

## ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ КРИТЕРІЇВ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТЕХНІЧНОГО СТАНУ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

**В.М. Чинков,** доктор технічних наук, професор Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба  
**С.В. Герасимов,** кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба



В.М. Чинков



С.В. Герасимов

*Запропоновано та досліджено критерії синтезу оптимальних вимірювальних сигналів для контролю параметрів систем автоматичного управління. Обґрунтовано, що розглянуті критерії зводяться до єдиного, який пропонується використовувати для знаходження параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу, що застосовується для визначення технічного стану систем автоматичного управління.*

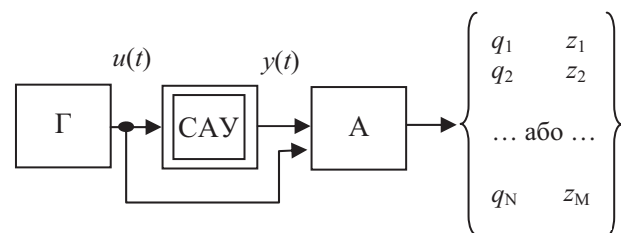
*The criteria of optimal measuring signals synthesis to control the parameters of the systems of automatic control are proposed and investigated. It is proved that the considered criteria are reduced to one which is proposed to find parameters of the optimal entrance measuring signal applied to the technical condition determination of the systems of automatic control.*

Експлуатація системи автоматичного управління (САУ) за технічним станом передбачає проведення операцій з визначення, діагностування та прогнозування її реального (фактичного) стану протягом життєвого циклу. Для цього за допомогою засобів вимірювальної техніки проводять безперервний або періодичний контроль параметрів технічного стану САУ.

Основою визначення технічного стану САУ є дослідження її динамічних характеристик [1–3] за узагальненою схемою, наведеною на рисунку. За цією схемою на вхід САУ діють відомим вимірювальним (тестовим, стимулюючим, випробувальним) сигналом  $u(t)$ , який формується генератором тестових сигналів ( $\Gamma$ ) і має певні характеристики.

Під впливом вхідного вимірювального сигналу  $u(t)$  на виході САУ утворюється вихідний сигнал (сигнал-відгук)  $y(t)$ , або реакція певної форми залежно від форми вхідного сигналу та параметрів САУ. Вхідний вимірювальний сигнал  $u(t)$  та вихідний сигнал  $y(t)$  САУ подаються в аналізатор ( $A$ ), за допомогою якого визначаються параметри системи  $q_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , де  $N$  – кількість параметрів контролю системи, або апостеріорні параметри  $z_i$ ,  $i = \overline{1, M}$ , де  $M$  – кількість значень  $i$ -го параметра, отримана після проведення контролю системи (апостеріорна кількість параметрів контролю), яка дозволяє визначити технічний стан системи.

При визначенні технічного стану САУ важливе місце займають методики та методи проведення контролю. Тому синтез оптимальних вхідних вимірювальних сигналів для дослідження динамічних характеристик САУ при її експлуатації за технічним станом є актуальною науковою проблемою.



Структурна схема контролю

Розглянемо САУ, математичний оператор  $\Phi(\{u\})$  якої визначає її реакцію  $y(t)$  у момент часу  $t$  на вхідний вимірювальний сигнал  $u(t)$ . Оператор  $\Phi(\{u\})$  залежить від параметрів контролю САУ  $q_j$  і в загальному випадку може бути нелінійним. Отже, реакція системи є функцією від параметрів  $q_j$  і функціоналом від вхідного вимірювального сигналу  $u(t)$ :  $Y = y(t, q_j, \{u\})$ . За наявності адитивної перешкоди  $\xi(t)$  вихідний сигнал системи  $x(t)$  буде дорівнювати  $x(t) = y(t) + \xi(t)$ . Позначимо номінальні значення параметрів  $q_j$  через  $q_{jn}$ . При малих відхиленнях параметрів САУ  $q_j$  від номінальних значень  $q_{jn}$  сигнал неузгодження на виході системи  $\Delta x = x - x_{jn}$  залежно від моменту часу контролю можна записати у вигляді

$$\Delta x(t) = \sum_{j=1}^N d_j(t, \{u\}) q_j + \xi(t), \quad (1)$$

де

$$d_j(t, \{u\}) = \left. \frac{\partial \Delta y}{\partial q_j} \right|_{q_j=q_{jn}} ;$$

$\Delta y = y - y_n$  – неузгодження реакції (сигналу-відгуку) САУ на вхідний вимірювальний сигнал  $u(t)$ ;  $y, y_n$  – реакція (сигнал-відгук) САУ і номінальне значення реакції (сигналу-відгуку) відповідно.

Параметри контролю САУ  $q_j$  (або похибки параметрів системи  $\Delta q_j = q_j - q_{jn}$ ) у загальному випадку є статистично залежними. Але необхідно враховувати, що наявність залежних параметрів призводить до надмірності контролю, тобто до зменшення оперативності та збільшення економічних витрат. Тому при обґрунтуванні методів контролю будемо вважати параметри контролю САУ стаціонарними та некорельованими з перешкодою. Згідно із цією умовою позначимо кореляційну матрицю величин  $\Delta q_j$  через  $R_{qij} < \Delta q_i \Delta q_j >$ , де знак  $< >$  означає середнє значення за ансамблем величин  $\Delta q_j$ . Оскільки матриця  $R_{qij}$  є позитивно визначеною

$$\left( \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i \neq j}}^N R_{qij} \xi_i \xi_j > 0 \text{ при будь-яких } \xi \neq 0 \right)$$

і симетричною ( $R_{qij} = R_{qji}$ ), то лінійним перетворенням перейдемо до нових змінних  $\Delta q'_j$ , які будуть статистично незалежними та їх дисперсії будуть дорівнювати одиниці, тобто  $R'_{qij} < \Delta q'_i \Delta q'_j > = \delta_{ij}$ , де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера [4]. Тоді в незалежних змінних  $\Delta q'_j$  співвідношення (1) запишемо так:

$$\Delta x(t) = \sum_{j=1}^N a_j(t, \{u\}) \Delta q'_j + \xi(t), \quad (2)$$

де

$$a_j(t, \{u\}) = \left. \frac{\partial \Delta x}{\partial q'_j} \right|_{q'_j=q'_{jn}} ;$$

$q'_j$  – незалежні параметри контролю САУ.

За необхідності за допомогою співвідношення (2) можна повернутися до початкових статистично залежних змінних. Доведене відноситься і до змінних  $q_j$ , які також можна вважати статистично незалежними при подальших розрахунках.

Часто метою контролю САУ є вимірювання не самих параметрів  $q_j$ , а якоїсь функції від цих параметрів  $Y = f(q_1, q_2, \dots, q_N)$ , тобто визначення технічного стану системи за узагальненим параметром. Прикладом такої функції може бути будь-яка величина, що визначає кількісну оцінку запасу стійкості системи. Позначимо величини, значення яких необхідно отримати в результаті контролю (апостеріорні значення параметрів контролю), через  $z_i$ . Хоча значення параметрів  $z_i$  (при  $M < N$ ) несе менше інформації про систему, чим повний набір параметрів  $q_j$ , однак у більшості випадків вдалий вибір відносно невеликої кількості апостеріорних параметрів  $z_i$  вважається достатнім для порівняно повної оцінки якості системи, а з іншого боку, може істотно спрос-

тити її контроль. У загальному випадку параметри  $z_i$  можуть збігатися з параметрами  $q_j$ . Тому повнота контролю  $\Pi$  системи залежить від кількості параметрів, які не підлягають контролю, тобто  $\Pi = M / N$ . Як правило, при виборі параметрів контролю САУ необхідно прагнути умови  $\Pi \rightarrow 1$  [5].

При малих відхиленнях  $\Delta q_j$  параметрів системи  $q_j$  від номінальних значень  $q_{jn}$  величини  $z_i$  зв'язані з цими параметрами лінійною залежністю

$$z_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} q_j, \quad (3)$$

де  $i = \overline{1, M}$ ;  $j = \overline{1, N}$ ;  $M \leq N$ ;  $b_{ij}$  – матриця коефіцієнтів, яка залежить від характеристик САУ.

Відзначимо, що в загальному випадку матриця  $b_{ij}$  може не мати оберненої (це обов'язково буде при  $N \neq M$ ). Величини  $z_i$  можна прийняти ортонормованими випадковими величинами, тобто  $\langle z_i z_j \rangle = \delta_{ij}$ .

Метою контролю САУ є визначення величин  $z_i$  залежно від значень параметрів  $q_j$  (або параметрів неузгодження  $\Delta x(t)$ ). Оскільки  $\Delta x(t)$  є функціоналом від вхідного вимірювального сигналу  $u(t)$ , то значення  $z_i$  будуть залежати, з одного боку, від методу контролю, а з іншого – від параметрів вимірювального сигналу  $u(t)$ . Різні критерії будуть приводити до різних оптимальних вимірювальних сигналів  $u_{\text{опт}}(t)$ . При цьому виникає питання, якому із критеріїв потрібно віддати перевагу. Відзначимо, що при достатньо малій перешкоді практично всі вимірювальні сигнали рівноцінні, оскільки в цьому випадку, як видно з (2), знання функціоналу  $\Delta x(t)$  навіть у фіксовані моменти часу дозволяє достатньо точно визначити значення незалежних параметрів  $\Delta q'_j$ , а отже, й величин  $z_i$ . Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь (2), яка записана для різних моментів часу відносно величин  $\Delta q'_j$ . Тому задача вибору параметрів оптимального вимірювального сигналу САУ є актуальною тільки за досить великої перешкоди. Інакше, той вимірювальний сигнал САУ, який буде оптимальним для великої перешкоди, буде також оптимальним за будь-якого значення перешкоди, бо за малої перешкоди практично всі вимірювальні сигнали САУ є тією чи іншою мірою оптимальними.

Розглянемо основні критерії оптимізації параметрів вхідних вимірювальних сигналів САУ, до яких віднесемо максимум інформаційного показника, мінімум середньоквадратичної похибки, максимум чутливості, і обґрунтуємо, що за великої перешкоди всі названі критерії зводяться до одного. Цей критерій може бути прийнятий як універсальний для будь-якої перешкоди.

*Інформаційний показник.* Припустимо, що вихідний сигнал САУ вимірюється в точках  $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ ,  $m$  – кількість точок вимірювання параметра  $z_i$ . Для спрощення подальших розрахунків уведемо векторні позначення.

Нехай вектор  $Q$  означає сукупність параметрів контролю САУ:  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ ; вектор  $Z$  – сукупність величин:  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_M\}$ , значення яких визначаються за результатами контролю САУ після впливу на неї вхідного вимірювального сигналу  $u(t)$ ; вектор  $\Delta X$  є сукупністю значень вихідного сигналу  $\Delta x(t)$  САУ:  $\Delta X = \{\Delta x(t_1), \Delta x(t_2), \dots, \Delta x(t_m)\}$ ; відповідно вектор перешкод  $\xi = \{\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_m)\}$ . Тоді рівняння (2) і (3) запишемо у вигляді

$$\Delta X = A Q + \xi; \quad (4)$$

$$Z = B Q, \quad (5)$$

де  $A$  – матриця з елементами  $a_{kj} = a_j(t_k)$ ,  $k = \overline{1, m}$ ;  $B$  – матриця з елементами  $b_{ij}$ , при цьому, оскільки  $\langle z_i, z_j \rangle = \delta_{ij}$ , матриця  $B$  задовольняє співвідношенню

$$B B^T = E, \quad (6)$$

де  $B^T$  – транспонована матриця;  $E$  – одинична матриця.

З метою проведення арифметичних операцій над матрицями введемо вектори  $\zeta = \{\Delta y(t_1), \Delta y(t_2), \dots, \Delta y(t_m); z_1, z_2, \dots, z_M\}$  і

$$\tilde{\xi} = \left\{ \xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_m); \underbrace{0, \dots, 0}_M \right\},$$

розмір яких  $m + M$ , і матрицю

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Тоді з (4) і (5) отримаємо

$$\zeta = C Q + \tilde{\xi},$$

а взаємна інформація між величинами  $\Delta X$  і  $Z$  дорівнює

$$I(\Delta X, Z) = \int_i^{m+M} p(\Delta X, Z) \log \frac{p(\Delta X, Z)}{p(Z)p(\Delta X)} dZ d\Delta X = H(\Delta X) + H(Z) - H(\zeta),$$

де  $p(\Delta X, Z)$  – сумісна імовірність появи величин  $\Delta X, Z$ ;  $p(Z), p(\Delta X)$  – імовірності появи величин  $Z, \Delta X$  відповідно;  $H(\Delta X), H(Z), H(\zeta)$  – ентропії величин  $\Delta X, Z, \zeta$  відповідно, які визначаються за формулами:

$$H(\Delta X) = - \int_i^{m+M} p(\Delta X) \log p(\Delta X) d\Delta X;$$

$$H(Z) = - \int_i^{m+M} p(Z) \log p(Z) dZ;$$

$$H(\zeta) = - \int_i^{m+M} p(\zeta) \log p(\zeta) d\zeta,$$

де  $p(\zeta)$  – імовірність появи величини  $\zeta$ .

Якщо величини  $Q$  розподілені за нормальним законом, то і величини  $\Delta X, Z, \zeta$ , відповідно до (4), (5), (6), також будуть розподілені за нормальним законом. Позначимо кореляційні матриці цих величин відповідно

$$(R_{\Delta X})_{ij} = \langle \Delta X_i, \Delta X_j \rangle; \quad (R_Z)_{ij} = \langle Z_i, Z_j \rangle;$$

$$(R_\zeta)_{ij} = \langle \zeta_i, \zeta_j \rangle.$$

Якщо  $\sigma^2$  є дисперсією перешкоди, то ці кореляційні матриці з урахуванням (4), (5), (6) запишемо у вигляді

$$R_{\Delta X} = A A^T + \sigma^2 E;$$

$$R_Z = B B^T = E;$$

$$R_\zeta = \begin{pmatrix} R_{\Delta X} & A B^T \\ B A^T & E \end{pmatrix}.$$

Використовуючи відомі вирази для ентропії нормального закону [4], отримаємо

$$I(\Delta X, Z) = \frac{1}{2} \log \frac{\det R_{\Delta X}}{\det R_\zeta}.$$

Застосовуючи формулу Гауса для розрахунку  $\det R_\zeta$ , знаходимо

$$\det R_\zeta = \det R_{\Delta X} \cdot \det(E - B A^T R_{\Delta X}^{-1} A B^T),$$

і для функції  $I(\Delta X, Z)$  остаточно маємо

$$I(\Delta X, Z) = -\frac{1}{2} \log \det(E - B A^T R_{\Delta X}^{-1} A B^T). \quad (7)$$

За великої перешкоди

$$R_{\Delta X}^{-1} \approx \frac{E}{\sigma^2} + 0\left(\frac{1}{\sigma^4}\right), \quad (8)$$

тому з (7) отримаємо

$$I(\Delta X, Z) = -\frac{1}{2} \log \left[ 1 - \frac{1}{\sigma^2} Sp(B A^T A B^T) \right] \approx \frac{1}{2\sigma^2} Sp(B A^T A B^T) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^M \left( \sum_{j=1}^N b_{ij} a_{kj} \right)^2.$$

Позначимо

$$\Phi(\{u\}) = \sum_{k,i} \left( \sum_j b_{ij} a_{kj}(\{u\}) \right)^2.$$

Тоді інформаційний критерій вибору оптимального вимірювального сигналу  $u_{\text{опт}}(t)$ , тобто сигналу, який дозволяє отримати максимальну інформацію про величини  $z_i$ , зводиться до умови

$$\Phi(\{u_{\text{опт}}\}) = \sup_{\{u\}} \Phi(\{u\}). \quad (9)$$

Показник середньоквадратичної похибки. Позначимо через  $\varepsilon$  середньоквадратичну похибку (СКП) оцінки  $z_i^0$  величин  $z_i$ :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^M \langle (z_i - z_i^0)^2 \rangle.$$

Як відомо, мінімальне значення СКП оцінки  $z_i^0$  забезпечується, якщо в якості  $z_i^0$  застосувати апостеріорне середнє значення  $z_i$ , тобто

$$z_i^0 = \int z_{ik} p(Z | \Delta X) dz,$$

де  $p(Z | \Delta X) = p(Z, \Delta X) / p(\Delta X)$ ;

$$p(Z, \Delta X) \equiv p(\zeta) = (2\pi)^{-(m+M)/2} |\det R_\zeta|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\zeta R_\zeta^{-1} \zeta) \right];$$

$$p(\Delta X) = (2\pi)^{-m/2} |\det R_{\Delta X}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\Delta X R_{\Delta X}^{-1} \Delta X) \right].$$

Після проведення розрахунків величини  $\rho(Z|\Delta X)$  отримаємо

$$\rho(Z|\Delta X) = (2\pi)^{-M/2} |\det H|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (ZH^{-1}Z) \right],$$

де  $H = E - BA^T R_{\Delta X}^{-1} AB^T$ .

При цьому для СКП оцінки  $z_i^o$  знаходимо

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^M \langle \Delta z_i^2 \rangle = \sum_{i=1}^M H_{ii} = M - Sp(BA^T R_{\Delta X}^{-1} AB^T).$$

Оптимальний сигнал  $u_{\text{опт}}(t)$  САУ, який мінімізує СКП  $\varepsilon$  оцінки  $z_i^o$ , визначимо з умови

$$\varepsilon_{\min}(\{u_{\text{опт}}\}) = J_{\text{nf}} \varepsilon(\{u_{\text{опт}}\}). \quad (10)$$

За достатньо великої перешкоди, з урахуванням (8), формула (10), яка визначає параметри оптимального вимірювального сигналу  $u_{\text{опт}}(t)$  САУ, набуває вигляду

$$\varepsilon_{\min}(\{u\}) = M - \frac{1}{\sigma^2} \sup_{\{u\}} Sp(BA^T AB^T), \quad (11)$$

що еквівалентно співвідношенню (9).

**Показник чутливості.** Повернемося до (2), (3) і розрахуємо похідну величини  $\Delta y(t)$  в напрямку нормалі до гіперплощини  $z_i = \text{const}$ , тобто коефіцієнт чутливості величини  $\Delta y(t)$  у відношенні до зміни величини  $z_i$ . У координатах  $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$  величини  $a_j(t)$  є складовими градієнта функції  $\Delta y(t)$ :  $\nabla[\Delta y(t)] = \{a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\}$ . Згідно з (6) величини  $b_{ij}$  є складовими одиничного вектора нормалі до гіперплощини  $z_i = \text{const}$ :  $n_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iN}\}$ . Тому похідна функції  $\Delta y(t)$  у напрямку нормалі  $n_i$  дорівнює скалярному множенню

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial z_i} = [n_i \nabla(\Delta y)] = \sum_{j=1}^N b_{ij} a_j(t).$$

Позначимо цю похідну через  $B_i(t)$ :

$$B_i(t) = \sum_{j=1}^N b_{ij} a_j(t).$$

Введемо середньоквадратичну чутливість, яка визначається за всіма результатами вимірювань та по всіх величинах  $z_i$  за формулою

$$S = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^M B_i^2(t_k).$$

Тоді для оптимального вхідного вимірювального сигналу  $u_{\text{опт}}(t)$  САУ, який забезпечує максимальне значення середньоквадратичної чутливості, запишемо

$$S(\{u_{\text{опт}}\}) = \sup_{\{u\}} S(\{u\}). \quad (12)$$

Як видно з (12), умова для визначення параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу

$u_{\text{опт}}(t)$  САУ, яка базується на критерії максимуму чутливості, еквівалентна співвідношенню (11), що визначає мінімум СКП, і збігається з умовою (9), яка відповідає максимуму інформаційного показника.

**Висновки.** Проведений аналіз свідчить, що критерії максимуму інформації, мінімального значення середньоквадратичної похибки та максимальної середньоквадратичної чутливості за достатньо великої перешкоди зводяться до єдиного критерію визначення оптимального вхідного вимірювального сигналу  $u_{\text{опт}}(t)$  САУ:

$$\Phi(\{u_{\text{опт}}\}) = \sup_{\{u\}} \Phi(\{u\}) = \sup_{\{u\}} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^M B_i^2(t_k, \{u\}),$$

$$\text{де } B_i(t_k, \{u\}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \Delta y}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^N b_{ij} a_j(t_k, \{u\}).$$

Оскільки за малої перешкоди оптимальним є вимірювальний сигнал, який породжує неособливу матрицю  $a_j(t_k)$  (ця умова необхідна для розв'язання системи рівнянь (2) при  $\xi \rightarrow 0$ ), то оптимальним буде сигнал, отриманий, наприклад, за допомогою критерію максимального значення інформаційного показника (9). Це дозволяє застосувати критерій (9) для визначення параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу САУ за довільної перешкоди.

Відзначимо, що при безперервному вимірюванні сигналу на виході САУ суму по всіх точках  $t_k$  можна замінити інтегралом за часом контролю. При цьому функціонал  $\Phi(\{u\})$  перейде у функціонал

$$\Phi_1(\{u\}) = \int_0^T \sum_{i=1}^M B_i^2(t, \{u\}) dt.$$

Як було показано вище, за умови, що матриця  $b_{ij}$  має обернену (6), виконуються рівності  $B^T = B^{-1}$  і  $B^T B = E$ . При цьому  $Sp(BA^T AB^T) = Sp(A^T A)$ , і функціонал  $\Phi$  дещо спрощується:

$$\Phi = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N a_j^2(t_k, \{u\}).$$

З іншого боку, з (2) видно, що середньоквадратичне значення вихідного вимірювального сигналу САУ дорівнює

$$\sum_{k=1}^m \langle [\Delta x(t_k)]^2 \rangle = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N a_j^2(t_k) + N\sigma^2,$$

тобто функціонал  $\Phi$  є середньоквадратичним значенням корисного сигналу на виході системи. Якщо параметри  $z_i$  залежать не від усіх параметрів  $q_j$  (матриця  $b_{ij}$  у цьому випадку не буде мати оберненої), то в критерій (9) входять тільки коефіцієнти чутливості за параметрами  $q_j$ , що впливають на величини  $z_i$ , а остання частина вихідного сигналу, яка залежить від інших випадкових параметрів  $q_j$ , фактично належить до перешкоди. При цьому критерій (9) максимізує тільки корисну (інформаційну) частину вихідного сигналу.

Таким чином, у статті досліджено основні критерії оптимізації вимірювальних сигналів засобів вимірювальної техніки (генераторів, калібраторів, контрольно-перевірочної апаратури тощо), які використовуються для визначення параметрів систем автоматичного управління. Обґрунтовано, що за наявності адитивної гаусовської перешкоди достатньо великого рівня розглянуті критерії зводяться до єдиного. Цей критерій пропонується використовувати для знаходження параметрів оптимального вхідного вимірювального сигналу для контролю технічного стану систем автоматичного управління.

#### Список літератури

1. *Бесекерский В.А.* Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. — М.: Наука, 1972. — 768 с.
2. *Смирнов Н.Н.* Обслуживание и ремонт авиационной техники по состоянию / Н.Н. Смирнов, А.А. Ицкевич. — М.: Транспорт, 1987. — 272 с.
3. *Техническая эксплуатация летательных аппаратов: учеб. для вузов / Н.Н. Смирнов, Н.И. Владимиров, Ж.С. Черненко [и др.]; под ред. Н.Н. Смирнова.* — М.: Транспорт, 1990. — 423 с.
4. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — М.: Наука, 1986. — 544 с.
5. *Дмитриев А.К.* Основы теории построения и контроля сложных систем / А.К. Дмитриев, П.А. Мальцев. — Л.: Энергоатомиздат, 1988. — 192 с.