УДК 621.798

Метод аналізу реологічних моделей в'язко-пружно-пластичних матеріалів у пакувальних процесах

В.С. Гуць, д.т.н., О.А. Коваль, к.т.н., Національний університет харчових технологій, м. Київ

Промислова переробка харчової сировини, пакувальних матеріалів супроводжується фізичним і механічним впливом технологічного обладнання, складними фізико-хімічними, біологічними процесами, вивчення яких дасть можливість впливати на рентабельність виробництва, зменшити енерговитрати, організувати найбільш ефективний та об'єктивний контроль якості готової продукції. Більшість процесів харчової промисловості пов'язані з переробкою і пакуванням структурованих дисперсних систем — суспензій, пін, гелів, структурно-механічні параметри яких необхідно знати під час вибору оптимальних режимів роботи устаткування, інтенсифікації технологічних процесів та проектування автоматизованих систем керування виробництвом [1].

Сировина, напівфабрикати, готова продукція переробних галузей промисловості мають різноманітні структурно-механічні властивості, які залежать від багатьох факторів: температури, тиску, вологості, якості сировини, механічної дії, умов, способів транспортування, строків зберігання та інших.

Утворення і руйнування структур, деформація, плин та поведінка харчових мас і пакувальних матеріалів у різних технологічних процесах, якість і товарний вигляд харчових продуктів та упаковки значною мірою визначаються структурно-механічними властивостями, які не є сталими. У цьому полягає складність їхнього визначення і використання в інженерних розрахунках.

Під час проектування пакувального, ріжучого, подрібнювального, перемішувального, дозувального, формувального та багатьох інших видів технологічного обладнання необхідно врахувати структурно-механічні властивості продукту. Їхнє знання дасть можливість точно сформувати дозу продукції, надати продукту необхідну форму, розрахувати силові навантаження на робочі органи, швидкість і траєкторію їхнього руху.

Так, у випадку модернізації технологічного обладнання без обґрунтування інженерних розрахунків, наприклад, збільшення швидкості деформування в'язко-пружно-пластичної дисперсної маси, такої як м'ясний фарш на 20 %, може призвести до збільшення зусилля деформування в десятки разів, а це у свою чергу — до руйнування робочих органів машини та виникнення травмонебезпечних ситуацій.

Під дією зовнішніх факторів, зокрема температури, тиску всередині упаковки, газовиділення з напоїв, від зовнішнього стискання продукт і упаковка деформуються. Характер змін форми і об'єму впливає на конструкцію обладнання, умови транспортування, зберігання, нанесення і збереження інформаційного зображення та споживчої інформації, дизайн, зовнішній вигляд.

Знання реологічних властивостей пакувальних матеріалів також необхідні при виробництві, використанні і утилізації тари. Запобігання браку під час видування пляшок з ПЕТФ залежить від режимів деформування і плину матеріалу.

Основними факторами, що визначають реакцію матеріалу на дію рушійної сили, є його реологічні властивості та сила і швидкість деформування. Реологія якісно і кількісно визначає поведінку продукту в умовах напруженого стану. До основних реологічних характеристик відносять пружність, пластичність, в'язкість. У одного і того ж самого матеріалу, залежно від його стану й умов навантаження, виявляються різні реологічні властивості, тобто він тече і деформується по-різному. Відповідно, реологічні коефіцієнти мають різні величини.

У реології розрізняють прості ідеалізовані одноелементні, двоелементні та складні багатоелементні тіла. До простих одноелементних тіл відносять: ідеально пружне (тіло Гука), ідеально в'язке (тіло Ньютона), ідеально пластичне — це те тіло, для якого напруження зсуву перевищує напруження межі плинності сухого тертя і відбувається рух з будь-якою

швидкістю. Його прийнято називати тілом Сен-Венана.

Для того щоб більш точно описати деформацію і плин більшості пакувальних матеріалів та харчових дисперсних систем, ідеальні тіла комбінують у різних сполученнях, з'єднуючи їх паралельно або послідовно, і отримують двоелементні та багатоелементні реологічні моделі.

Поширеними в харчовій технології двоелементними реологічними моделями є: пружно-пластичне тіло Гука — Сен-Венана; в'язко-пружне тіло Кельвіна — Фойгта та тіло Максвелла; в'язко-пластичне тіло Бінгама — Шведова. Математичні моделі таких тіл досить повно досліджені. У даній статті запропоновано достатньо простий для практичного використання спосіб визначення реологічних коефіцієнтів. Розглянемо його на прикладі поширеної в харчових технологіях реологічної моделі Кельвіна — Фойгта:

$$\tau = G\gamma + \mu\dot{\gamma}, \qquad (1)$$

де γ — змінна в часі відносна деформація;

G — пружна реологічна характеристика системи, Па;

μ — в'язка реологічна характеристика, Па·с;

τ — напруга деформування, Па;

$\dot{\gamma}$ — швидкість деформування, $с^{-1}$.

На рис. 1. показано механічну інтерпретацію в'язко-пружного тіла Кельвіна — Фойгта. Воно отримано при паралельному з'єднанні пружного елемента Гука з модулем пружності G і в'язкого елемента Ньютона з коефіцієнтом в'язкості μ.

Механізм деформування (розтягування) в'язко-пружного тіла Кельвіна — Фойгта такий. Під дією розтягувального зусилля пружина подовжується, а поршень буде рухатися в рідині. Рух поршня пов'язаний із в'язким опором рідини, через що повне розтягування пружини настає не відразу, а поступово. Коли навантаження зникає, пружина поступово стискується до початкової довжини. Це потребує часу внаслідок в'язкого опору рідини.

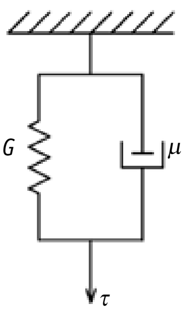

Рис. 1. *Модель в'язко-пружного тіла Кельвіна — Фойгта*

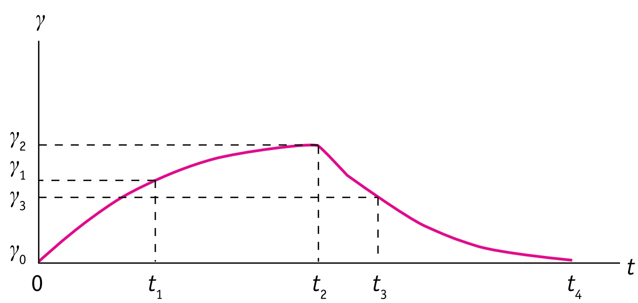

Рис. 2. *Кінетика деформування в'язко-пружного тіла ($t_2 - 0$ — інтервал, коли напруга τ, яка деформує систему, більше 0 і система розтягується; $t_4 - t_2$ — інтервал, коли $\tau = 0$ і система стискається)*

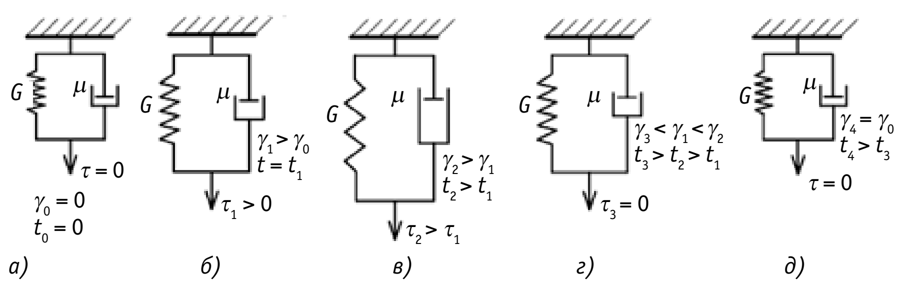

Рис. 3. *Механічна інтерпретація деформування тіла Кельвіна — Фойгта: навантаження відсутнє $\tau = 0$, деформування не відбувається $\gamma = 0$ (а); система навантажена $\tau_1 > 0$, відбувається повільне деформування до $\gamma_1 > \gamma_0$ протягом часу t_1 (б); система навантажена $\tau_2 > \tau_1$, відбувається повільне збільшення деформації $\gamma_2 > \gamma_1$ за рахунок більшого навантаження і часу його дії $t_2 > t_1$ (в); навантаження знято $\tau_3 = 0$, система повільно починає повертатись до початкового стану $\gamma_3 < \gamma_1 < \gamma_2$ (г); система за час $t_4 - t_2$ повернулась у початковий стан $\gamma_4 = \gamma_0 = 0$ (д)*

Кінетичну криву деформування в'язко-пружного тіла показано на рис. 2.

На рис. 3. показано механічну інтерпретацію деформування тіла Кельвіна — Фойгта під час розтягування.

Для знаходження реологічних коефіцієнтів G та μ виконаємо розв'язок рівняння (1). При $\tau = const$:

$$\gamma(t) = \frac{\tau}{G} + e^{-\frac{Gt}{\mu}} c\,. \qquad (2)$$

Постійну інтегрування c знаходимо, врахувавши початкові умови. При $t = 0$ деформація відсутня $\gamma(0) = 0$, тоді рівняння (2) буде мати вигляд:

$$\gamma(t) = \frac{\tau}{G}(1 - e^{-\frac{Gt}{\mu}}). \qquad (3)$$

Виконаємо диференціювання рівняння (3):

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\tau}{\mu} e^{-\frac{Gt}{\mu}}. \qquad (4)$$

Скориставшись експериментальною кінетичною залежністю рис. 2, будемо вважати, що деформування закінчиться, коли $t = t_2$, $\gamma(t) = \gamma_2$ і $d\gamma / dt = 0$. Побудуємо систему алгебраїчних рівнянь і знайдемо дві невідомі G і μ:

$$\begin{cases} \gamma_2 = \frac{\tau}{G}(1 - e^{-\frac{Gt_2}{\mu}}); \\ 0 = \frac{\tau}{\mu} e^{-\frac{Gt_2}{\mu}}. \end{cases} \qquad (5)$$

Двоелементні реологічні моделі не завжди дають можливість достатньо точно описувати деформування і плин значної кількості харчових дисперсних систем і пакувальних матеріалів, що негативно впливає на якість розрахунків.

Якщо побудована на основі аналізу експериментальних даних кінетика деформування має загальний вигляд як на рис. 4, тоді реологічна модель повинна враховувати залишкову деформацію $\gamma_{зал}$.

Аналіз рис. 4 свідчить, що, коли відбувається навантаження системи (інтервал $t_2 - t_1$), вона поступово розтягується — відбувається криволінійне зростання величини деформації γ. Якщо при t_2 зняти напругу, система почне поступово повертатись у свій початковий стан. Завдяки змінам у структурі продукту можемо мати залишкову деформацію $\gamma_{зал}$. Залежність на рис. 4 відрізняється від залежності на рис. 2 залишковою деформацією $\gamma_{зал}$.

Наведена кінетика деформування характерна для механічної моделі, що зображена на рис. 5.

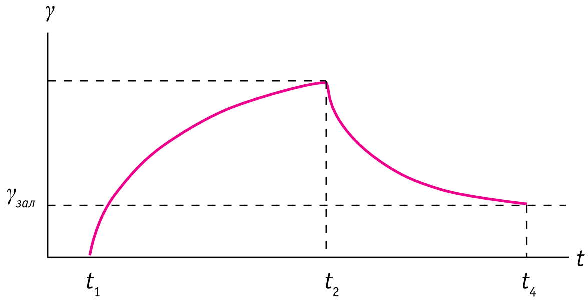

Рис. 4. *Кінетика деформування в'язко-пружної дисперсної системи із залишковою деформацією (загальний вигляд)*

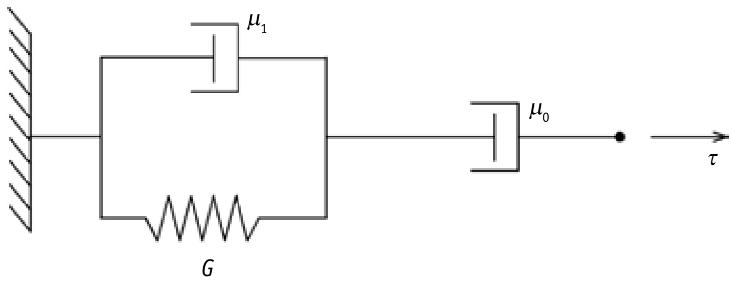

Рис. 5. *Триелементна, трипараметрична в'язко-пружна механічна модель*

Механічна модель складається із двох в'язких елементів Ньютона (μ_1 і μ_0) і одного пружного елемента Гука (G). На основі цієї механічної моделі, скориставшись символьним методом [2], побудуємо нову модель, об'єднавши послідовно з'єднані елементи G' і G'' (рис. 6).

Основне правило символьного метода таке. Символ D означає операцію диференціювання. Усі операції із цим символом виконуються за законами алгебри. Пружні і в'язкі елементи вважають умовно пружними, однак «модуль пружності в'язкого елемента» отримують множенням символу D на коефіцієнт в'язкості μ. Використовують поняття жорсткості моделі, яке позначають $G(D)$, і під нею розуміють, що, відповідно до закону Гука, $G(D) = \tau/\gamma$. Загальну жорсткість G паралельно з'єднаних гуківських елементів G' і G'' вважають сумою $G = G' + G''$, а послідовно з рівняння $\frac{1}{G}=\frac{1}{G'}+\frac{1}{G''}$.

Запишемо рівняння, характерне для послідовно з'єднаних двох елементів G' і G'' двоелементної реологічної моделі:

$$\frac{1}{G(D)}=\frac{1}{G'}+\frac{1}{G''}. \qquad (6)$$

Для кожного окремого елемента:

$$G'=G+D\mu_1; \qquad (7)$$

$$G''=D\mu_0. \qquad (8)$$

Підставивши рівняння (7) і (8) у (6), отримаємо:

$$\frac{1}{G(D)}=\frac{1}{G+D\mu_1}+\frac{1}{D\mu_0}. \qquad (9)$$

Виконаємо алгебраїчні перетворення в рівнянні (9) і, враховуючи, що $\frac{1}{G(D)}=\frac{\gamma}{\tau}$, а також провівши диференціювання змінних γ і τ по t у складових, де є символ D, отримаємо:

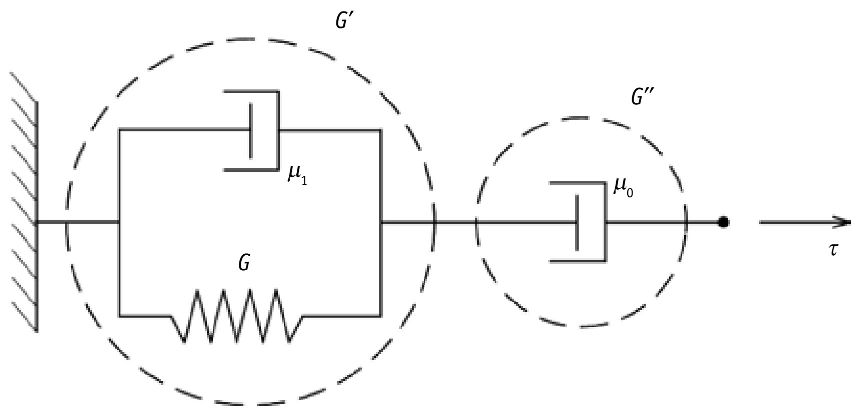

Рис. 6. *Механічна модель у вигляді об'єднаних послідовно з'єднаних двох елементів G′ і G″*

$$\dot{\tau}+\tau\frac{G}{\mu_0+\mu_1}=\ddot{\gamma}\frac{\mu_0\mu_1}{\mu_0+\mu_1}+\dot{\gamma}\frac{\mu_0 G}{\mu_0+\mu_1}. \qquad (10)$$

Рівняння (10) є математичною моделлю, яка відображає поведінку в'язко-пружної системи, коли маємо залишкову деформацію $\gamma_{зал}$. Така поведінка характерна для більшості м'ясних дисперсних систем (м'ясної сировини і готових виробів, коли не відбувається повного руйнування суцільності структури продукту і вона частково повертається у початковий стан).

Вважаємо, що $\mu_1 = \mu_0 = \mu$, тобто характеристики в'язких властивостей системи однакові. Це може мати місце, коли деформується однорідний за структурою продукт. Запишемо рівняння (10) у вигляді:

$$2\dot{\tau}+\tau\frac{G}{\mu}=\ddot{\gamma}\mu+\dot{\gamma}G. \qquad (11)$$

Якщо деформування відбувається при $\tau = const$, маємо:

$$\tau=\frac{\mu^2}{G}\ddot{\gamma}+\mu\dot{\gamma}. \qquad (12)$$

Рівняння (12) — диференціальне рівняння другого порядку. Виконаємо його розв'язок за початкових умов $t = 0$, $\gamma(0) = 0$; $V(0) = V_0$, де $\gamma(0)$ — початкова деформація, $V(0)$ — початкова швидкість деформування:

$$\gamma(t)=\frac{e^{-\frac{Gt}{\mu}}(\tau-V_0\mu)}{G}+\frac{\tau t}{\mu}+\frac{V_0\mu}{G}. \qquad (13)$$

Після диференціювання знайдемо швидкість деформування:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{e^{-\frac{Gt}{\mu}}(V_0\mu-\tau)}{\mu}+\frac{\tau}{\mu}. \qquad (14)$$

Аналіз експериментальної кінетичної залежності $\gamma = f(t)$ (рис. 4) свідчить, що процес деформування можна вважати таким, що закінчився, коли $t = t_2$; $\gamma(t) = \gamma_{max}$.

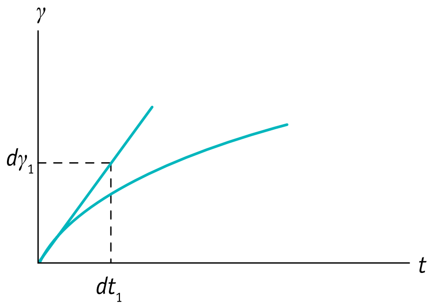

Рис. 7. *Визначення V_0 за експериментальною кінетичною кривою*

З рівнянь (13) і (14) запишемо алгебраїчну систему:

$$\begin{cases} \gamma_{max} = \dfrac{e^{-\frac{Gt}{\mu}}(\tau - V_0\mu)}{G} + \dfrac{\tau t}{\mu} + \dfrac{V_0\mu}{G}; \\ 0 = \dfrac{e^{-\frac{Gt}{\mu}}(V_0\mu - \tau)}{G} + \dfrac{\tau}{\mu}. \end{cases} \quad (15)$$

Підставимо відомі з експериментальної кінетичної кривої (рис. 4) значення τ, t, V_0, знайдемо невідомі реологічні коефіцієнти G і μ.

Початкову швидкість V_0 знаходимо як $V_0 = d\gamma_1 / dt_1 = \text{tg}\alpha$.

Залежно від вимог аналізу процесу деформування, розв'язування рівняння (12) можна виконати як розв'язок задачі Коши або як крайову, використавши умови розвантаження системи $\tau = 0$.

Висновок

Запропонований метод побудови і аналізу реологічних моделей є складовою теорії моделювання структурно-механічних властивостей в'язко-пружно-пластичних систем в умовах дії рушійної сили, яка деформує систему. Ця сила може мати різну природу походження: фізична, механічна, результат біологічних і хімічних реакцій.

Література

1. *Ковальська С.І.* Реологія харчових мас: Курс лекцій. — К.: НУХТ, 2010. — 34 с.

2. *Азаров Б.М., Арет В.А.* Инженерная реология пищевых производств. — М., 1978. — 113 с.

Метод анализа реологических моделей вязко-упруго-пластичных материалов в упаковочных процессах

В.С. Гуць, д.т.н., О.А. Коваль, к.т.н.

В статье рассмотрен новый метод построения и анализа реологических моделей. Он является составляющей теории моделирования структурно-механических свойств вязко-упруго-пластических систем в условиях действия силы, деформирующей систему. Природа происхождения этой силы может быть различной: физическая, механическая, результат биологических и химических реакций.

Ключевые слова: реология; механические модели реологических систем; реологические уравнения.

The method of analysis of rheological model of visco-elastic-plastic materials for packaging processes

V.S. Guts, Dr., O.A. Koval, Ph.D.

A method of creating and analyzing rheological models are part of history determine structural and mechanical properties of visco-elastic-plastic systems under the action of the driving forces deforming the origin of different nature: physical, mechanical and strength, resulting from biological and chemical reactions.

Key words: rheology; mechanical rheological model systems; the rheological equation.