



УДК 621.371:621.039

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ДЕКРЕМЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ МЕТОДОМ АВТОРЕГРЕССИОННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В.Н. Романько, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, директор научного центра ННЦ “Институт метрологии”, г. Харьков

Э.А. Корецкий, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник лаборатории ННЦ “Институт метрологии”, г. Харьков

В.В. Скляров, кандидат технических наук, ученый секретарь ННЦ “Институт метрологии”, г. Харьков



В.Н. Романько

Э.А. Корецкий

В.В. Скляров

Показана эффективность использования параметрических методов для определения резонансных частот и декрементов затухания собственных механических колебаний объекта при проведении динамических испытаний.

There was shown the efficiency of parametric methods for the determination of resonance frequencies and damping decrements of inherent mechanical vibrations of the object during dynamic tests.

Введение

Для обеспечения безопасной эксплуатации большого количества разнообразных сложных технических конструкций, работающих порой в экстремальных условиях, необходим постоянный мониторинг их технического состояния методами неразрушающего контроля [1–6]. При этом важнейшими динамическими характеристиками сложных технических изделий являются их собственные частоты и декремент затухания, которые в соответствии с [7] определяются методом свободных колебаний (МСК).

МСК заключается в анализе затухающих акустических колебаний, возбуждаемых в объекте контроля. Он успешно работает на объектах сложной конфигурации, не требует расходных материалов, подготовки поверхности и применения сложной аппаратуры [8–11].

Однако длительное время МСК широко не развивался и использовался в основном в различного рода анализаторах дефектов слоистых сред, то есть работал в узкой области применения. Это объясня-

ется, прежде всего, тем фактом, что существовавшие на тот момент преобразователи акустического сигнала в электрический, аналоговые спектральные анализаторы, индикаторы результатов измерений и другие составные части измерительных комплексов не обеспечивали требуемой достоверности измерений. Как оказалось, физика процессов, происходящих при ударе и последующем распространении, детектировании затухающих акустических колебаний, оказалась намного сложнее, чем считалось ранее. Старые конструктивные решения и методы обработки сигналов не позволяли выделить устойчивую информативную составляющую в сложном сигнале, полученном при преобразовании затухающей акустической волны. И только в наше время, с развитием современных технологий во всех направлениях, оказалось возможным вдохнуть новую жизнь в давно известный метод на совершенно новом уровне [12–15].

В ННЦ “Институт метрологии” для определения резонансных частот и декрементов затухания собственных механических колебаний объекта испытаний разработан комплекс оборудования, позволяющий фиксировать результаты в электронном виде. Естественно, что потребовалась разработка методики компьютерной обработки результатов исследований, позволяющей усовершенствовать рекомендации, приведенные в [7].

В данной работе исследуются эффективность использования параметрических методов для определения резонансных частот и декрементов затухания собственных механических колебаний объекта испытаний и возможность повышения частотного разрешения при ограниченной выборке.

Выбор метода обработки экспериментальных результатов

Алгоритм МСК реализует накопление временных рядов измерений в i -й момент затухающих колебаний [16]:

$$A_i = A e^{-ht_i} \cdot \sin(\omega_i t_i + \alpha);$$

$$A_{i+1} = A e^{-h(t_i+T_1)} \cdot \sin[\omega_i(t_i + T_1) + \alpha] =$$

$$= Ae^{-h(t_i+T_1)} \cdot \sin(\omega_1 t_i), \quad (1)$$

где A – максимальная амплитуда колебаний; α – начальная фаза; t_i – время, соответствующее i -му максимуму вертикальной координаты колебания; h – коэффициент демпфирования, характеризующий свойства изделия; T_1 – период затухающих колебаний.

Из уравнения (1) определяют резонансную частоту собственных механических колебаний объекта испытаний ω_0

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}},$$

отношение амплитуд

$$\Delta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{hT_1},$$

логарифмический декремент колебаний $\delta = \ln \Delta = hT_1$.

При вычислении δ число анализируемых колебаний выбирается согласно рекомендациям [7]. При этом результаты испытаний в большой степени зависят от так называемого “человеческого фактора”, то есть от квалификации и опыта оператора.

С другой стороны, охарактеризовать частотный состав полученного в результате исследований измерительного сигнала позволяет спектральный анализ. Оценивание спектральной плотности мощности или просто спектра дискретизованных детерминированных и случайных процессов обычно выполняется с помощью процедур, использующих быстрое преобразование Фурье (БПФ). Однако в нашем случае мы имеем дело с анализом коротких записей данных, что приводит к неудовлетворительным результатам применения Фурье-анализа и других непараметрических методов оценивания спектральной плотности мощности сигналов, так как разрешающая способность этих методов зависит от длительности выборки. Второе ограничение обусловлено неявной весовой обработкой данных при вычислении БПФ. Взвешивание проявляется в виде “утечки” в частотной области, то есть энергия главного лепестка спектральной линии “утекает” в боковые лепестки, что приводит к наложению и искажению спектральных линий других присутствующих сигналов.

При этом спектральные линии слабых сигналов могут маскироваться боковыми лепестками спектральных линий более сильных сигналов. Правильный выбор функции окна, значения которой спадают на краях, позволяет ослабить утечку в боковые лепестки, однако лишь за счет снижения разрешающей способности [17–20].

Для преодоления указанных недостатков обычно используют параметрические методы, позволяющие выбрать функцию, аппроксимирующую реальный набор данных. Применение параметрических методов предполагает знание априорной

информации, достаточной для построения параметрической модели исследуемого процесса. Существуют различные методы построения модели временного ряда. Однако в технической литературе наибольшее внимание уделяется авторегрессионным (АР) процессам по двум удовлетворяющим нас причинам. Во-первых, АР-модель применяется для спектрального оценивания, если необходимы спектры с острыми пиками, что часто связывается с высоким частотным разрешением. Кроме того, оценки АР-параметров получаются, в отличие от других моделей, из решения системы линейных уравнений, что снижает погрешности оценки параметров [21–23].

Модель авторегрессии основана на корреляционной зависимости отсчета случайного процесса в текущий момент времени с некоторым конечным или бесконечным числом отсчетов в предшествующие моменты времени. Корреляция выражается в наличии регрессии текущего отсчета случайного процесса на предыдущие. Такой вид регрессии называется авторегрессией. Уравнение АР может быть записано в следующем виде [21]:

$$X_t = \sum_{j=1}^p A_j X_{t-j} + e_t,$$

где A_j – коэффициенты АР; e_t – некоррелированные отсчеты типа белого шума; p – порядок АР-модели.

Величина

$$\tilde{X}_t = \sum_{j=1}^p A_j X_{t-j}$$

называется предсказанием случайной величины. Разность между текущим значением отсчета и его предсказанием носит название ошибки предсказания $e_t = X_t - \tilde{X}_t$.

Спектр процесса АР

Процесс АР можно рассматривать как выход X_t фильтра, на вход которого подаются некоррелированные отсчеты e_t . Используя теорию Z-преобразования, можно записать [22]

$$X_t(Z) = H(Z) e_t(Z), \quad (2)$$

где $H(Z)$ – передаточная функция фильтра.

Из уравнения (1) следует соотношение

$$e_t(Z) = A(Z) X_t(Z), \quad (3)$$

где $A(Z)$ – Z-преобразование АР-процесса, которое можно представить в виде

$$A(Z) = \sum_{i=0}^p A_i Z^{-i}, \quad A_0 = 1. \quad (4)$$

Из (2) и (3) легко получить выражение для передаточной функции фильтра:

$$H(Z) = \frac{1}{A(Z)}.$$

Используя соотношения (2) и (4), найдем формулу, описывающую связь дисперсии АР-процесса на выходе фильтра и дисперсии некоррелированного процесса e_t на входе:

$$\rho_x^2(Z) = |H(Z)|^2 \rho_e^2(Z) = \frac{\rho_e^2(Z)}{|A(Z)|^2}.$$

Чтобы перейти от передаточной функции к частотной характеристике, необходимо сделать замену $Z = \exp(j2\pi fT)$ (T – интервал дискретизации исходного временного ряда). Тогда, используя (4), получим выражение для спектра АР-процесса:

$$|S(f)|^2 = \frac{\rho_e^2}{\left|1 - \sum_{i=1}^p A_i \exp(-ji2\pi fT)\right|^2}. \quad (5)$$

Формула (5) применяется при построении алгоритмов параметрического спектрального оценивания. В качестве параметров, полностью характеризующих спектральную оценку процесса, выступают коэффициенты АР и порядок модели.

Поскольку наилучшее значение для порядка модели на практике, как правило, не известно, то приходится испытывать несколько порядков модели. Базируясь на этом, вводят тот или иной критерий ошибки, по которому затем определяется требуемый порядок модели. Если порядок модели выбран слишком малым, получаются крайне сглаженные спектральные оценки, если излишне большим – увеличивается разрешение, но появляются ложные спектральные пики. Таким образом, применительно к авторегрессионному спектральному оцениванию выбор порядка модели эквивалентен компромиссу между разрешением и величиной дисперсии для классических методов спектрального оценивания. Из этого следует необходимость увеличения порядка спектра до тех пор, пока вычисляемая ошибка предсказания не достигнет минимума. Однако практически для всех методов параметрического спектрального оценивания (методов Берга, ковариационного, модифицированного ковариационного и т.д.) величина дисперсии ошибки предсказания монотонно уменьшается при увеличении порядка модели. Следовательно, одной дисперсии обычно недостаточно для того, чтобы определить момент окончания процедуры изменения порядка, пока не известно некоторое значение этого порядка, при дальнейшем изменении которого скорость изменения дисперсии ошибки резко снижается.

Для выбора порядка АР-модели предложено много различных критериев – своего рода целевых функций. Два подобных критерия были предложены Акайке [22]. Первый из них – это окончательная ошибка предсказания (ООП). ООП для АР-процесса определяется выражением

$$ООП(p) = \hat{\rho}_p \frac{N + (p + 1)}{N - (p + 1)}, \quad (6)$$

где N – число отсчетов данных; p – порядок АР-процесса; $\hat{\rho}_p$ – оценочное значение дисперсии белого шума (которая будет использоваться в качестве ошибки линейного предсказания).

Выбирается такое значение порядка, при котором величина ООП минимальна. Для идеальных АР-процессов этот критерий показывает отличные результаты, однако для реальных сигналов он оказывается излишне консервативным и приводит к выбору заниженного порядка спектра.

Второй критерий Акайке основан на методике максимального правдоподобия и получил название информационного критерия Акайке (ИКА). Согласно этому критерию, порядок модели выбирается посредством минимизации некоторой информационной функции. ИКА будет определяться следующим выражением:

$$ИКА(p) = N \cdot \ln(\hat{\rho}_p) + 2p.$$

И здесь выбирается порядок спектра, при котором минимизируется ИКА.

На рис. 1 показан типичный пример, иллюстрирующий выбор оптимального порядка параметрического спектра согласно информационному критерию Акайке. Анализ рисунка показывает, что выбор порядка параметрической модели более 50 не даст информационного выигрыша, но может привести к существенному увеличению вычислительных затрат.

Определение коэффициента и декремента затухания

Связь между частотой собственных колебаний, резонансной частотой вынужденных колебаний и декрементом затухания покажем на примере модели АР 2-го порядка. Эта модель описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка [24]

$$\ddot{X}(t) + 2h\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = e(t), \quad (7)$$

где ω_0 – собственная частота; h – коэффициент демпфирования; $e(t)$ – случайное воздействие типа белого шума.

Процесс $X(t)$, удовлетворяющий уравнению (6), характеризуется автокорреляционной функцией, которая в дискретном виде описывается выражением [24]

$$\rho_i = \frac{e^{-hiT} \sin(\omega_h i T + \varphi)}{\sin \varphi},$$

где $\sin \varphi = \omega_h / \omega_0$, $\omega_h = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ – собственная частота с поправкой на демпфирование.

Известно, что АР-процессу 2-го порядка соответствует характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 - A_1 \lambda - A_2 = 0.$$

АР-процесс 2-го порядка имеет одномодовый спектр (один спектральный пик), если корни характеристического уравнения (7) комплексно-сопряженные. В этом случае они имеют вид

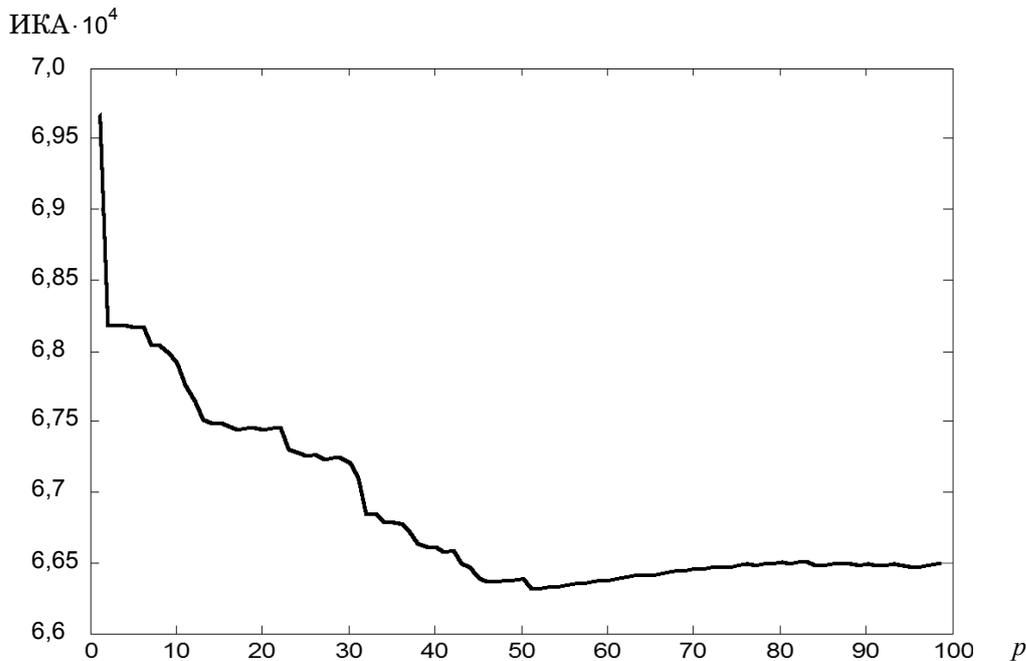


Рис. 1. Пример выбора оптимального порядка АР-спектра по информационному критерию Акайке

$$\lambda_{1,2} = e^{-hT} e^{\pm j\omega_0 T}$$

Между коэффициентом демпфирования h и шириной моды по уровню половинной мощности $\Delta\omega$ существует связь

$$h = \frac{\Delta\omega}{2}$$

Таким образом, каждому спектральному пику спектра исследуемого сигнала в верхней части комплексной Z -плоскости соответствует корень характеристического уравнения. Если координаты корня представить в полярной системе координат, то угол положения корня будет определять его частоту на частотной оси спектра, а модуль корня – коэффициент демпфирования или декремент затухания или же ширину полосы частот по уровню половинной мощности, которую занимает данный пик.

Исходя из вышесказанного, можем найти связь между декрементом затухания d каждой моды и соответствующим ей модулем корня:

$$d = -\frac{f_d}{f_0} \log |\lambda|, \quad (8)$$

где f_d – частота дискретизации исследуемого временного ряда; f_0 – частота свободных колебаний, которая определяется, исходя из координаты корня, следующим образом:

$$f_0 = \frac{\theta(\lambda) f_d}{2\pi},$$

где $\theta(\lambda)$ – угловая координата корня в радианах.

Метод определения декремента по формуле (8) отлично работает в случае идеальных (смоделированных) АР-процессов. Для реальных сигналов он дает несколько заниженные значения декремента,

поэтому в этом случае целесообразно определять декремент по ширине спектрального пика соответствующего колебания, то есть

$$d = hT_p = \frac{2\pi\Delta f T_p}{2} = \frac{\pi\Delta f}{f_p},$$

где T_p и f_p – период и резонансная частота колебания соответственно; Δf – ширина спектрального пика по уровню половинной мощности.

Статистическая обработка результатов измерений

При спектральной обработке всех имеющихся в наличии временных реализаций исследуемых сигналов и формировании окончательной оценки частотных составляющих следует учитывать статистическое распределение частот по всем выборкам, принимая во внимание оцениваемый уровень мощности каждой частотной составляющей в заданном диапазоне, например, 0...30 Гц.

Очевидно, что при определении окончательной оценки частоты каждого спектрального пика более целесообразно использовать не просто среднее значение частот максимумов, полученных из разных реализаций, а делать средневзвешенную оценку с учетом уровней мощностей для соответствующих частотных максимумов.

Для этого целесообразно построить некую спектрограмму распределения для всех выявленных спектральных максимумов с учетом их определенных уровней мощности в каждой реализации. В результате для каждого исследуемого изделия мы получим типичную спектрограмму, один из примеров которой представлен на рис. 2. На рисунке приведены все выявленные спектральные максимумы для трех координатных осей для вер-

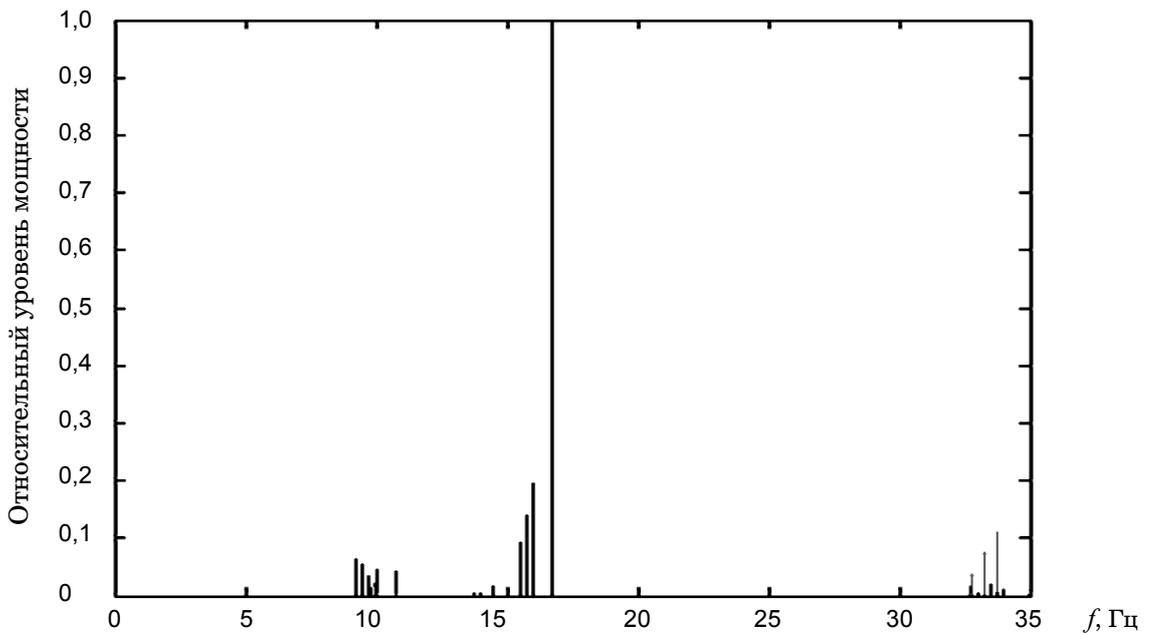


Рис. 2. Спектрограмма для оценки частоты нормированных спектральных максимумов

тикального и горизонтального направлений возбуждения.

Проверка эффективности предложенного метода спектрального оценивания и оценка его точностных характеристик производились методом статистического моделирования на ПЭВМ. Методами статистического моделирования генерировались выборки сигналов с заданными значениями резонансной частоты и декремента затухания d и смешивались со случайным белым шумом с заданным соотношением по мощности.

На рис. 3 приведены зависимости относительной погрешности определения резонансной частоты

от соотношения сигнал/шум q . Анализ рисунка свидетельствует о том, что при соотношениях сигнал/шум больше 25-ти, возможно достичь погрешности определения резонансной частоты не более 0,1 %.

Очевидно, что при проведении экспериментальных исследований для определения окончательной оценки частоты каждого спектрального пика более целесообразно использовать значение, которому соответствует максимальный уровень мощности, так как в этом случае мы имеем максимально возможное соотношение сигнал/шум, а значит и наименьшую погрешность определения

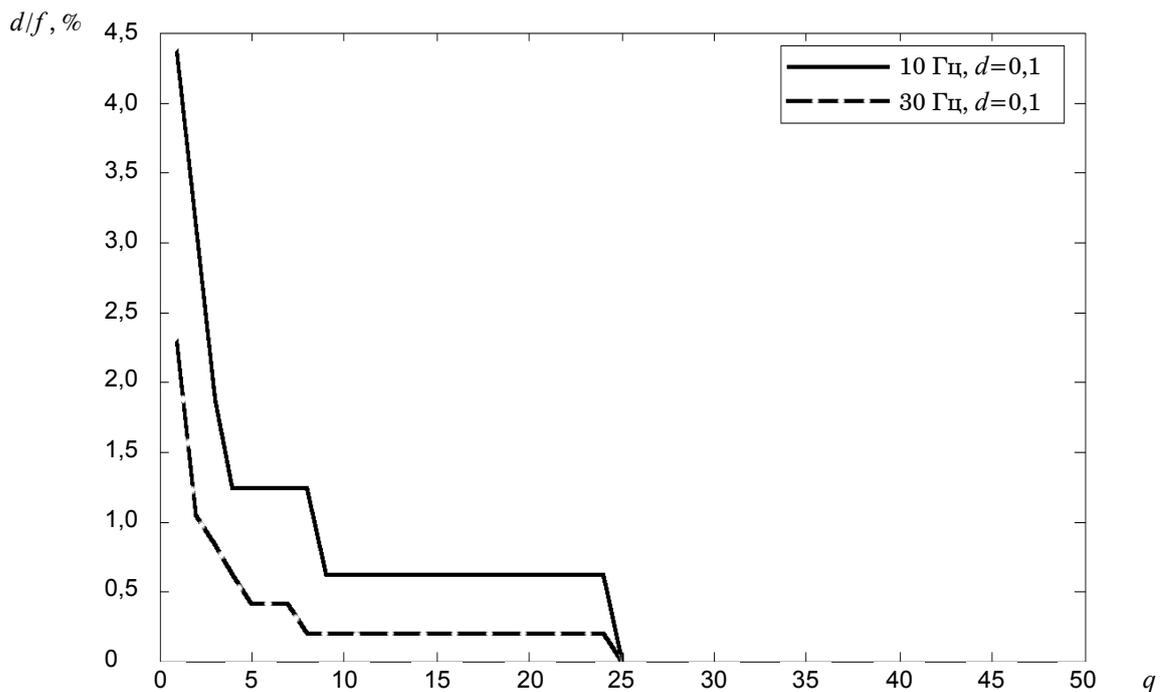


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности определения резонансной частоты от соотношения сигнал/шум

частоты. Кроме того, максимальный уровень отклика резонансной частоты может означать наилучшие условия для возбуждения, которые проявились именно в этой временной реализации.

Весь процесс математической обработки результатов динамических испытаний оборудования реализован в программной среде Matlab 7.0 с использованием стандартных процедур этой среды.

Выводы

При использовании ограниченной выборки отсчетов измерительного сигнала АР-спектральное оценивание имеет ряд преимуществ перед классическими методами спектрального оценивания. Прежде всего, авторегрессионные методы по сравнению с непараметрическими методами спектрального оценивания позволяют улучшать или сохранять высокое разрешение без значительного ухудшения устойчивости спектральных оценок.

Эффективность разработанной методики определения собственных частот и декрементов затухания была подтверждена при проведении целого ряда экспериментов, проведенных специалистами ННЦ "Институт метрологии" по исследованию динамических характеристик конструкций различной конфигурации.

Список литературы

1. *Белазовский М.Я.* Неразрушающие методы контроля / М.Я. Белазовский. – М.: Машиностроение, 1964. – 43 с.
2. *Глаговский Б.А.* Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении / Б.А. Глаговский, И.Б.Московенко. – Л.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
3. *Биргер И.А.* Техническая диагностика / И.А. Биргер. – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.
4. *Азовцев А.Ю.* Новое поколение систем диагностики и прогнозирования технического состояния / А.Ю. Азовцев, А.В. Барков. – СПб.: Изд-во АО ВАСТ, 1994. – 157 с.
5. *Алиев Т.А.* Экспериментальный анализ / Т.А. Алиев. – М.: Машиностроение, 1991. – 272 с.
6. *Баранов В.М.* Акустические измерения в ядерной энергетике / В.М. Баранов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 320 с.
7. Методы испытаний на стойкость к механическим внешним воздействующим факторам машин, приборов и других технических изделий. Определение динамических характеристик конструкций: ГОСТ 30630.1.1-99. – [Дата введения 2002-07-01]. – М.: Изд-во стандартов, 2001. – 24 с. – (Государственный стандарт Российской Федерации).
8. Инженерные методы исследования ударных процессов / Г.С. Батуев, Ю.В. Голубков, А.К. Ефремов, А.А. Федосов. – М.: Машиностроение, 1977. – 152 с.
9. *Выборное Б.И.* Ультразвуковая дефектоскопия / Б.И. Выборное. – М.: Металлургия, 1985. – 256 с.
10. *Кайно Г.* Акустические волны: Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов: пер. с англ. / Г. Кайно. – М.: Мир, 1990. – 656 с.
11. *Московенко И.Б.* Исследования физико-механических свойств материалов и изделий по частотам собственных колебаний / И.Б. Московенко, Л.Я. Славина, Е.З. Коварская // Физика и техника ультразвука: науч.-техн. конф., 9–11 июня 1997 г., СПб.: тез. докл. – СПб., 1997. – С. 240–242.
12. *Рабинер Л.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М.: Мир, 1978. – 276 с.
13. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов / под ред. С. Гуна, У. Уайтхауса, Т. Кайлета. – М.: Мир, 1989. – 354 с.
14. *Бендат Д.* Прикладной анализ случайных данных / Д. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 285 с.
15. *Оппенгейм А.* Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М.: Техносфера, 2006. – 312 с.
16. *Ильин М.М.* Теория колебаний / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов; под ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 272 с.
17. *Дженкинс Г.М.* Спектральный анализ и его приложения / Г.М. Дженкинс, Д.Г. Ватс. – М.: Мир, 1971. – Вып. 1. – 317 с.; 1972. – Вып. 2. – 286 с.
18. *Кей С.М.* Современные методы спектрального анализа. Обзор / С.М. Кей, С.Л. Марпл // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69, № 11. – С. 5–51.
19. *Хэррис Ф.* Использование окон при гармоническом анализе методом ДПФ / Ф. Хэррис // Там же. – 1978. – Т. 66, № 1. – С. 18–49.
20. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие для вузов / А.Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2002. – 381 с.
21. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. / С.Л. Марпл-мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
22. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов: прогноз и управление: пер. с англ. / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 237 с.
23. *Burg I.P.* Maximum Entropy Spectral Analysis / I.P. Burg // Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists. – Oklahoma City, Okla, October 1967. – P. 134–147.
24. *Кармалита В.А.* Цифровая обработка случайных колебаний / В.А. Кармалита. – М.: Машиностроение, 1986. – 280 с.