

Результат преобразования определяется в двоичном или двоично-десятичном кодах путем последовательной записи значений разрядных коэффициентов a_n . При $\beta = 12$ получим

$$N_x = a_{12} \dots a_{11} \dots a_{10} \dots a_1.$$

Процесс уравнивания показан в табл. 2а, б и на рис. 2б. При каждом шаге формируется промежуточный код, при последнем шаге — первичный.

5.3. Приборы параллельно-последовательного преобразования (считывания)

Используемый код соответствует выбранной позиционной системе счисления более высокого порядка по сравнению с двоичной. Эта система характеризуется базовым числом $P > 2$.

Количество шагов определяется выбранным числом разрядов m системы высокого порядка. Число ступеней N_x определяется уравнением

$$N_x = \sum_{i=m}^1 A_i P^{i-1},$$

где A_i принимает значения согласно (19).

Результат измерения выражается последовательной записью разрядных коэффициентов, при $m = 3$ и $P = 10$ получим

$$N_x = A_3 \dots A_2 \dots A_1.$$

Процесс преобразования показан на графике рис. 2в.

Список литературы

1. Полулях К.С. Электронные измерительные приборы / К.С. Полулях. — М.: Высшая школа, 1966. — 400 с.
2. Гитис Э.И. Аналого-цифровые преобразователи / Э.И. Гитис. — М.: Энергоиздат, 1981. — 360 с.
3. Электрические измерения / под ред. В.Н. Малиновского. — М.: Энергоиздат, 1985. — 416 с.
4. Душин Е.М. Основы метрологии и электрические измерения / Е.М. Душин. — Л.: Энергоатомиздат, 1987. — 480 с.
5. Чинков В.М. Цифрові вимірювальні прилади / В.М. Чинков. — Харків: НТУ «ХПІ», 2008. — 507 с.
6. Шляндин В.М. Цифровые измерительные устройства / В.М. Шляндин. — М.: Высшая школа, 1981. — 335 с.
7. Кончаловский В.Ю. Цифровые измерительные устройства / В.Ю. Кончаловский. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 304 с.
8. Орнатский П.П. Автоматические измерения и приборы / П.П. Орнатский. — К.: Вища школа, 1986. — 560 с.
9. Швецкий Б.И. Электронные цифровые приборы / Б.И. Швецкий. — К.: Техніка, 1991. — 190 с.

УДК 681.3

РОЗРОБКА МЕТОДУ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ

С.В. Герасимов, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба



Запропоновано метод синтезу системи управління за рахунок вибору оптимальної номенклатури параметрів її контролю під час експлуатації. Вирішено завдання перенастроювання заданої структури системи управління з метою забезпечення потрібної якості регулювання у разі зміни динаміки роботи. Наведено приклад застосування розробленого методу та перевірки його на адекватність.

The synthesis method of the control system due to choice of optimal range of parameters of its control during

operation is proposed. The task of realignment of the set control system structure in order to provide necessary regulation quality in case of change of the operation dynamic is solved. The example of its check for adequacy is given.

Застосування адаптивного методу синтезу оптимальної системи управління

У практиці контролю та синтезу систем управління виникають задачі забезпечення максимальної ефективності їх використання під час експлуатації за рахунок своєчасного виявлення відмов, що досягається вибором оптимальної номенклатури параметрів контролю [1]. Ці задачі в загальній постановці можуть бути описані таким чином.

Задано оператор $G(q)$, який залежить від вектора параметрів контролю системи управління $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, де n – кількість параметрів контролю. На допустимі значення параметрів накладаються обмеження у вигляді функцій

$$\varphi_i(q) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

де m – кількість обмежень.

Задано функцію (або функціонал) цілі, що залежить від оператора системи $G(q)$ і “вектора ситуації” ξ : $\Phi\{\xi, G(q)\}$.

Необхідно визначити вектор параметрів q , який задовольняє співвідношення (1) і забезпечує екстремум (максимум або мінімум) функції Φ .

У деяких простих випадках оператор $G(q)$ може бути відомим в аналітичному вигляді, наприклад, може бути відомою перехідна або передатна функція системи залежно від значення параметрів q_j , $j = \overline{1, n}$. В інших випадках структура оператора $G(q)$ може бути невідомою в аналітичному вигляді, а відомості про систему управління отримують тільки за результатами вимірювань її вихідної реакції.

Результатами вимірювань доводиться користуватися й у тих випадках, коли аналітичний вигляд оператора системи управління може бути розрахований, але з причини значної складності системи та наявності її суттєвої нелінійності такий розрахунок є трудомістким.

Вектор ситуації ξ може мати як кінцеву, так і нескінченну кількість компонент. В останньому випадку його компонентами можуть бути, наприклад, значення функції від часу або частоти.

Функціонал цілі може бути або детермінованим і повністю відомим, або являти собою математичне сподівання за допустимою множиною ситуацій.

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. *Контроль параметрів системи управління.* Вектором ситуацій у цьому випадку є або вихідний сигнал системи управління як об'єкта контролю (при часових методах), або амплітудна та фазочастотна характеристики (при частотних методах) [2]. Функція цілі залежно від методу обробки вихідного сигналу – або величина сигналу непогодження, або, у разі використання байєсівських критеріїв оцінки, середній ризик.

2. *Задача ідентифікації.* Можливі різні варіанти постановки задачі про ідентифікацію. Наприклад, при ідентифікації за вихідною реакцією функціоналом цілі є непогодження між вектором вихідної реакції системи управління та вихідними реакціями стандартних моделей. Ідентифікація зводиться при цьому до мінімізації функціоналу цілі за набором моделей.

3. *Задача контролю з використанням моделі об'єкта, що контролюється,* зводиться до вибору вектора параметрів моделі, які мінімізують функціонал цілі Φ , наприклад, величину непогодження між вихідним сигналом системи управління та її моделі.

4. *Задача про оптимальну адаптацію системи управління при векторі обстановки ξ , що змінюється.* Вектором обстановки в цьому випадку можуть бути ті або інші параметри перехідної, амплітудної або фазочастотної характеристики системи управління. Наприклад, для автомата стабілізації це можуть бути запаси за амплітудою та фазою, коефіцієнти підсилення, частота зрізу тощо. Функціоналом цілі в цьому випадку є оцінка якості адаптації, яка характеризує степінь близькості бажаних (необхідних) і фактичних параметрів системи управління.

Наведена задача наразі є актуальною у зв'язку з необхідністю використовувати системи стабілізації незмінної структури для управління об'єктами, різними за своїми характеристиками [3]. При цьому при переході від однієї системи управління до іншої необхідно здійснювати мінімально необхідне перенастроювання (проводити мінімально необхідну зміну параметрів q_j) системи управління.

У подальшому основну увагу будемо приділяти останній задачі – задачі оптимальної параметричної адаптації.

При розв'язанні задачі перенастроювання системи управління виникає питання визначення її спроможності до адаптації.

Спроможність до адаптації системи управління буде тим вищою, чим більший приріст функціоналу цілі при заданій величині зміни параметрів системи. Спроможність системи до адаптації будемо називати лабільністю (“рухомістю”). Лабільність – функціональна рухомість. Лабільність характеризує час, протягом якого система (об'єкт) відновлює свої характеристики після перенастроювання складових елементів [4].

Введемо кількісну оцінку L лабільності системи управління.

Нехай параметри системи управління q_j мають допустимі відхилення приросту Δq_j , які задовольняють умови зв'язку (1), тоді відповідний приріст функціоналу цілі такий:

$$\Delta\Phi = \Phi(q_1 + \Delta q_1, \dots, q_j + \Delta q_j, \dots, q_n + \Delta q_n) - \Phi(q_1, \dots, q_j, \dots, q_n).$$

Позначимо δq_j , $j = \overline{1, n}$, як відносний приріст параметрів (віднесений до номінальних значень): $\delta q_j = \Delta q_j / q_{\text{ном } j}$. Зафіксуємо “довжину” вектора

$$\|\delta q\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \delta q_j^2}.$$

Для різних напрямків, тобто для різних співвідношень між компонентами δq_j , величина приросту $\Delta\Phi$ буде різною. Відношення $\delta\Phi / \|\delta q\|$, де $\delta\Phi = \Delta\Phi / \Phi_{\text{ном}}$, характеризує лабільність системи управління у цьому напрямку, тобто при такому

співвідношенні між величинами δq_j , $j = \overline{1, n}$. Для деякого напрямку величина $\delta \Phi$ (при фіксованій величині $\|\delta q\|$) буде максимальною. Тоді за оцінку лабільності системи використаємо величину

$$L = \lim_{\|\delta q\| \rightarrow 0} \frac{\delta \Phi_{\max}}{\|\delta q\|}.$$

Величина L має такий фізичний зміст. Оскільки $\|\delta q\|$ є кількісною мірою “перестроювання” системи, то L є максимально можливим відносним приростом функціоналу цілі, яке припадає на одиничне перестроювання системи.

Величина L дозволяє оцінити потенційну спроможність тієї чи іншої системи управління до адаптації, наприклад, із декількох систем обрати ту, для якої потрібна степінь адаптації отримується шляхом мінімального перенастроювання, або забракувати ту систему, для якої адаптація досягається при дуже значному перенастроюванні.

Відзначимо, що оцінка L є корисною в альтернативній задачі адаптації, коли до системи ставляться вимоги за точністю її вихідних характеристик. У цьому випадку перевагу необхідно віддати “жорстким” системам, тобто системам із малою лабільністю L .

Величина L може бути визначена через характеристики системи управління. Дійсно, визначення максимального значення величини $\delta \Phi$ при додаткових обмеженнях (1), а також умов

$$\|\delta q\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \delta q_j^2} = const$$

може бути здійснене за допомогою методу Лагранжа [5]. Складемо функцію Лагранжа Ψ :

$$\Psi = \Phi - \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i - \frac{1}{2} \mu \sum_{j=1}^n \delta q_j^2, \quad (2)$$

де μ – коефіцієнт узгодження.

Величину δq_j знайдемо з умов $\partial \Psi / \partial \delta q_j = 0$:

$$\delta q_j = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \delta q_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \delta q_j} \right).$$

Позначимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta q_j} = q_{\text{ном}j} \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} = a_j; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \delta q_j} = q_{\text{ном}j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} = b_j^i.$$

Величини a_j і b_j^i є коефіцієнтами чутливості Φ і φ_i за параметрами системи управління.

Таким чином,

$$\delta q_j = \frac{1}{\mu} \left(a_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i b_j^i \right), \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Величини λ_i визначаються з додаткових умов (1). Для малих (незначних) приростів отримаємо

$$\sum_{j=1}^n b_j^i \delta q_j = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Підставимо (3) в (4), отримаємо систему рівнянь для λ_i :

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \left(\sum_{j=1}^n b_j^i b_j^k \right) = \sum_{j=1}^n b_j^i a_j, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

При використанні скорочених векторних позначень запишемо

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n); \quad \vec{b}^i = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_n^i).$$

Позначимо “скалярний добуток” векторів \vec{x} і \vec{y} через

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

тоді система рівнянь (5) набирає вигляду

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \left(\sum_{j=1}^n \vec{b}^i \vec{b}^k \right) = (\vec{a} \cdot \vec{b}^i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Визначник отриманої системи рівнянь (6) $\Delta = \det \left\| \left(\vec{b}^i \vec{b}^k \right) \right\|$, $k, i = \overline{1, m}$, є визначником Грама. Його геометричний зміст – квадрат об’єму m -мірного паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{b}^i . Через те, що умови (1) необхідно вважати незалежними (інакше частину умов необхідно виключити), то вектор \vec{b}^i – лінійно незалежний. Для лінійно незалежних векторів визначник Грама позитивний, що виходить з його геометричного змісту. Тому система рівнянь (6) має одиничний розв’язок [5].

Запишемо (3) у векторних позначеннях:

$$\delta \vec{q} = \frac{1}{\mu} \left(\vec{a} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{b}^i \right) = \frac{1}{\mu} (\vec{a} - \vec{a}_s), \quad (7)$$

де

$$\vec{a}_s = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{b}^i. \quad (8)$$

Як виходить з (8), вектор \vec{a}_s знаходиться в “площині”, яка визначається векторами \vec{b}^i .

З іншого боку, згідно з (4) і (6), вектор $\delta \vec{q}$, отже, і $\vec{a} - \vec{a}_s \equiv \vec{a}_p$, ортогональний всім векторам \vec{b}^i : $(\vec{a}_p \cdot \vec{b}^i) = 0$. Таким чином, вектор \vec{a}_p є ортогональною проекцією вектора \vec{a} на нормаль до простору векторів \vec{b}^i . Позначимо кут між вектором \vec{a} і площиною, в якій знаходяться вектори \vec{b}^i , через θ . Тоді величина вектора \vec{a}_p буде дорівнювати

$$\|\vec{a}_p\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \vec{a}_{pj}^2} = a \sin \theta, \quad (9)$$

де

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}. \quad (10)$$

Величина a згідно з (10) є середньоквадратичним значенням чутливості системи управління:

$$a = \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \delta q_j} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Як виходить із (3) і (9), проекція вектора $\delta \vec{q}$ дорівнює

$$\delta q = \|\delta \vec{q}\| = \frac{1}{\mu} a \sin \theta.$$

Розрахуємо величину $\Delta \Phi$. Для малих (незначних) приростів

$$\Delta \Phi = \sum_{j=1}^n \delta q_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \delta q_j} \right) = \sum_{j=1}^n a_j \delta q_j \equiv (\vec{a} \cdot \delta \vec{q}).$$

Використання (7) дозволяє отримати

$$\Delta \Phi_{\max} \frac{1}{\mu} (\vec{a} \cdot \vec{a}_p) = \frac{1}{\mu} a^2 \sin^2 \theta,$$

$$\text{де } (\vec{a} \cdot \vec{a}_p) = (\vec{a}_s + \vec{a}_p, \vec{a}_n) = \vec{a}_p^2 + (\vec{a}_p \cdot \vec{a}_s); \quad (\vec{a}_p \cdot \vec{a}_s) = 0.$$

Таким чином, для лабільності L остаточно отримуємо

$$L = \frac{\Delta \Phi_{\max}}{\delta q} = a \sin \theta. \quad (11)$$

Помітимо фізичний зміст доданків в (11). Величина a враховує чутливість системи при зміні її параметрів без урахування умов (1). Величина $\sin \theta$ враховує обмеження лабільності системи при врахуванні обмежень.

Величина L може бути визначена через компоненти векторів \vec{a} і \vec{b}^i . Дійсно, геометрично величина L є перпендикуляром з кінця вектора \vec{a} на площину векторів \vec{b}^i . Тому L є відношенням об'ємів двох паралелепіпедів, один із яких побудований на векторах $(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m, \vec{a})$, а другий – на векторах $(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m)$. Якщо позначити визначник Грама першої системи векторів через $\Gamma(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m, \vec{a})$, а другий – через $\Gamma(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m)$, то отримуємо

$$L = \left[\frac{\Gamma(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m, \vec{a})}{\Gamma(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m)} \right]^{1/2},$$

де

$$\Gamma(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m, \vec{a}) = \begin{vmatrix} (\vec{b}^1 \vec{b}^1) & (\vec{b}^1 \vec{b}^2) & \dots & (\vec{b}^1 \vec{b}^m) & (\vec{b}^1 \vec{a}) \\ (\vec{b}^1 \vec{b}^2) & (\vec{b}^2 \vec{b}^2) & \dots & (\vec{b}^2 \vec{b}^m) & (\vec{b}^2 \vec{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{b}^1 \vec{b}^m) & (\vec{b}^2 \vec{b}^m) & \dots & (\vec{b}^m \vec{b}^m) & (\vec{b}^m \vec{a}) \\ (\vec{a} \vec{b}^1) & (\vec{a} \vec{b}^2) & \dots & (\vec{a} \vec{b}^m) & (\vec{a} \vec{a}) \end{vmatrix};$$

$$\Gamma(\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^m) = \begin{vmatrix} (\vec{b}^1 \vec{b}^1) & (\vec{b}^1 \vec{b}^2) & \dots & (\vec{b}^1 \vec{b}^m) \\ (\vec{b}^1 \vec{b}^2) & (\vec{b}^2 \vec{b}^2) & \dots & (\vec{b}^2 \vec{b}^m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\vec{b}^1 \vec{b}^m) & (\vec{b}^2 \vec{b}^m) & \dots & (\vec{b}^m \vec{b}^m) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Наприклад, коли діє тільки одне обмеження, то

$$\Gamma(\vec{b} \vec{a}) = \begin{vmatrix} b^2 & (\vec{a} \vec{b}) \\ (\vec{a} \vec{b}) & a^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 - (\vec{a} \vec{b})^2; \quad \Gamma(\vec{b}) = b^2.$$

Тоді

$$L = \left[a^2 - \frac{(\vec{a} \vec{b})^2}{b^2} \right]^{1/2} = a \left[1 - \frac{(\vec{a} \vec{b})^2}{a^2 b^2} \right]^{1/2}.$$

Покажемо, що введення нових обмежень може тільки зменшити величину L , і розрахуємо програш у лабільності L , який при цьому виникає.

Розглянемо величину

$$\vec{C}_m = \vec{a} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{b}^i.$$

Вектор \vec{C}_m є похибкою апроксимації вектора \vec{a} лінійної комбінації векторів \vec{b}^i . Квадрат величини вектора \vec{C}_m дорівнює

$$C_m^2 = \left(\vec{a} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{b}^i \right)^2.$$

Визначимо величини λ_i , які забезпечують мінімум C_m^2 . Розрахунок похідних дозволяє записати систему рівнянь для λ_i :

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k (\vec{b}^i \vec{b}^k) = (\vec{a} \cdot \vec{b}^i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (13)$$

Отримана система рівнянь тотожно збігається із системою (6). Після підстановки розв'язку системи (13) в (12) отримуємо вектор $\vec{a}_p = \vec{a} - \vec{a}_s$.

Таким чином, вектор $\vec{a}_p = \vec{a} - \vec{a}_s$ і рівну йому величину L отримуємо так:

$$L = a_p = \min_{\{\lambda_i\}} \left| \bar{a} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{b}^i \right|.$$

Порівняємо тепер величини L_m і L_{m+1} :

$$L_m^2 = \min_{\{\lambda_i\}} \left(\bar{a} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{b}^i \right)^2; \quad L_{m+1}^2 = \min_{\{\lambda_i\}} \left(\bar{a} - \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \bar{b}^i \right)^2,$$

знайдемо різницю:

$$L_{m+1}^2 - L_m^2 = - \frac{(\bar{a}, \bar{b}_s^{m+1})^2}{(\bar{b}_s^{m+1})^2}.$$

Отримана формула показує, що $L_{m+1} < L_m$, та визначає різницю. Ця різниця може бути розрахована через вектори \bar{a} і \bar{b}_s^{m+1} .

Для цього скористаємося формулою для ортогональної проекції вектора \bar{b}_s^{m+1} на підпросторі векторів $\{\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m\}$:

$$\bar{b}_s^{m+1} = \frac{1}{\Gamma(\bar{b}^1, \bar{b}^2, \dots, \bar{b}^m)} \times \begin{vmatrix} (\bar{b}^1 \bar{b}^1) & (\bar{b}^1 \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^1 \bar{b}^m) & \bar{b}^1 \\ (\bar{b}^1 \bar{b}^2) & (\bar{b}^2 \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^2 \bar{b}^m) & \bar{b}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{b}^m \bar{b}^1) & (\bar{b}^m \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^m \bar{b}^m) & \bar{b}^m \\ (\bar{b}^1 \bar{b}^{m+1}) & (\bar{b}^2 \bar{b}^{m+1}) & \dots & (\bar{b}^m \bar{b}^{m+1}) & \bar{b}^{m+1} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

де $\Gamma_m = \Gamma\{\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m\}$ – визначник Грама векторів $\{\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^m\}$, який визначається з (12).

Відповідно до (14) знайдемо $(\bar{a}, \bar{b}_s^{m+1}) \equiv \frac{\Delta}{\Gamma_m}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\bar{b}^1 \bar{b}^1) & (\bar{b}^1 \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^1 \bar{b}^m) & (\bar{b}^1 \bar{a}) \\ (\bar{b}^1 \bar{b}^2) & (\bar{b}^2 \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^2 \bar{b}^m) & (\bar{b}^2 \bar{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{b}^m \bar{b}^1) & (\bar{b}^m \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^m \bar{b}^m) & (\bar{b}^m \bar{a}) \\ (\bar{b}^1 \bar{b}^{m+1}) & (\bar{b}^2 \bar{b}^{m+1}) & \dots & (\bar{b}^m \bar{b}^{m+1}) & (\bar{b}^{m+1} \bar{a}) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Величина $(\bar{b}_s^{m+1})^2 = (\bar{b}_s^{m+1} \bar{b}^{m+1})$ дорівнює

$$(\bar{b}_s^{m+1})^2 = \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m},$$

де $\Gamma_{m+1} = \Gamma_{m+1}(\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^{m+1})$ – визначник Грама системи векторів $\{\bar{b}^1, \dots, \bar{b}^{m+1}\}$.

Таким чином, отримаємо

$$L_m^2 - L_{m+1}^2 = \frac{\Delta^2}{\Gamma_m \Gamma_{m+1}}. \quad (16)$$

Отримане співвідношення дозволяє розрахувати програш у лабільності, який виникає при додаванні нових обмежень, та провести попередній аналіз впливу того або іншого обмеження на лабільність системи управління, тобто визначити шляхи підвищення (зниження) лабільності. Відповідь на останнє питання є важливою під час розробки (конструювання) систем управління з високими вимогами до стабільності вихідних характеристик.

У той же час формула (16) дозволяє визначити програш у лабільності за умови, що деякі параметри системи жорстко фіксуються, тобто оцінити вплив варіації кожного з параметрів на лабільність.

Дійсно, фіксація будь-якого параметра, наприклад q_1 , зводиться до додаткової умови: $\delta q_1 = 0$. Цю умову можна записати у вигляді умови зв'язку:

$$(\bar{b}^{m+1} \delta \bar{q}) = 0,$$

де

$$\bar{b}^{m+1} = (1, 0, 0, \dots, 0).$$

Розглянемо як приклад випадок, коли є одне обмеження, та розрахуємо програш за фіксації параметра q_1 .

Величина Δ з (15) у цьому випадку дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{b}^2 & (\bar{a} \bar{b}) \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \bar{b}^2 - b_1 (\bar{a} \bar{b}); \quad \Gamma_m = \bar{b}^2;$$

$$\Gamma_{m+1} = \begin{vmatrix} \bar{b}^2 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{b}^2 - b_1;$$

$$L_m^2 - L_{m+1}^2 = \frac{[a_1 \bar{b}^2 - b_1 (\bar{a} \bar{b})]^2}{\bar{b}^2 (\bar{b}^2 - b_1^2)}.$$

Якщо позначити

$$\alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \beta = \frac{b_1}{b}, \quad \cos \theta = \frac{(\bar{a} \bar{b})}{a b},$$

то для відносної величини втрат запишемо

$$\frac{L_m^2 - L_{m+1}^2}{L_m^2} = \frac{(\alpha - \beta \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta (1 - \beta^2)}.$$

Помітимо, що величину Δ можна розрахувати через вектор \bar{a}_p . Дійсно, вектор \bar{a}_p можна знайти аналогічно вектору \bar{b}_s^{m+1} (14):

$$\bar{a}_p = \frac{1}{\Gamma(\bar{b}^1, \bar{b}^2, \dots, \bar{b}^m)} \begin{vmatrix} (\bar{b}^1 \bar{b}^1) & (\bar{b}^1 \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^1 \bar{b}^m) & \bar{b}^1 \\ (\bar{b}^1 \bar{b}^2) & (\bar{b}^2 \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^2 \bar{b}^m) & \bar{b}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{b}^m \bar{b}^1) & (\bar{b}^m \bar{b}^2) & \dots & (\bar{b}^m \bar{b}^m) & \bar{b}^m \\ (\bar{b}^1 \bar{a}) & (\bar{b}^2 \bar{a}) & \dots & (\bar{b}^m \bar{a}) & \bar{a} \end{vmatrix}.$$

Тоді величина Δ , відповідно до (15), при врахуванні того, що величина детермінанту змінюється при заміні рядків стовпцями, дорівнює

$$\Delta = \Gamma_m (\bar{a}_p \bar{b}^{m+1}).$$

Отриманий вираз є більш простим для розрахунків, ніж формула (15), тому що при визначенні $\Delta \Phi_{\max}$ необхідно визначити вектор \bar{a}_p , оскільки $\delta \bar{q} = (1/\mu) \bar{a}_p$ згідно з (7). Тоді величину втрат знайдемо як

$$L_m^2 - L_{m+1}^2 = \frac{(\bar{a}_p \bar{b}^{m+1})^2 \Gamma_m}{\Gamma_{m+1}}.$$

При $(\bar{a}_p \bar{b}^{m+1}) = (\bar{a}_p \bar{b}_s^{m+1}) = (\bar{a} \bar{b}_s^{m+1})$ співвідношення (16) запишемо:

$$L_m^2 - L_{m+1}^2 = \frac{(\bar{a}_p \bar{b}^{m+1})^2}{(\bar{b}_s^{m+1})^2} = a_p^2 \cos^2 \psi, \quad (17)$$

де ψ – “кут” між векторами \bar{a}_p і \bar{b}_s^{m+1} .

Фізичний зміст співвідношення (17) полягає в тому, що програш є тим більшим, чим ближче напрямок, який визначається вектором \bar{b}_s^{m+1} до напрямку вектора \bar{a} – напрямку градієнта функціоналу Φ . Відносний програш при цьому дорівнює

$$\frac{L_m^2 - L_{m+1}^2}{L_m^2} = \cos^2 \psi. \quad (18)$$

Таким чином, отримані співвідношення (1)–(18) являють собою адаптивний метод синтезу оптимальної системи управління та дозволяють отримати оптимальну номенклатуру параметрів контролю для визначення технічного стану системи при експлуатації.

Дослідження можливостей застосування запропонованого методу для синтезу параметрів контуру коригування системи управління

У процесі проектування та експлуатації систем автоматичного регулювання та управління виникає задача перенастроювання параметрів контурів заданої структури з метою забезпечення потрібної якості регулювання у разі зміни динаміки роботи системи. Так, наприклад, фазочастотна характеристика (ФЧХ) електричного ланцюга показує залежність зсуву за фазою між гармонічними коливаннями на виході та вході цього ланцюга від частоти гармонійних коливань на вході та використовується для оцінки фазових викривлень форми складного сигналу, які пов'язані з неоднаковою затримкою за часом його окремих гармонійних складових у разі їх проходження всередині ланцюга. Особливо жорсткі вимоги висувають до ФЧХ радіотехнічних систем, які ґрунтуються на фазових методах обробки сигналів, систем багатоканального зв'язку та вимірювальних пристроїв [2].

Тому однією із практичних задач синтезу систем управління є визначення параметрів контурів коригування заданої структури, які забезпечують максимум ФЧХ у діапазоні $[0, \omega_0]$ (ω_0 – частота нульової фази) при додатковому обмеженні – збереженні постійного значення ω_0 (наприклад, при збереженні незмінного коефіцієнта підсилення).

У загальному вигляді задачу можна сформулювати таким чином.

Нехай $y(q_1, \dots, q_n)$ – фазова частотна характеристика, q_1, \dots, q_n – доступні для регулювання параметри контуру коригування. Необхідно отримати максимальне значення функції $y(q_1, \dots, q_n)$ при заданій частоті ω_1 , або максимальне значення цієї функції в точці максимуму. Задача ускладнюється тим, що накладається додаткова умова – частота нульової фази повинна бути незмінною ($\omega_0 = \text{const}$).

У математичній постановці задача зводиться до такого: необхідно знайти параметри q_1, \dots, q_n , які забезпечують екстремум функції $y(\omega_1, q_1, \dots, q_n)$ при додатковій умові $y_1(q_1, \dots, q_n) = \text{const}$.

Якщо відомі аналітичні залежності $y(q_1, \dots, q_n)$, задача може бути розв'язана відомими методами за допомогою ЕОМ.

Однак у багатьох випадках указані залежності занадто громіздкі, що ускладнює складання програм, крім того, часто системи бувають нелінійними або такими складними, що неможливо з достатньою точністю отримати їхні характеристики в аналітичному вигляді, тоді доцільне комбіноване застосування експериментальних і розрахункових методів.

Розглянемо приріст величини Δy в деякій точці $y(q_1^0, \dots, q_n^0) = q^0$:

$$\Delta y = \sum_{j=1}^n y'_j(q^0) \cdot \Delta q_j; \quad y'_j(q^0) = \left. \frac{\partial y}{\partial q_j} \right|_{q=q^0},$$

де $y'_j(q^0)$ – експериментально отримані функції чутливості.

Умова $y_1(q_1, \dots, q_n) = \text{const}$ для приростів записується у вигляді

$$\sum_{j=1}^n y'_j(q^0) \cdot \Delta q_j = 0; \quad y'_{1j} = \left. \frac{\partial y_1}{\partial q_j} \right|_{q_j=q^0}. \quad (19)$$

Приріст Δq_j на кожному кроці знайдемо з умови, що величина Δy набирає максимального значення в області $\sum_{j=1}^n \Delta q_j^2 = R^2$ за додаткової умови (19).

Геометричний зміст полягає в тому, що з усіх векторів $\Delta \bar{q}$, які знаходяться всередині сфери $\sum_{j=1}^n \Delta q_j^2 = R^2$, необхідно знайти той, при якому величина y має екстремум за додаткової умови (19).

Запропонований метод для знаходження максимуму функції з додатковими умовами є узагальненням “методу градієнта” спільно з методом невизначених множників Лагранжа для визначення умовного екстремуму.

Для розв'язання задачі складемо функцію Ψ відповідно до (2):

$$\Psi = \sum_{j=1}^n y'_j \Delta q_j - \lambda \sum_{j=1}^n y'_{1j} \Delta q_j - \frac{1}{2} \mu \sum_{j=1}^n \Delta q_j^2 .$$

Розрахуємо похідну $\partial \Psi / \partial q_j$ і дорівняємо її до нуля, отримаємо

$$\Delta q_j = \frac{1}{\mu} (y'_j - \lambda y'_{1j}), \quad (20)$$

де μ – масштабний коефіцієнт (коефіцієнт узгодження).

Коефіцієнт λ знайдемо з виразу (19) після підстановки в нього (20):

$$\sum_{j=1}^n y'_{1j} (y'_j - \lambda y'_{1j}) = 0 ,$$

тоді

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^n y'_{1j} y'_j}{\sum_{j=1}^n (y'_{1j})^2} . \quad (21)$$

Формули (20) і (21) є розв'язком поставленої задачі.

Експериментальна перевірка запропонованого методу

Практична перевірка запропонованого методу проводилася за допомогою контуру коригування, наведеного на рис. 1, з параметрами: $R_1 = 5$ кОм; $R_2 = 2,5$ кОм; $R_3 = 47$ кОм; $R_4 = 1$ кОм; $C_1 = 4$ мкФ; $C_2 = 15$ мкФ. ФЧХ цього контуру необхідно підняти до максимального значення в діапазоні частот $[0, \omega_0]$, при цьому частота ω_0 залишається незмінною.

У математичній постановці задачу сформулюємо таким чином: нехай $u(\omega, q_1, \dots, q_n)$ – ФЧХ контуру коригування. Необхідно визначити максимум характеристики при частоті ω_1 з діапазону $[0, \omega_0]$ за умови, що нульова частота ω_0 є незмінною.

Для практичної реалізації методу необхідно врахувати таке.

1. Рационально мати справу з приведеними до номінальних значень величинами приросту і функ-

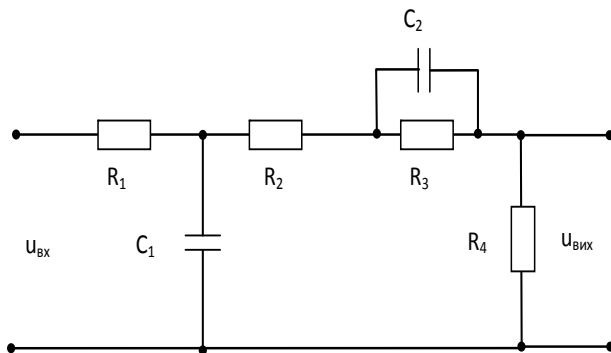


Рис. 1. Контур коригування

цій. Отже, якщо x_j – розмірні значення параметрів, а φ і φ_1 – розмірні значення функцій, то

$$q_j = \frac{x_j}{x_{j \text{ ном}}} ; \Delta q_j = \frac{\Delta x_j}{x_{j \text{ ном}}} ; y = \frac{\varphi}{\varphi_{\text{ном}}} ; y_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_{1 \text{ ном}}} , \quad (22)$$

де $x_{j \text{ ном}}$; $\varphi_{\text{ном}}$; $\varphi_{1 \text{ ном}}$ – номінальні значення параметрів функцій.

Тоді

$$y'_j = \frac{x_{j \text{ ном}}}{\varphi_{\text{ном}}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} ; y'_{1j} = \frac{x_{j \text{ ном}}}{\varphi_{1 \text{ ном}}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} .$$

2. Коефіцієнт масштабу μ необхідно взяти з умови, що величини Δq_j , які визначаються умовою (20), не виходять за границі допустимої області.

Ця умова визначає мінімальне значення Δq_j (мінімальний крок).

Потім, змінюючи крок, визначимо величину коефіцієнта μ , для якого Δu буде максимальним, тобто відхилення

$$y'_{1j} = \frac{y'_j - \lambda y'_{1j}}{\Delta q_{j \text{ доп}}} .$$

Тоді коефіцієнт μ є максимальним значенням отриманих відхилень. Знак визначається порівнянням значень величини Δu , які розраховані для позитивних і негативних μ .

3. Значення величини Δu обчислимо за формулою

$$\Delta u = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^n y'_j (y'_j - \lambda y'_{1j}) = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{j=1}^n (y'_j)^2 - \lambda \sum_{j=1}^n y'_j \cdot y'_{1j} \right) .$$

Визначення параметрів контуру, які задовольняють вимоги, проводилися двома способами – аналітичним і експериментальним.

Задача розв'язується у такій послідовності.

Визначається частотна характеристика контуру коригування $W(\omega)$.

Вираз для передатної функції контуру коригування має вигляд

$$W(p) = \frac{1 + pT_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + pT_2 + p^2 (R_1 R_2 C_1 T_1 + R_1 R_4 C_1 T_1)} , \quad (23)$$

де

$$T_1 = R_3 C_2 ;$$

$$T_2 = (T_1 R_1 + R_1 R_2 C_1 + R_1 R_3 C_1 + R_1 R_4 C_1 + R_2 T_1 + R_1 T_1 + R_4 T_1) ,$$

або для частотної характеристики

$$W(j\omega) = \frac{1 + 2\pi j \omega T_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + 2\pi j \omega T_2 - 4\pi^2 \omega^2 (R_1 R_2 C_1 T_1 + R_1 R_4 C_1 T_1)} .$$

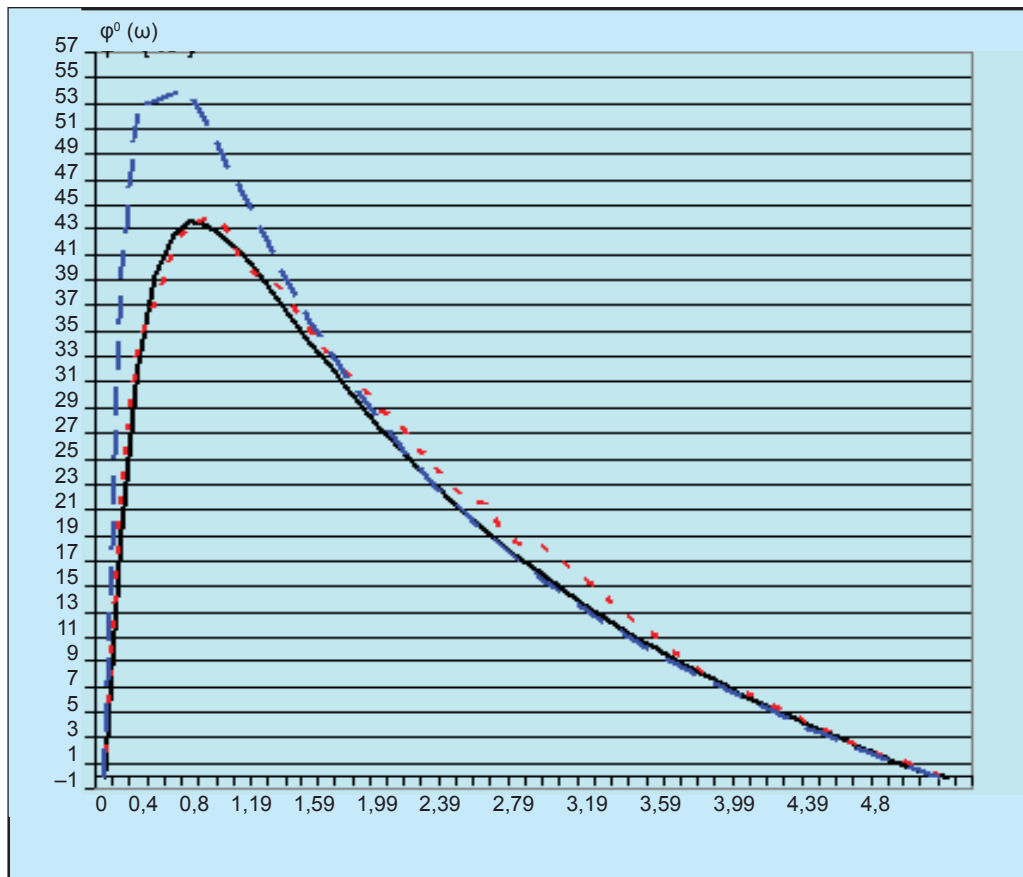


Рис. 2. Фазочастотна характеристика контуру коригування

У загальному вигляді отриману частотну характеристику запишемо так:

$$W(j\omega) = \frac{(a_0 + b_0 j\omega) \cdot 10^{-6}}{c_0 + c_1 \omega^2 + d_0 j\omega}, \quad (24)$$

де a_0, b_0, c_0, c_1, d_0 – коефіцієнти.

Підставимо в (23) значення параметрів:

$$W(j\omega) = \frac{(1 + 4,368 j\omega) \cdot 10^{-6}}{0,0555 - 1,959 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 0,0439 j\omega}.$$

Дискретні значення функції $W(j\omega)$ дорівнюють

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

а дискретні значення ФЧХ

$$\varphi^\circ(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$

де $P(\omega), Q(\omega)$ – дійсна та уявна частини ФЧХ контуру коригування відповідно.

Графік ФЧХ контуру коригування, який побудований за даними, обчисленими за формулою (24), наведено на рис. 2 суцільною лінією. Це аналітично розрахована ФЧХ контуру коригування.

За допомогою аналізатора частотних характеристик побудовано експериментальну ФЧХ контуру коригування. Цей графік наведено крапчастою лі-

нією (рис. 2). Експериментальна та обчислена ФЧХ контуру коригування мають незначні розбіжності, які можуть бути пов'язані з відхиленням значень параметрів контуру від номінальних.

Максимального значення фаза досягає за частоти $\omega_1 = 0,5$ Гц і дорівнює $43,5^\circ$, а нульова частота $\omega_0 = 4,8$ Гц.

Задамо приріст параметра C_2 : $\Delta C_2 = 5$ мкФ. Тоді згідно з (22) $\Delta q_{C_2} = \Delta C_2 / C_{2\text{ном}} = 0,33$.

З (20) $\mu \cdot \Delta q_{C_2} = 0,18$, тому $\mu = 0,18 / 0,33 = 0,6$. Згідно з (19) для Δq_j отримаємо:

$$\Delta q_{C_1} = 0,04; \quad \Delta q_{R_1} = -0,24;$$

$$\Delta q_{R_2} = -0,025; \quad \Delta q_{R_3} = 0,7.$$

Визначимо величини приростів Δx_j : $\Delta x_{C_1} = 0,16$ мкФ; $\Delta x_{R_1} = -1,2$ кОм; $\Delta x_{R_2} = -0,0625$ кОм; $\Delta x_{R_3} = 33$ кОм. Тоді нові параметри контуру дорівнюють: $R_1 = 3,8$ кОм; $R_2 = 2,44$ кОм; $R_3 = 80$ кОм; $R_4 = 1$ кОм; $C_1 = 4,16$ мкФ; $C_2 = 20$ мкФ.

Отримані значення елементів контуру надають нові значення ФЧХ (24):

$$W(j\omega) = \frac{(1 + 10 j\omega) \cdot 10^{-6}}{0,0872 - 3,42 \cdot 10^{-3} \omega^2 + 0,08 j\omega}.$$

Для ФЧХ за допомогою ЕОМ розраховано значення фазової та частотної характеристик, згідно з якими побудовано залежність, наведену на рис. 2 пунктирною лінією. З рисунка видно, що за частоти

$\omega_1 = 0,5$ Гц фаза дорівнює 54° , а частота нульової фази залишилася без змін ($\omega_0 = 4,8$ Гц).

Таким чином, результати моделювання свідчать, що запропонована методика розв'язує поставлену задачу, тобто дозволяє розраховувати можливу зміну параметрів контуру з метою забезпечення оптимальної ФЧХ за незмінної нульової частоти та постійного коефіцієнта підсилення.

Отже, розроблений метод синтезу оптимальної системи управління є достовірним.

Список літератури

1. *Дмитриев А.К.* Основы теории построения и контроля сложных систем / А.К. Дмитриев,

П.А. Мальцев. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 192 с.

2. *Бесекерский В.А.* Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
3. *Техническая эксплуатация летательных аппаратов: учеб. для вузов / Н.Н. Смирнов, Н.И. Владимиров, Ж.С. Черненко [и др.]; под ред. Н.Н. Смирнова.* – М.: Транспорт, 1990. – 423 с.
4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.
5. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.