



Добротність коливальної системи камертонного резонатора з урахуванням пружно-гістерезисного тертя

О.Ю. Олійник, Ю.К. Тараненко

Український державний хіміко-технологічний університет, кафедра комп'ютерно-інтегрованих технологій і метрології, пр. Гагаріна, 8, 49005, Дніпро, Україна
oleinik_o@ukr.net

Анотація

Статтю присвячено вирішенню завдання розрахунку добротності коливального контура віброчастотного давача з резонатором камертонного типу. Отримання математичних моделей і залежностей для розрахунку метрологічних характеристик чутливих елементів давачів є наразі актуальною метрологічною задачею.

На цей час більшість застосовуваних конструкцій віброчастотних давачів використовують коливальну систему з резонатором камертонного типу. Загальним недоліком камертонних резонаторів є низька добротність коливальних систем, що не дозволяє забезпечувати високу точність вимірювання та істотно обмежує сферу застосування вимірювального засобу. Одним із перспективних напрямків для усунення зазначених недоліків у приладобудуванні є використання нових матеріалів, форм чутливих елементів, технологій виробництва віброчастотних давачів. При цьому сучасні підходи до проектування засобів вимірювальної техніки, в першу чергу, вимагають від розробників удосконалення математичних моделей, що використовуються у процесі проектування чутливих елементів для конкретних умов.

Більшість математичних моделей для розрахунку добротності коливальних систем використовують рівняння коливань для резонаторів із лінійним в'язким тертям, коли узагальнена сила тертя залежить лінійно від узагальненої швидкості. При цьому лінійна модель не завжди правильно відображає втрати енергії в коливальній системі давача.

У роботі отримано основні співвідношення для визначення значень енергії, що розсіюється, у камертоні та добротності резонатора у вигляді сталевого стрижня прямокутного перерізу з урахуванням тільки вузького гістерезисного тертя для першої форми коливань. Отримані співвідношення повністю підтверджуються теорією коливань і можуть бути використані при проектуванні віброчастотних давачів з резонатором камертонного типу при експериментальному визначенні добротності коливальної системи давача.

Ключові слова: резонатор, камертон, коливання, гістерезис, тертя, добротність.

Отримано: 29.01.2018

Відредаговано: 04.02.2018

Схвалено до друку: 11.03.2018

Вступ

На цей час більшість застосовуваних конструкцій віброчастотних давачів використовують коливальну систему з резонатором камертонного типу [1]. У загальному випадку під камертонним резонатором розуміють механічну багаточастотну коливальну систему, в якій кількість руху і момент кількості руху в кожен момент часу дорівнюють нулю або настільки незначні, що взаємним впливом опори і резонатора при коливаннях можна знехтувати [2].

При включенні такої системи збудження резонатор починає коливатися як консольна балка типу камертона на власній резонансній частоті, яка залежить від геометричної форми, перетину, розмірів і матеріалу резонатора [3]:

$$f_0 = \frac{\alpha^2}{2\pi l^2} \sqrt{\left(\frac{EJ}{\gamma F} g\right)},$$

де $\alpha=1,875$; EJ — вигібна жорсткість резонатора; E — модуль пружності; J — статичний момент інерції резонатора; F — площа поперечного перерізу; γ — питома вага матеріалу резонатора; g — прискорення вільного падіння, l — довжина консолі резонатора.

Коливання цього елемента супроводжуються періодичним виникненням поперечної реакції у вузлі його закріплення.

Загальним недоліком камертонних резонаторів є низька добротність коливальних систем, що не дозволяє забезпечувати високу точність вимірювання [4]. Використання нових матеріалів, форм

чутливих елементів, технологій виробництва є сьогодні дуже перспективним напрямком у приладобудуванні. Сучасні підходи до проектування засобів вимірювальної техніки вимагають від розробників удосконалення математичних моделей, що використовуються у процесі проектування чутливих елементів для конкретних умов.

Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Збільшення добротності коливальних резонаторів дозволяє значно поліпшити властивості систем, у яких вони використовуються [5]. По-перше, знижується поглинання енергії в елементах. Крім того, збільшення добротності дає можливість зменшити смугу пропускання частотних фільтрів, знизити поріг генерації і збільшити стабільність частоти автогенераторів, збільшити чутливість резонансних сенсорів, що використовуються для вимірювання різних величин [6].

Аналіз літературних даних показує, що більшість робіт, присвячених розрахунку добротності коливальних систем, використовують рівняння коливань для резонаторів із лінійним в'язким тертям, коли узагальнена сила тертя залежить лінійно від узагальненої швидкості [7, 8]. Моделі розрахунку добротності, що ґрунтуються на лінійному в'язкому терті, широко використовуються для теоретичних досліджень. При цьому лінійна модель не завжди правильно відображає втрати енергії у системі [9]. У багатьох практичних завданнях залежність сил тертя від швидкості і амплітуди коливань має більш складний характер. У загальному випадку тертя є нелінійним [10, 11]. У роботі [12] нелінійну залежність сил тертя від швидкості описано різними аналітичними виразами, проте залежність для визначення добротності не було одержано.

З урахуванням вищевказаного, можна сказати, що розробка математичної моделі добротності коливальної системи камертонного резонатора з нелінійним тертям є актуальним науковим завданням при експериментальному визначенні добротності коливальної системи.

Мета та завдання дослідження

Метою роботи є розробка математичної моделі добротності коливальної системи камертонного резонатора з нелінійним тертям при експериментальному визначенні добротності коливальної системи.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- отримати формулу для розрахунку розсіювання енергії у камертоні;
- отримати вираз для визначення добротності резонатора у вигляді сталого стрижня прямокутного перерізу з урахуванням тільки вузького гістерезисного тертя для першої форми коливань.

Побудова математичної моделі добротності коливальної системи камертонного резонатора з нелінійним тертям

Облік нелінійного тертя багато в чому спрощується, якщо вважати, що форми прогинів не залежать від тертя, що правомірно для коливальних систем із великою добротністю.

Будемо вважати відомими власні форми коливань, тоді форми прогинів згідно з [5]

$$u(y, t) = \sum U_r(y) S_{r(t)},$$

де

$$U_{r(y)} = \sin \frac{\lambda_r y}{l} - sh \frac{\lambda_r}{l} + \frac{ch \lambda_r + \cos \lambda_r}{\sin \lambda_r - sh \lambda_r} \cdot (\cos \frac{\lambda_r y}{l} - ch \frac{\lambda_r y}{l});$$

$$S_r(t) = e^{-nt} (A_r \sin \omega_r^* t + B_r \cos \omega_r^* t);$$

$$\omega_k^* = \sqrt{\omega_k^2 - n^2},$$

де U — вектор переміщення резонатора; S — площа перерізу камертона; r — радіус перерізу камертона; ω_k — частота власних коливань резонатора; λ — довжина хвилі власних коливань; n — постійна матеріалу; A та B — довільні постійні, що знаходяться шляхом підстановки рівняння у граничні умови.

Отримаємо вираз

$$u_r = \Phi_r U_r(y),$$

де $\Phi_r = \sqrt{A_r^2 - B_r^2}$ — амплітуда гармонічних коливань.

Відповідно до методики Я.Г. Пановко [13], можливо розрахувати енергію, яка розсіюється у матеріалі за період коливань, а отже, оцінити загасання у системі, розрахувати добротність, знайти аналог для зосередженої моделі.

Нехай, відповідно до гіпотези М.М. Давиденкова [14, 15], питома енергія розсіювання ψ_0 у даній точці стрижня може бути подана рівнянням

$$\psi_0(u, y) = \beta \sigma^{n+1}(u, y),$$

де β , n — постійні коефіцієнти матеріалу; $\sigma(u, y) = E |\chi u|$ — напруга у даній точці стрижня, де, у свою чергу,

$$\chi = \Phi_r \frac{d^2 U_r}{dy^2}$$

— кривизна стрижня резонатора при прогині у даній точці стрижня.

З урахуванням вищевказаного, в усьому обсязі стрижня за один період коливань розсіюється енергія, яку обчислюємо за такою загальною формулою:

$$\Psi_r = \int_V \psi_0 [\sigma(u, y)] dV,$$

або в більш розгорнутому вигляді маємо

$$\Psi_r = \beta E^{n+1} \Phi_r^{n+1} j^*(n) \int_0^l \left| \frac{d^2 U_r}{dy^2} \right|^{n+1} dy,$$

$$\text{де } j^*(n) = \int_s |u|^{n+1} ds.$$

Виконаємо попередні обчислення:

$$\int_0^l \left| \frac{d^2 U_r}{dy^2} \right|^{n+1} dy = \frac{R_r \lambda_r^{2n+1}}{l^{2n+1}};$$

$$R_r = \int_0^{\lambda_r} |-\sin z - shz + 1,3622(\cos z + \sin z)|^{n+1} dz, \quad (1)$$

де R_r — постійна величина, яка не залежить від геометричних розмірів стрижня, а залежить тільки від порядку нормального типу коливачів і постійної матеріалу n . У результаті маємо остаточну формулу для розрахунку розсіювання енергії у камертоні:

$$\Psi_r = \beta E^{n+1} \Phi_r^{n+1} j^* R_r (\lambda_r / l)^{2n+1}. \quad (2)$$

Неважко так підібрати лінійну силу F із пружним гістерезисом, що діє на масу в зосередженій моделі, щоб енергія розсіювання визначалася виразом (2):

$$F = \pm \frac{b \Phi_M^{n+1}}{\pi} \sqrt{1 - (y / \Phi_M)^2},$$

де $\Phi_M = \Phi_r U_r(l)$ — амплітуда коливачів моделі, дорівнює амплітуді на кінці стрижня, $y = \Phi_M \sin \omega_r t$.

Енергія, що розсіюється у моделі, визначається площею петлі гістерезису, в цьому випадку — площею еліпса:

$$\Psi_M = b \Phi_M^{n+1}. \quad (3)$$

Із рівності виразів (2) та (3) маємо

$$b = R_r j^* (\lambda_r / l)^{2n+1} [E / U_r(l)]^{n+1}.$$

Параметр b залежить від властивостей матеріалу, геометрії стрижня, власних форм коливачів.

Для першої форми коливачів визначимо добротність сталевго стрижня прямокутного перерізу з урахуванням тільки вузького гістерезисного тертя, вважаючи $n = 2$.

За формулами (1), (2) маємо

$$j^* = \frac{he^4}{32};$$

$$R_r = \int_0^{1,875} |-\sin z - shz + 1,3622(\cos z + \sin z)|^3 dz = 7,0.$$

Прийmemo $U_1(l) = 2,7242$; $\lambda_1 = 1,875$, отримаємо

$$\Psi_1 = \kappa \beta E^3 \Phi_M^3 h e^4 l,$$

де $\kappa = U_1^{-3}(l) \lambda_1^5 R^1 / 32$.

Добротність Q визначаємо з урахуванням

$$T_{\max} = \frac{1}{2} c_s \Phi_M^2 \text{ за такою формулою:}$$

$$Q = 2\pi \frac{T_{\max}}{\Psi_1} = 4\pi U_1^3 l^2 / 3\lambda_1 R_r \beta \Phi_M e E^2.$$

Для оцінки потенційної точності отриманого виразу скористаємося відомими співвідношеннями [16], що застосовуються для оцінки похибок непрямих вимірювань. Прологарифмуємо отриманий вираз для визначення добротності Q і отримаємо

$$\ln Q = 3 \ln U_1 - \ln \lambda_1 - \ln \Phi_M.$$

Після диференціювання виразу маємо

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{3dU_1}{U_1} - \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} - \frac{d\Phi_M}{\Phi_M}.$$

Остаточно отримаємо формулу для розрахунку максимальної відносної похибки непрямих вимірювань добротності Q :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{3\Delta U_1}{U_1} - \frac{\Delta \lambda_1}{\lambda_1} - \frac{\Delta \Phi_M}{\Phi_M},$$

$$\Delta Q = \pm \bar{Q} \sqrt{\left(\frac{3\Delta U_1}{U_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \lambda_1}{\lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \Phi_M}{\Phi_M} \right)^2}.$$

Підставивши для $Q=1273 \cdot 10^3$, $U_1(l)=2,7242$, $\lambda_1=1,875$, $\Phi_M=0,1$, з урахуванням похибок прямих вимірювань указаних величин, визначимо:

$$\Delta Q = \pm 1273 \cdot 10^3 \times \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 0,03}{2,7242} \right)^2 + \left(\frac{0,01}{1,875} \right)^2 + \left(\frac{0,01}{0,1} \right)^2} \approx 134,24.$$

Таким чином, за отриманим виразом Q можна обчислити добротність із точністю до 0,1 %.

Для порівняльної оцінки потенційної точності отриманого виразу було визначено максимальну відносну похибку непрямих вимірювань добротності Q за виразом $Q = \omega_r / \Delta \omega$, яка становить 1,41 %.

Таким чином, запропонований метод визначення добротності за амплітудними вимірюваннями з урахуванням пружного гістерезисного тертя має переконливі перспективи для використання при експериментальному визначенні добротності коливальної системи.

Висновки

У роботі отримано основні співвідношення для визначення значень розсіюваної енергії у камертоні та добротності резонатора у вигляді сталевго стрижня прямокутного перерізу з урахуванням тільки вузького гістерезисного тертя для першої форми коливачів. Отримані співвідношення повністю підтверджуються теорією коливачів і можуть бути використані при проектуванні віброчастотних давачів із резонатором камертонного типу при експериментальному визначенні добротності коливальної системи давача.

Добротность колебательной системы камертонного резонатора с учетом упруго-гистерезисного трения

О.Ю. Олейник, Ю.К. Тараненко

*Український державний хіміко-технологічний університет, кафедра комп'ютерно-інтегрованих технологій і метрології, пр. Гагарина, 8, 49005, Дніпр, Україна
oleinik_o@ukr.net*

Аннотация

Статья посвящена решению задачи расчета добротности колебательного контура вибросчетного датчика с резонатором камертонного типа. Получение математических моделей и зависимостей для расчета метрологических характеристик чувствительных элементов датчиков является сегодня актуальной метрологической задачей.

В настоящее время большинство применяемых конструкций вибросчетных датчиков используют колебательную систему с резонатором камертонного типа. Общим недостатком камертонных резонаторов является низкая добротность колебательных систем, не позволяющая обеспечивать высокую точность измерения, что существенно ограничивает область применения измерительного средства. Одним из перспективных направлений для устранения указанных недостатков в приборостроении является использование новых материалов, форм чувствительных элементов, технологий производства вибросчетных датчиков. При этом современные подходы к проектированию средств измерительной техники, в первую очередь, требуют от разработчиков совершенствования математических моделей, используемых в процессе проектирования чувствительных элементов для конкретных условий.

Большинство математических моделей для расчета добротности колебательных систем используют уравнение колебаний для резонаторов с линейным вязким трением, когда обобщенная сила трения зависит линейно от обобщенной скорости. При этом линейная модель не всегда правильно отражает потери энергии в колебательной системе датчика.

В работе получены основные соотношения для определения значений рассеиваемой энергии в камертоне и добротности резонатора в виде стального стержня прямоугольного сечения с учетом только узкого гистерезисного трения для первой формы колебаний. Полученные соотношения полностью подтверждаются теорией колебаний и могут быть использованы при проектировании вибросчетных датчиков с резонатором камертонного типа при экспериментальном определении добротности колебательной системы датчика.

Ключевые слова: резонатор, камертон, колебания, гистерезис, трение, добротность.

Q-factor of the oscillatory system of the tuning fork resonator taking into account the elastic hysteresis friction

O.Yu. Oliynyk, Yu.K. Taranenko

*Ukrainian State University of Chemical Technology, Department of Computer-Integrated Technologies and Metrology, Gagarina Ave., 8, 49005, Dnipro, Ukraine
oleinik_o@ukr.net*

Abstract

The article is devoted to the solution of the problem of calculating the Q-factor of an oscillating circuit of a vibration-frequency sensor with a tuning fork. Obtaining mathematical models and dependencies for calculating the metrological characteristics of sensing elements of sensors is an actual metrological task today.

Currently, most of the applied designs of vibration-frequency sensors use an oscillatory system with a tuning fork. A common disadvantage of the tuning fork resonators is the low Q-factor of the oscillation systems, which does not allow to provide high accuracy of measurement, which significantly limits the scope of the measuring instrument. One of the promising directions for eliminating these drawbacks in instrumentation is the use of new materials, forms of sensitive elements, manufacturing technologies for vibration frequency sensors. At the same time, modern approaches to the design of measuring instruments, first of all, require developers to improve mathematical models used in the design of sensing elements for specific conditions.

Most mathematical models for calculating the quality factor of oscillating systems use the oscillation equation for resonators with linear viscous friction, when the generalized friction force depends linearly on the generalized velocity. In this case, the linear model does not always correctly reflect energy losses in the sensor oscillation system.

The basic relations for determining the values of the scattered energy in the tuning fork and the quality factor of the resonator in the form of a steel rod of rectangular cross section are obtained in the paper, taking into account only the narrow hysteresis friction for the first waveform. The obtained relations are fully supported by the theory of oscillations and can be used in the design of vibration frequency sensors with a tuning fork in the experimental determination of the quality factor of the oscillating system of the sensor.

Keywords: resonator, tuning fork, oscillations, hysteresis, friction, Q-factor.

Список літератури

1. Boldarev S.T., Gusev R.B., Danilin S.I., Parshin A. Ya. Use of a quartz resonator of the tuning fork type as a thermometer in a dilution refrigerator. *Instruments and Experimental Techniques*. 2011. № 54. P. 740–747.
2. Zotov S.A. Quality factor maximization through dynamic balancing of tuning fork resonator. *IEEE Sensors Journal*. 2014. Vol. 14. № 8. P. 2706–2714.
3. Олейник О.Ю., Тараненко Ю.К. Вибро-стержневые частотные преобразователи температуры. *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. 2017. № 3. С. 58–64.
4. Lingcheng K., Xuan X., Jun Z., Yuxi W., Yuan-tai H. On the interaction between a quartz crystal resonator and an array of micro-beams in thickness-shear vibrations. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2015. Vol. 28. № 5. P. 464–470.
5. Митрофанов В.П. Колебательные системы с малой диссипацией: учеб. пособие. Москва: Физический факультет МГУ, 2011. 131 с.
6. Butikov E.I. Parametric excitation of a linear oscillator. *European Journal of Physics*. 2004. Vol. 25. № 4. P. 535–541.
7. Avanzini F. et al. Low-level models: resonators, interactions, surface textures. *The Sounding Object*. 2003. P. 137–172.
8. Yakhot V., Colosqui C. Stokes' second flow problem in a high-frequency limit: application to nanomechanical resonators. *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 586. P. 249–258.
9. Chandorkar S.A. et al. Limits of quality factor in bulk-mode micromechanical resonators. *Micro Electro Mechanical Systems*. 2008. P. 74–77.
10. Katz I., Lifshitz R., Retzker A., Straub R. Classical to quantum transition of a driven nonlinear nanomechanical resonator. *New Journal of Physics*. 2008. Vol. 10. № 12. P. 125023.
11. Oliyuk O., Taranenko Yu., Shvachka A., Chorna O. Development of auto-oscillating system of vibration frequency sensors with mechanical resonator. *Eastern-European journal of enterprise technologies*. 2017. Vol. 85. P. 56–60.
12. Berg S., Prellberg T., Johannsmann D. Nonlinear contact mechanics based on ring-down experiments with quartz crystal resonators. *Review of scientific instruments*. 2003. Vol. 74. № 1. P. 118–126.
13. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Москва: Ком-Книга, 2006. 351 с.
14. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях. *Журнал технической физики*. 1938. Т. 8. № 6. С. 156–161.
15. Петрухин В.В., Петрухин С.В. Основы вибродиагностики и средства измерения вибрации: учеб. пособие. Москва: Инфра-Инженерия, 2010. 176 с.
16. Анцыферов С.С., Русанов К.Е., Афанасьев М.С. Обработка результатов измерений. Москва: Икар, 2014. 228 с.

References

1. Boldarev S.T., Gusev R.B., Danilin S.I., Parshin A.Ya. Use of a quartz resonator of the tuning fork type as a thermometer in a dilution refrigerator. *Instruments and Experimental Techniques*, 2011, no. 54, pp.740–747.
2. Zotov S.A. Quality factor maximization through dynamic balancing of tuning fork resonator. *IEEE Sensors Journal*, 2014, Vol. 14, no. 8, pp. 2706–2714.
3. Oleynik O. Yu, Taranenko Yu.K. Vibrosterzhnevyye chastotnyye preobrazovateli temperature [Vibration rod frequency converters of temperature]. *Vimiryuval'na ta obchislyuval'na tekhnika v tekhnologichnikh protsesakh*, 2017, Vol. 3, pp. 58–64.
4. Lingcheng K. Xuan X., Jun Z., Yuxi W., Yuan-tai H. On the interaction between a quartz crystal resonator and an array of micro-beams in thickness-shear vibrations. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2015, Vol. 28, no. 5, pp. 464–470.
5. Mitrofanov V.P. *Kolebatel'nyye sistemy s maloy dissipatsiyey: Uchebnoye posobiye* [Vibration rod frequency converters of temperature]. Moscow, Fizicheskiy fakul'tet MGU, 2011. 131 p.
6. Butikov E.I. Parametric excitation of a linear oscillator. *European Journal of Physics*, 2004, Vol. 25, no. 4, pp. 535–541.
7. Avanzini F. Low-level models: resonators, interactions, surface textures. *The Sounding Object*, 2003, pp. 137–172.

8. Yakhot V., Colosqui C. Stokes' second flow problem in a high-frequency limit: application to nanomechanical resonators. *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, Vol. 586, pp. 249–258.
9. Chandorkar S.A. Limits of quality factor in bulk-mode micromechanical resonators. *Micro Electro Mechanical Systems*, 2008, pp. 74–77.
10. Katz I., Lifshitz R., Retzker A., Straub R. Classical to quantum transition of a driven nonlinear nanomechanical resonator. *New Journal of Physics*, 2008, Vol. 10, no. 12. P. 125023.
11. Oliynyk O., Taranenko Yu., Shvachka A., Chorna O. Development of auto-oscillating system of vibration frequency sensors with mechanical resonator. *Eastern-European journal of enterprise technologies*, 2017, Vol. 85, pp. 56–60.
12. Berg S., Prellberg T., Johannsmann D. Nonlinear contact mechanics based on ring-down experiments with quartz crystal resonators. *Review of scientific instruments*, 2003, Vol. 74, № 1, pp. 118–126.
13. Panovko YA.G., Gubanova I.I. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh system* [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow, KomKniga, 2006. 351 p.
14. Davidenkov N.N. O rasseyanii energii pri vibratsiyakh [On scattering of energy in vibrations]. *Zhurnal tekhn. Fiziki*, 1938, Vol. 8, no. 6, pp. 156–161.
15. Petrukhin V.V., Petrukhin S.V. *Osnovy vibrodiagnostiki i sredstva izmereniya vibratsii: uchebnoye posobiye* [Fundamentals of vibration diagnostics and vibration measuring instruments: training manual]. Moscow, Infra-Inzheneriya, 2010. 176 p.
16. Antsyferov S.S., Rusanov K.Ye., Afanas'yev M.S. *Obrobka rezul'tativ vymiryuvan* [Processing of measurement results]. Moscow, Ikar, 2014. 228 p.