного центра ННЦ "Институт метрологии", г. Харьков



Рассмотрены алгоритмы, структура измерителя и погрешности оценок спектральной плотности мощности случайных сигналов в базисе вейвлетов. Приведены примеры по оценке фазовых шумов прецизионных мер частоты и

по изучению модельных сигналов.

Algorithms, structure of the meter and error estimates of power spectral density of random signals in wavelet basis are considered. Examples about estimation of precision frequency measurement system's phase noises and about studying of model signals are given.

Введение

Спектральная плотность мощности (СПМ) флюктуаций фазы наиболее полно характеризует выходной сигнал прецизионных мер частоты [1, 2]. При проведении измерений оценок СПМ флюктуаций фазы с требуемой точностью, при наименьших затратах времени, усилий и средств (решение задачи оптимизации измерений), важно иметь представление о различных методах измерений.

В качестве метода, альтернативного классическому методу измерения оценок СПМ результатов экспериментальных исследований, представленных в виде временных рядов, все чаще рассматривается вейвлетный анализ [3–6]. Это связано с тем, что, с одной стороны, обычный спектральный анализ, основанный на преобразовании и рядах Фурье, не всегда помогает понять, как устроен анализируемый сигнал. С другой стороны, с самого начала возникновения вейвлетного преобразования была установлена его методологическая связь с преобразованием Фурье [7]. При этом обеспечение аналогичного Фурье-анализу метрологического уровня вейвлет-анализа остается проблематичным. Практика времячастотного анализа измерительных сигналов в большей мере базируется на эмпирическом опыте, а не на солидной метрологической основе. При этом основные требования к анализу в базисе вейвлетов как к измерительному процессу чаще

всего совсем не ставились и не обсуждались, что можно объяснить известными трудностями, связанными с решением таких вопросов [8]. Например, по определению, оценки спектральных характеристик с увеличением числа реализаций или последовательностей выражаются через пределы выборочных средних [9]. Однако в литературе не затрагивается вопрос о том, насколько подобное определение, представляющееся очевидным, корректно для вейвлетного преобразования.

Цель работы – рассмотреть алгоритмы, структуру измерителя и погрешности оценок спектральной плотности мощности в базисе вейвлетов. Поставленная задача решается поэтапно по следующей схеме: общие определения – типовые структуры измерений – погрешности.

Общие определения

Любой дискретный сигнал $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ можно представить в виде непрерывной кусочно-постоянной функции:

$$x(t) = x_i, \quad t \in [i, i+1), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Для получения вейвлет-спектра применим к ряду (1) непрерывное вейвлет-преобразование, используя принимающую только действительные значения двухпараметрическую вейвлет-функцию $\psi_{\gamma, \tau}(t)$ [6]:

$$\begin{aligned} W_x(\gamma, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \int_i^{i+1} \psi\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right) dt, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр $\gamma \in R$, $\gamma \neq 0$, называемый масштабом вейвлетного преобразования, отвечает за ширину вейвлета, а параметр сдвига $\tau \in R$ определяет положение вейвлета на временной оси.

Основой совершенствования методов анализа случайных нестационарных сигналов, которые получены на выходе средств измерительной техники, являются преобразования в базисе вейвлетов, ассоциирующиеся с трехмерным вероятностным распределением интенсивности сигнала по осям времени и частоты [3].

Можно показать, что для вейвлет-преобразования аналог равенства Парсеваля имеет вид [8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{C_{\Psi}^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_x(\gamma, \tau)|^2 \frac{d\gamma d\tau}{\gamma^2}. \quad (3)$$

Из (3) введем в рассмотрение мгновенное распределение энергии случайного процесса по параметрам вейвлетного преобразования

$$E(\gamma, \tau) = |W(\gamma, \tau)|^2, \quad (4)$$

которое представляет собой трехмерную случайную поверхность.

При наложении ограничений $\gamma \in R^+$ можно установить однозначную взаимосвязь $\gamma = \omega_0/\omega$, где ω_0 – постоянный коэффициент, ω – круговая частота Фурье-анализа. При этом анализ распределения энергетических характеристик случайного процесса по масштабам вейвлетного преобразования аналогичен спектральному анализу, в основе которого лежит преобразование Фурье.

Специфичность вейвлетного преобразования состоит в аппроксимировании исследуемого процесса как во временной, так и в частотной областях. Эта особенность позволяет получить спектральную функцию для i -й реализации для любого k -го момента времени, то есть этот спектр будет характеризовать сечение процесса в текущий момент времени. При этом можно дать следующую физическую интерпретацию вейвлетного спектра (4):

- спектральные точки представляют собой средние энергии сигнала на выходе фильтра соответствующего уровня преобразования и, таким образом, – энергетическое содержание соответствующего частотного диапазона, а не одной частоты, как в случае энергетического спектра Фурье;

- спектральная область вейвлетного спектра характеризуется тремя параметрами: текущим временем анализа, номером уровня декомпозиции, амплитудой и средней частотой.

При рассмотрении вейвлетного спектра сглаживание может выполняться как во временной (τ), так и в масштабной (γ) областях.

Таким образом, для i -й реализации можно получить интегральный вейвлетный спектр энергии [9, 10]

$$I_i(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |W_i(\gamma, \tau)|^2 d\tau, \quad (5)$$

а также мгновенное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования, определяемое как вертикальное сечение вейвлетной поверхности $W(\gamma, \tau)$ в некоторый k -й момент времени $t_k = \tau_0 = \text{const}$:

$$I_{i,t_k}(\gamma) = |W_i(\gamma, \tau_0)|^2. \quad (6)$$

Интегральный вейвлетный спектр энергии для совокупности ансамбля последовательностей представим в виде

$$I_k(\gamma) = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J |W_i(\gamma, \tau_0)|^2. \quad (7)$$

Средний вейвлетный спектр энергии случайного процесса определим следующим образом:

$$I_{cp}(\gamma) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ J \rightarrow \infty}} \frac{1}{JT} \sum_{i=1}^J \int_0^T |W_i(\gamma, \tau_k)|^2 d\tau. \quad (8)$$

При конечных J и T выражения (5)–(8) соответствуют оценкам, которые в дальнейшем будем обозначать звездочкой (*). В общем виде результат определения значения энергетической характеристики $I^*(\gamma)$ представим в виде

$$I^*(\gamma) = C \cdot |W^K(x_i)|^2, \quad (9)$$

где C – соответствующий идеальный оператор усреднения; W^K – оператор конечного вейвлетного преобразования i -й реализации случайного процесса.

Из-за конечности входящих в оценку числа членов операторов усреднения измеренные оценки энергетических характеристик (5), (7), (8), получаемые с помощью разложения по базису ортогональных вейвлетных функций по виду (9), всегда будут смещенными и несостоятельными. При этом естественный интерес представляет сравнительный анализ погрешностей методов получения таких характеристик.

Алгоритмы оценок СПМ

Пусть $S = (s_1, \dots, s_N)$ – временной ряд, $N = 2^m$ для некоторого целого $m > 0$:

$$S = \{s_i\}_{i=0}^{N-1}. \quad (10)$$

Для временного ряда (10) конечной длины N выражение (2) преобразуется в конечную сумму:

$$W_s(\gamma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \sum_{i=0}^{N-1} s_i \int_i^{i+1} \psi\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right) dt. \quad (11)$$

Когда вопрос об обратимости преобразования не ставится, достаточно в (11) рассматривать только целые масштабные коэффициенты $\gamma = 1, 2, \dots, N$. Если при этом рассматривать целочисленные сдвиги от 0 до $N-1$ для τ , изменяющемуся в диапазоне от 1 до N , то временному ряду длины N будет поставлена в соответствие матрица вейвлет-спектра размером $N \times N$. Таким образом, особенностью анализа временного ряда в базисе вейвлетов является то, что представление спектральной функции по оси частот (масштабов) можно получить для каждого мгновенного значения его реализации.

Наиболее распространенный случай для преобразования дискретных сигналов – диадное вейвлет-преобразование, когда вычисление значений вейвлетного спектра осуществляется только для γ и τ вида

$$\gamma = 2^j, \quad \tau = k \cdot 2^j, \quad j, k \in Z,$$

то есть

$$\psi\left(\frac{t-\tau}{\gamma}\right) = \psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k). \quad (12)$$

В этом случае количество коэффициентов вейвлет-спектра с изменением параметра масштаба j изменяется. Для шкалы $j=1$ имеем $N/2$ коэффициентов диадного вейвлет-преобразования, а для любого j имеем $N/2^j$ коэффициентов в диапазоне $[0, N/2^j-1]$.

Будем считать, что временной ряд задан значениями функций, следующими друг за другом с постоянным шагом Δt :

$$s_i = s(t_i), \quad t_i = \Delta t \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

При единичном временном шаге $\Delta t=1$ выражение (11) с учетом (12) будет представлено в следующем виде:

$$W_s(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} s(i) \psi(2^{-j}i - k).$$

Погрешности оценок СПМ

При обработке конечного временного ряда s_N возникнут погрешности, обусловленные необходимостью получения оценок интегрального вейвлет-спектра $I^*(\gamma)$ на конечном временном интервале усреднения, а также погрешности, возникающие при применении определенного метода измерения этих оценок.

Сделаем допущение, что временной ряд имеет нулевое среднее и стационарен в широком смысле. Очевидно, что математическое ожидание вейвлет-спектра также равно нулю. В этом случае дисперсия для непрерывного вейвлет-преобразования временного ряда $x(t)$ определяется следующим образом [11]:

$$D(\gamma) = M \left[|W_x(\gamma, \tau)|^2 \right] = M \left[\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi \left(\frac{t-\tau}{\gamma} \right) dt \cdot \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \psi \left(\frac{u-\tau}{\gamma} \right) du \right],$$

где M – знак математического усреднения.

Для стационарного в широком смысле сигнала

$$D(\gamma) = M \left[\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(t-u) \psi \left(\frac{t-\tau}{\gamma} \right) \psi \left(\frac{u-\tau}{\gamma} \right) dt du \right],$$

где $R(\cdot)$ – автокорреляционная функция $x(t)$.

Используя теорему Винера-Хинчина и равенство (3), после несложных алгебраических операций получим [9]

$$D(\gamma) = \gamma \int_{\omega=-\infty}^{\infty} G(\omega) \left[\int_{y=-\infty}^{\infty} W(1, y) e^{j\omega y} dy \right] d\omega, \quad (13)$$

где $W(1, y)$ – вейвлет-преобразование от самого вейвлета; $G(\omega)$ – СПМ сигнала; $j=\sqrt{-1}$.

Формула (13) показывает взаимосвязь между СПМ сигнала и дисперсией вейвлет-преобразования и имеет простое объяснение: выражение в квадратных скобках эквивалентно полосовому фильтру, который пропускает те компоненты СПМ, кото-

рые содержатся около частоты, соответствующей масштабу γ .

Для того чтобы установить аналитическую связь между оценкой СПМ, полученной классическими методами [12, 13], и оценкой интегрального вейвлет-спектра, сделаем следующие дополнительные допущения.

Пусть имеется временной ряд S , состоящий из набора данных из N отсчетов белого нормального шума с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

С учетом того, что $M[W_s(\gamma, \tau)] = 0$, и используя свойство $M[s(i) \cdot s(l)] = \sigma^2 \delta(l-i)$, где δ – символ Кронекера, получим математическое ожидание оценки интегрального значения дисперсии вейвлет-спектра j -го масштаба:

$$M[\hat{D}(j)] = M \left[\frac{2^j}{N-2^j} \sum_{k=0}^{2^m N-1} \left[2^{-\frac{j}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} s(i) \psi(2^{-j}i - k) \right]^2 \right] = \frac{\sigma^2}{N-2^j} \left[\sum_{k=0}^{2^m N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \psi^2(2^{-j}i - k) \right]. \quad (14)$$

Сделаем следующее допущение по поводу используемого вейвлета: применяем вейвлет Хаара, квадрат коэффициентов которого на оси времени принимает только значения “1” или “0”. Тогда для (14) значение внутри квадратных скобок эквивалентно N . Окончательно, после принятых допущений

$$M[\hat{D}(j)] = \frac{N\sigma^2}{N-2^j}. \quad (15)$$

Для квадрата среднего квадратического отклонения оценки $\hat{D}(j)$

$$\varepsilon^2 = M \left[\left(\hat{D}(j) - M[\hat{D}(j)] \right)^2 \right]$$

рассмотрим его статистическую составляющую. Для этого требуется найти значение

$$M[\hat{D}^2(j)] = M \left[\left(\frac{2^j}{N-2^j} \right)^2 \sum_k 2^{-j} \sum_i \sum_n s(i) s(n) \psi(2^{-j}i - k) \psi(2^{-j}n - k) \times \sum_p 2^{-j} \sum_m \sum_l s(m) s(l) \psi(2^{-j}m - p) \psi(2^{-j}l - p) \right],$$

где суммирующие пределы остаются как раньше, но опускаются для упрощения записи. Оператор математического ожидания может быть внесен под сумму

$$M[\hat{D}^2(j)] = \left(\frac{1}{N-2^j} \right)^2 \sum_k \sum_p \sum_i \sum_n \sum_m \sum_l M[s(i) s(n) s(m) s(l)] \times \psi(2^{-j}i - k) \psi(2^{-j}n - k) \psi(2^{-j}m - p) \psi(2^{-j}l - p). \quad (16)$$

Если мы воспользуемся известным соотношением [11]

$$M[x_1 x_2 x_3 x_4] = M[x_1 x_2] M[x_3 x_4] + M[x_1 x_3] M[x_2 x_4] +$$

$$+ M[x_1 x_4] M[x_2 x_3] - 2\mu_{x_1} \mu_{x_2} \mu_{x_3} \mu_{x_4},$$

то в (16) есть четыре комбинации i, n, m, l , которые предоставляют ненулевой вклад в суммирование:

$$M[s(i)s(n)s(m)s(l)] = \begin{cases} 3\sigma^4 & \text{для } i = n = m = l; \\ \sigma^4 & \text{для } i = n, m = l, i \neq m; \\ \sigma^4 & \text{для } i = m, n = l, i \neq n; \\ \sigma^4 & \text{для } i = l, n = m, i \neq n; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (17)$$

Оценивая сумму (16), используя (17), получим

$$M[\hat{D}^2(j)] = \frac{(N^2 + 2^{j+1}N)\sigma^4}{(N - 2^j)^2}.$$

В результате, с учетом (15), определим дисперсию оценки дисперсии вейвлет-спектра:

$$D[\hat{D}(m)] = \frac{N2^{j+1}\sigma^4}{(N - 2^j)^2}. \quad (18)$$

Следует заметить, что провести анализ методических погрешностей результатов измерений оценок спектральных энергетических характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов на аналитической основе достаточно проблематично. Поэтому для получения методических погрешностей результатов измерений воспользуемся имитационным моделированием алгоритмов измерения спектральных энергетических характеристик с имитацией входных сигналов типа белый и красный шум [14].

Как уже отмечалось, многообразие способов построения вейвлетных функций позволяет получить различные виды вейвлетных преобразований. С нашей точки зрения, определенный интерес пред-

ставляет кратномасштабный анализ (КМА) с представлением ортонормированных базисных функций в диадной форме (12).

В соответствии с концепцией КМА, i -я реализация случайного процесса $X(t)$ может быть представлена в виде линейной комбинации грубой и дополнительной детальной форм представления [7]:

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0,m}^{(i)} \varphi_{n_0,m}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} d_{n,m}^{(i)} \psi_{n,m}(t),$$

где спектральные коэффициенты $a_{n_0,m}, d_{n,m}$ определяются из условия ортогональности базисных функций; $\varphi_{n_0,m}(t) = 2^{n_0/2} \varphi(2^{n_0}t - m)$ – множество смещенных во времени скейлинг-функций КМА на уровне n_0 ; $\psi_{n,m}(t) = 2^{n/2} \psi(2^n t - m)$ – множество базисных вейвлет-функций, которые образуются смещением и масштабированием материнской вейвлетной функции.

Моделирование проводилось в системе компьютерной математики MATLAB с использованием пакетов Wavelet Toolbox и Simulink. Результаты моделирования представлены на рис. 1.

Относительное среднее квадратическое отклонение полученных результатов оценок спектральной плотности мощности от теоретических значений составило при вейвлетном преобразовании 0,013 для белого и 0,23 для красного шумов, а при использовании преобразования Фурье – 0,016 и 0,26 соответственно.

Таким образом, усреднение по времени и усреднение по частоте при оценке параметров случайных процессов типа белый и красный шум по одной реализации дало приблизительно одинаковые результаты.

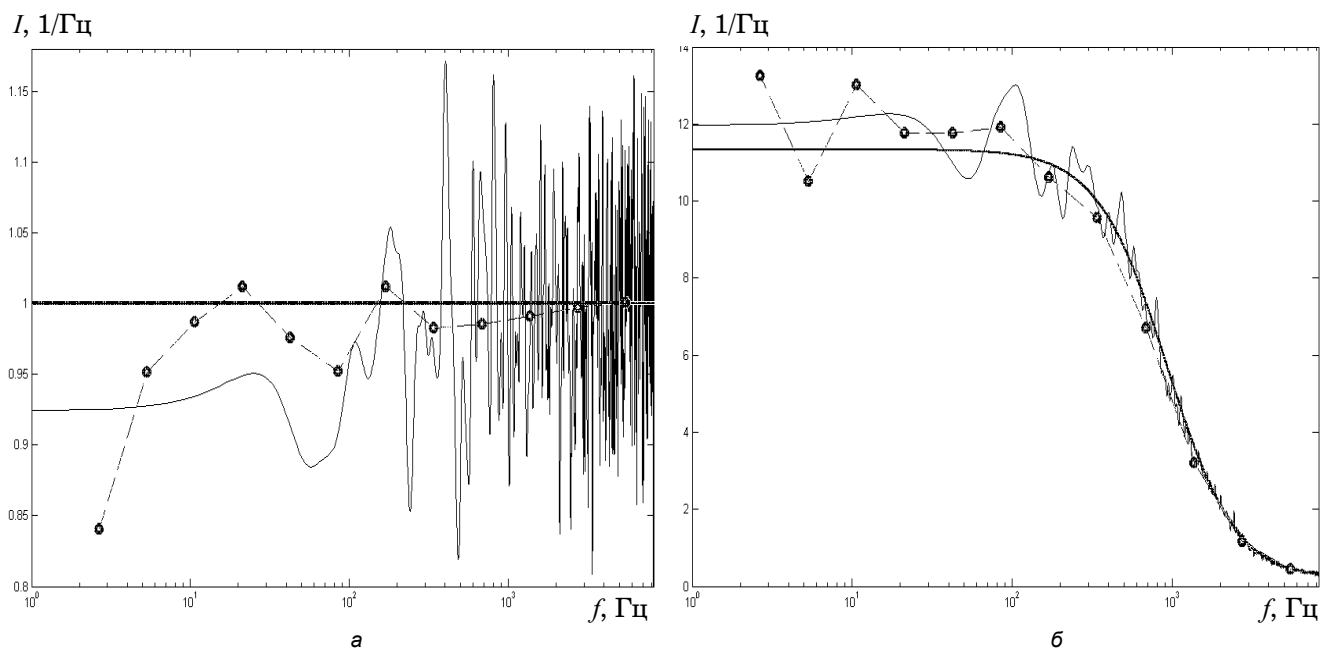


Рис. 1. Спектральная плотность мощности белого (а) и красного (б) шумов: — — теоретическое значение; — — преобразование Фурье (усреднение по оси частот, окно Хэмминга); —●— — диадное вейвлетное преобразование (усреднение по оси времени, вейвлет Добеши db8)

Типовые структуры измерений

Относительная свобода в выборе вейвлетных функций позволяет получить различные виды вейвлетных преобразований. Наиболее широкое распространение получили интегральное вейвлетное преобразование, вейвлетные ряды, вейвлетные рамки (фреймы), ортонормальные вейвлетные базисы.

При этом на основании (4) и (9), используя подход, изложенный в [15], можно сформировать типовую структуру измерителя (анализатора) вейвлетного энергетического спектра (рис. 2).

В состав данного функционального преобразователя помимо устройств, реализующих операции вейвлетного преобразования W^K , усреднения C , входят устройство возведения в квадрат K_B и генератор вейвлетных функций ГВФ. Аналогичным образом можно построить типовые структуры, реализующие алгоритмы (5)–(8), которые помогут решить метрологические проблемы, возникающие при рассмотрении принципов построения и вариантов аппаратной реализации вейвлетных анализаторов спектров случайных сигналов.

Например, для получения оценок спектральной плотности мощности флюктуаций фазы мер частоты использовался метод фазового детектора [1].

Структурная схема измерительной установки приведена в [16]. В системе компьютерной математики (СКМ) MATLAB с помощью быстрого преобразования Фурье осуществляется оценка спектрального состава выходного сигнала с разбега “фазовый детектор” компаратора Ч7-42. Для измерения оценок спектральных характеристик сигналов измерительной информации в базисе вейвлетов в СКМ MATLAB с помощью пакета Simulink согласно (9) смоделирован вейвлетный анализатор спектра, структурная схема которого представлена на рис. 3.

Результаты обработки экспериментальных данных с применением базиса Фурье и вейвлет-базиса db8 представлены на рис. 4.

Допустим, что СПМ такого ряда вычисляется периодограммным методом с K неперекрывающимися окнами. Это предполагает смещенную оценку СПМ со значением дисперсии σ^2/K и частотным разрешением $2K/N$. Смещение может быть уменьшено, что является альтернативой частотному разрешению.

Выводы

Полученные выражения (5)–(8), во-первых, адекватны существу измерительной задачи, позволяя получить оценки спектральных характе-

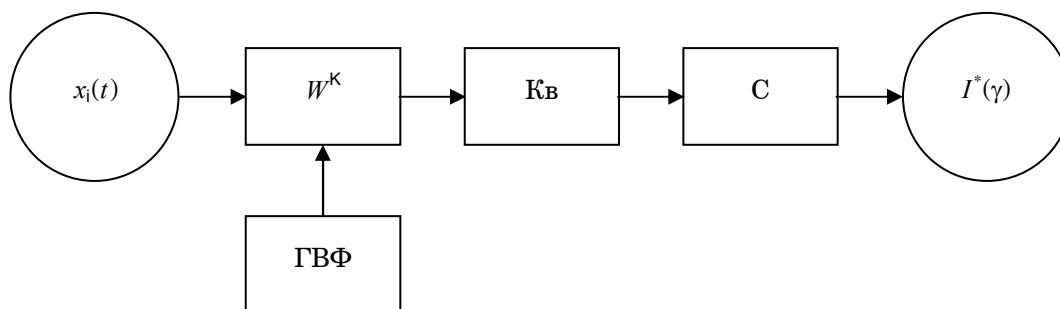


Рис. 2. Типовая структура анализатора вейвлетного спектра

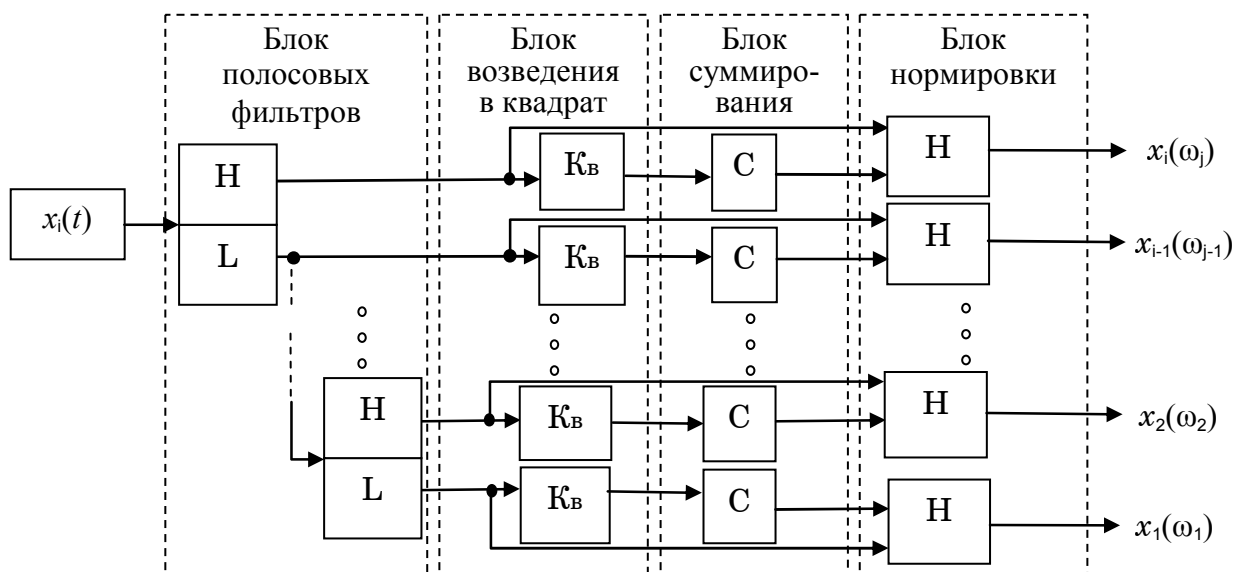


Рис. 3. Структурная схема вейвлетного анализатора спектра

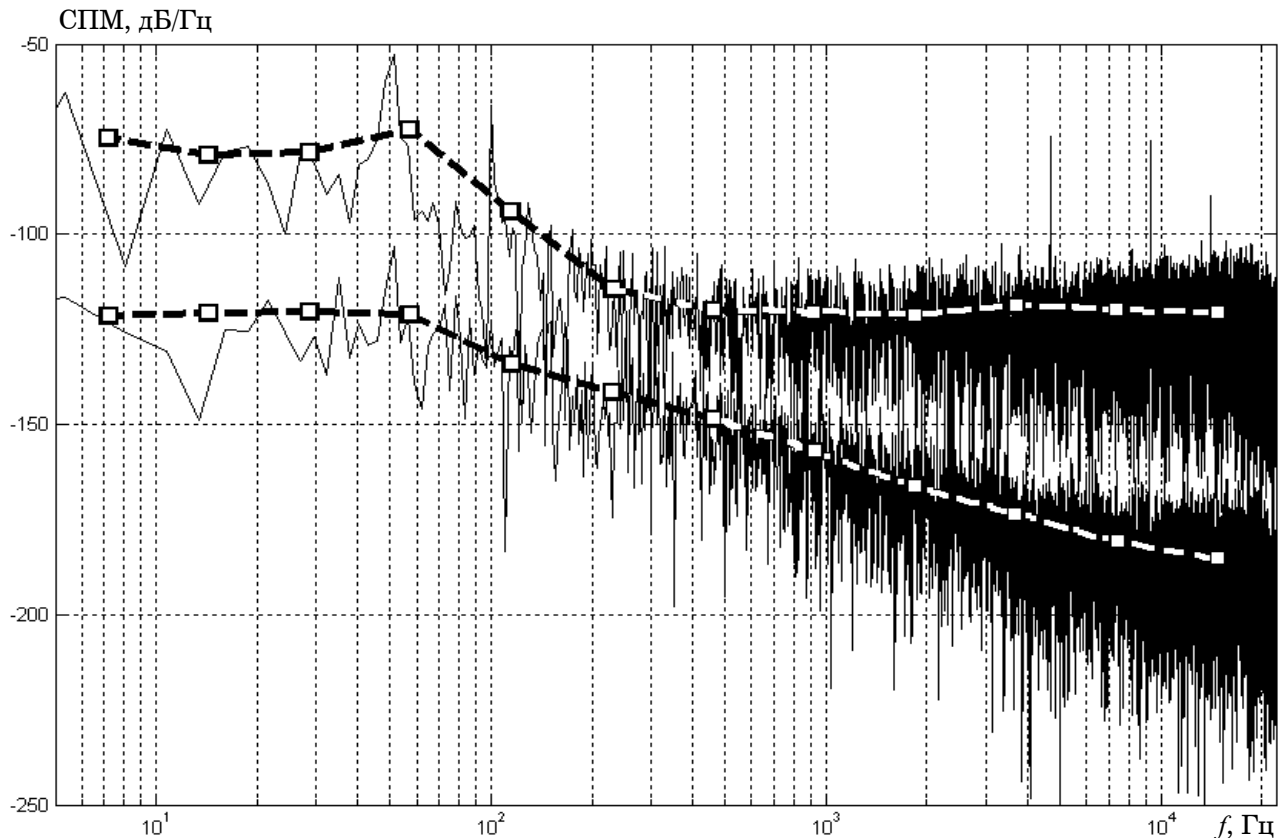


Рис. 4. Результаты обработки экспериментальных данных: верхний график – стандарт частоты и времени СЧВ-74; нижний график – собственные шумы измерительной установки (преобразование Фурье – сплошная линия, вейвлет-преобразование – пунктирная линия)

ристик случайных процессов в базисе вейвлетов с использованием реализаций и последовательностей, во-вторых, открывают широкие возможности использования методов и результатов математической статистики за счет применения идеальных операторов усреднения. Кроме того, показано, что интегральное распределение энергии вейвлетного спектра дает объективную оценку спектральной плотности временного ряда, моделирующего как белый, так и красный шум (авторегрессионный процесс с единичным запаздыванием).

Для дисперсии вейвлет-спектра (15) получена смещенная оценка, которая при $N \rightarrow \infty$ и фиксированном j принимает значения σ^2 , то есть оценка интегрального по длительности сигнала квадрата вейвлет-спектра является состоятельной. Если заведомо получен сигнал со свойствами белого шума, то можно добиться заданного смещения на заданном масштабе анализа, увеличивая длину реализации сигнала. Качественно можно ожидать увеличения смещения на больших масштабах независимо от свойств сигнала для различных типов вейвлетов.

Дисперсия оценки интегрального вейвлет-спектра (18) возрастает с переходом к анализу более мелких деталей сигнала, то есть с ростом величины масштабов вейвлет-функции. Однако при фиксированном масштабе с ростом членов временного ряда дисперсия стремится к нулю, и данная оцен-

ка статистически сходится к оцениваемой характеристике.

С помощью вейвлет-базиса образуются более сглаженные оценки спектральной плотности, то есть при наличии одинаковой выборки данных можно получить оценки с меньшей дисперсией и с меньшими затратами вычислительных ресурсов. Таким образом, вейвлет-преобразование позволяет получить эффективные и состоятельные оценки измерений характеристик случайных процессов.

Дальнейшего изучения требуют вопросы получения несмещенной оценки и повышения спектрального разрешения.

В перспективе рассмотренный подход к решению задачи описания измерительных процедур и результатов измерений оценок спектральных энергетических характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов может быть использован при разработке современной измерительной техники и изучении ее возможностей.

Список литературы

1. Кварцевые и квантовые меры частоты / под ред. Б.И. Макаренко. – М.: МО СССР, 1989. – 508 с.
2. Чирков А.Г. Современная теория стабильности прецизионных генераторов / А.Г. Чирков,

- Б.Г. Матисов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. – 355 с.
3. Клейман А.С. Спектральная плотность мощности фазы в базисе вейвлетов / А.С. Клейман, О.В. Романько // Метрологія та вимірювальна техніка: IV Міжнар. наук.-техн. конф. “Метрологія–2004”, 12–14 жовтня 2004 р., Харків, наук. праці: в 2 т. Т. 1. – Харків: ННЦ “Інститут метрології”, 2004. – С. 198–200.
 4. Новиков Л.В. Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов / Л.В. Новиков // Научное приборостроение. – 2000. – Т. 10, № 3. – С. 57–64.
 5. Brogioli D. Real-time wavelet-transform spectrum analyzer for the investigation of $1/f^\alpha$ noise / D. Brogioli, A. Vailati // Review of scientific instruments. – 2003. – Vol. 74 (4). – P. 2583–2592.
 6. Li Ta-Hsin. Wavelet spectrum and its characterization property for random processes / Ta-Hsin Li, H.-S. Oh // IEEE transactions on information theory. – 2002. – Vol. 48, № 11. – P. 2922–2937.
 7. Chui K. Wavelets – a tutorial in theory and application / K. Chui. – New York: Academic Press, 1992. – 603 p.
 8. Клейман А.С. Научные основы измерения спектральных энергетических характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов / А.С. Клейман, В.Н. Романько, О.В. Романько // Системи обробки інформації. – Харків: ХВУ, 2005. – Вип. 5 (45). – С. 29–34.
 9. Клейман А.С. Распределение энергии сигнала по шкале вейвлетного преобразования / А.С. Клейман, О.В. Романько // Системи обробки інформації. – Харків: ХВУ, 2004. – Вип. 11 (39). – С. 75–78.
 10. Клейман А.С. Оценка спектральных энергетических характеристик случайных процессов в базисе вейвлетов / А.С. Клейман, В.Н. Романько, О.В. Романько // Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития: 2-й Междунар. радиоэлектронный форум МРФ’2005, 19–23 сентября 2005 г., Харьков: сб. науч. трудов: в 7 т. Т. 7: Метрология и измерительная техника: Междунар. конф. МКМИТ’2005. – Харьков: АНПРЭ, ХНУРЭ, 2005. – С. 184–187.
 11. Бендат Дж. Измерение и анализ случайных процессов: пер. с англ. / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1971. – 408 с.
 12. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл. – М.: Мир, 1990. – С. 85–209.
 13. Воллернер Н.Ф. Аппаратурный спектральный анализ сигналов / Н.Ф. Воллернер. – М: Сов. радио, 1977. – 208 с.
 14. Короновский А.А. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения / А.А. Короновский, А.Е. Храмов. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.
 15. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений / Э.И. Цветков. – Л.: Энергоатомиздат. 1986. – 256 с.
 16. Клейман О.С. Використання комп’ютера для визначення частотних характеристик прецизійних мір частоти / О.С. Клейман, В.М. Романько, О.В. Романько // Український метрологічний журнал. – 2003. – Вип. 1. – С. 31–34.