

Студент 2 курсу  
факультету міжнародних економічних відносин ХНЕУ

## ЗМІСТ ТІНЬОВИХ ЦІН У ТРАНСПОРТНІЙ ЗАДАЧІ

*Анотація. Розглянуто основні методи розрахунку тіньових цін у транспортній задачі та визначено їх різновиди. Досліджено суть тіньових цін у даному виді економіко-математичних моделей з точки зору математики та економіки. Обґрунтовано важливість обчислення тіньових цін для проведення економічного аналізу діяльності підприємств.*

*Аннотация. Рассмотрены основные методы расчета теневых цен в транспортной задаче и определены их разновидности. Исследована суть теневых цен в данном виде экономико-математических моделей с точки зрения математики и экономики. Обоснована важность вычисления теневых цен для проведения экономического анализа деятельности предприятий.*

*Annotation. The basic methods of calculating shadow prices in the transportation problem are discussed and their types are defined. The essence of shadow prices in this kind of economic and mathematical models in terms of mathematics and economics are explained. The importance of calculating the shadow prices for the economic analysis of enterprises are proved.*

*Ключові слова: транспортна задача, тіньова ціна, лінійне програмування, економіко-математична модель, потенціал, тариф.*

Транспортна задача як економіко-математична модель складає основу цілого класу оптимізаційних задач, що пов'язані з розподілом ресурсів при існуванні певних обмежень щодо їх кількості або умов розподілу. Багато логістичних задач можна звести до транспортної. Тож вміння її розв'язувати із застосуванням математичних методів і тлумачити отримані результати з економічної точки зору має важливе значення [1, с. 3].

Одним із найважливіших показників, який отримує економіст у результаті такого аналізу та який дозволяє глибше зрозуміти суть економічних процесів, є тіньова ціна.

Актуальність вивчення цього поняття пояснюється майже повною його відсутністю в категоріальному інструментарії радянської та пострадянської економічної літератури, незважаючи на його величезну роль як з теоретичної, так і з практичної точки зору [2, с. 46].

До вивчення цієї теми зверталось багато вчених-економістів, зокрема В. Мортіков, І. Лебедева, А. Кузьмичов, Ю. Бажал, Л. Мешкова та ін.

Тож основною метою дослідження є вивчення методів розрахунку тіньових цін у транспортній задачі, визначення їх різновидів, тлумачення цього показника з математичної точки зору та з боку змістовної (економічної) сторони цього поняття, а також обґрунтування важливості тіньових цін для оптимізації економічної діяльності підприємства.

Поняття тіньової ціни останнім часом досить часто використовується в сучасних публікаціях економічної тематики. Воно не має нічого спільного з грошовим еквівалентом або з реальними цінами. Навпаки, останні є відображенням глибинних неявних оцінок, що перебувають поза увагою [2, с. 46].

Існує багато тлумачень цього поняття. З одного боку, тіньовими називають ціни досконалих ринків. Тобто, за умови досконалої конкуренції фактичні ціни відповідали б тіньовим. З іншого боку, тіньовими є ціни втрачених можливостей: розбіжність між тіньовою і фактичною цінами зумовлюється тим, що ринкова ціна на благо формується не в умовах найкращого (альтернативного) використання наявних ресурсів, а під впливом інших суб'єктивних факторів. Інші зводять зміст цього поняття до ціни, що враховує не індивідуальні витрати і вигоди, а суспільні [2, с. 47–49]. Тобто, тіньовою ціною називають приріст добробуту суспільства в цілому за умови, що доступна кількість деякого обмеженого ресурсу  $P$  зростає на одиницю [3, с. 469]. В економіко-математичних моделях це означає, що при збільшенні кількості запасу такого ресурсу на одиницю значення цільової функції зміниться на величину тіньової ціни цього ресурсу (збільшиться, якщо остання додатна і навпаки).

У транспортній задачі проаналізувати тіньові ціни з точки зору економіки дещо складніше, адже у цьому виді моделей вчені виділяють 2 типи тіньових цін: до першого типу відносяться потенціали постачальників та споживачів [1, с. 45], до другого типу – тіньові ціни переміщення одиниці вантажу від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача [4, с. 172].

Потрібно з'ясувати на реальному прикладі транспортної задачі, що в ній є тіньовими цінами та проаналізувати отримані величини з математичного та економічного боків. Спочатку слід розв'язати задачу за допомогою MS Excel за методом мінімальної вартості та потенціалів, а потім проаналізувати та пояснити отримані результати.



Слід розглянути реальну задачу. На замовлення будівельної компанії "Будінвест" пісок перевозиться від трьох постачальників (кар'єрів) чотирьом споживачам (будівельним майданчиком). Вартість на доставку включається до собівартості об'єкта, що супроводжується підвищенням ціни на нього, тому будівельна компанія зацікавлена забезпечити потреби своїх будмайданчиків у піску найдешевшим способом [5].

Відомі запаси (пропозиції) піску на кар'єрах (постачальників) – матриця А; потреби (попит) піску будмайданчиків (споживачів) – матриця В; витрати (ціна) на транспортування між кожною парою "постачальник-споживач" – матриця С.

$$A = (100 \ 150 \ 250), \quad B = (50 \ 100 \ 200 \ 150), \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти схему оптимальних перевезень для задоволення потреб (звідки і куди), при якому загальні витрати були б мінімальними.

Балансова умова транспортної задачі виконується, отже, задача є закритою і потреби вводити фіктивних учасників немає [1, с. 13].

Слід реалізувати оптимізацію моделі в MS Excel 2010 за допомогою команди Поиск решения (з подальшим виведенням на окремий аркуш Звіту про стійкість).

Звіт про стійкість буде мати вигляд, зображений на рисунку.

	A	B	C	D	E	F	G	H
6	Ячейки переменных							
7	Окончательное Приведенн. Целевая функция Допустимое Допустимое							
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Кoeffициент	Увеличение	Уменьшение	
9	\$B\$4	A1 B1	0	8	8	1E+30	8	
10	\$C\$4	A1 B2	0	5	3	1E+30	5	
11	\$D\$4	A1 B3	0	2	5	1E+30	2	
12	\$E\$4	A1 B4	100	0	2	2	1E+30	
13	\$B\$5	A2 B1	0	1	4	1E+30	1	
14	\$C\$5	A2 B2	100	0	1	5	1E+30	
15	\$D\$5	A2 B3	50	0	6	1	5	
16	\$E\$5	A2 B4	0	2	7	1E+30	2	
17	\$B\$6	A3 B1	50	0	1	1	1E+30	
18	\$C\$6	A3 B2	0	10	9	1E+30	10	
19	\$D\$6	A3 B3	150	0	4	2	1	
20	\$E\$6	A3 B4	50	0	3	2	2	
21								
22	Ограничения							
23	Окончательное Тень Ограничение Допустимое Допустимое							
24	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение	
25	\$B\$7	Факт B1	50	3	50	0	50	
26	\$C\$7	Факт B2	100	1	100	0	100	
27	\$D\$7	Факт B3	200	6	200	0	50	
28	\$E\$7	Факт B4	150	5	150	0	50	
29	\$F\$4	A1 Факт	100	-3	100	50	0	
30	\$F\$5	A2 Факт	150	0	150	0	1E+30	
31	\$F\$6	A3 Факт	250	-2	250	50	0	

Рис. Звіт про стійкість

Загальні витрати на транспортування склали 1400 одиниць (сума добутку D9 : D20 на F9 : F20) [1, с. 125–134].

Тепер потрібно розв'язати цю ж задачу за допомогою методу мінімальної вартості [1, с. 21–22]. Складається таблиця з вихідним планом (табл. 1), а потім він перевіряється на оптимальність за допомогою використання методу потенціалів (табл. 2). Для зручності подальшого аналізу потрібно взяти рівним нулю потенціал другого постачальника  $u_2 = 0$  [1, с. 29–30].

Таблиця 1

Вихідний план за способом мінімальної вартості

Постачальники	Споживачі				Запаси, ai
	B1	B2	B3	B4	
A1	8	3	5	2	100/0
	0	0	0	100	
A2	4	1	6	7	150/50
	0	100	50	0	
A3	1	9	4	3	250/200/150/0
	50	0	150	50	
Потреби, bj	50/0	100/0	200/50/0	150/50/0	500

Таблиця потенціалів, що відповідає вихідному плану

	$v_i$	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 6$	$v_4 = 5$
$u_1 = 3$	0		-2	3	2
		8	3	5	
$u_2 = 0$	3		1	6	5
		4			7
$u_3 = 2$		1	-1	4	3
			9		

Розроблений план оптимальний, оскільки для кожної зайнятої клітинки виконується умова оптимальності  $u_i + v_j \leq c_{ij}$ .

Для подальшого аналізу потрібно розрахувати також оцінки вільних клітинок [1, с. 27]:

$$\Delta_{11} = -8 \quad \Delta_{12} = -5 \quad \Delta_{13} = -2 \quad \Delta_{14} = 0$$

$$\Delta_{21} = -1 \quad \Delta_{22} = 0 \quad \Delta_{23} = 0 \quad \Delta_{24} = -2$$

$$\Delta_{31} = 0 \quad \Delta_{32} = -10 \quad \Delta_{33} = 0 \quad \Delta_{34} = 0$$

Загальні витрати на транспортування, відповідно до розробленого плану, склали, як і в MS Excel, 1400 одиниць.

Тепер, коли отримані кінцеві результати обох способів розв'язання, можна розпочати тлумачення отриманих величин.

Спершу потрібно проаналізувати тінюві ціни постачальників і споживачів – їх потенціали. У табл. 2 потенціалами є числа  $u_i$  та  $v_j$ , значення яких відповідають величинам у стовпці Теневая цена у звіті про стійкість (див. рисунок). Наприклад, потенціал постачальника А1 ( $u_1$ ) дорівнює -3, що збігається зі значенням клітинки E29, а потенціал споживача В3 ( $v_3$ ) дорівнює 6, що відповідно рівний клітинці E27 (навмисно прийняте значення  $u_2$  рівне нулю, для того щоб потенціали в табл. 2 співпали зі значеннями тінювих цін на рисунку) [1, с. 135–136].

Тепер потрібно з'ясувати з математичної точки зору, що таке потенціал і як він впливає на цільову функцію. Якщо взяти до уваги згадане визначення тінювої ціни, то можна зробити висновок, що потенціал певного учасника перевезень показує на скільки одиниць зміниться цільова функція (порівняння з розв'язком вихідної задачі), якщо потреби  $j$ -го споживача або пропозиція  $i$ -го постачальника зміняться на одиницю. Тобто, якщо значення потенціалу будь-якого учасника перевезень є від'ємним, то збільшення вантажу на такому підприємстві призведе до зменшення загальних транспортних витрат і навпаки. Звідси випливає, що запаси вантажу (йдеться про додатковий обсяг вантажу, оскільки для заданих умов оптимальний план уже знайдено) доцільно концентрувати на тих підприємствах, яким відповідає найменший потенціал (на складах – збільшувати запаси, на підприємствах-споживачах – розширювати виробництво) [1, с. 45–46].

У розглянутій задачі, наприклад, можна максимально збільшити запаси постачальника А1 ( $u_1 = -3$ ) на 50 одиниць. Можна збалансувати задачу, збільшивши запаси, наприклад, споживача В2 ( $v_2 = 1$ ) на ті ж 50 одиниць. З одного боку, загальні витрати та транспортування збільшаться (за рахунок споживача В2) на  $1 \times 50 = +50$  грош. од. і зменшаться (за рахунок постачальника А1) на  $3 \times 50 = 150$  грош. од. Загальний ефект від збільшення запасів складе  $-150 + 50 = -100$  грош. од., тобто, нова сума загальних транспортних витрат зменшиться до:  $1400 - 100 = 1300$  грош. од. При цьому оптимальний план, звичайно ж, зміниться [1, с. 46–47].

Тепер потрібно розглянути другий тип тінювих цін у транспортній задачі – тінюві ціни переміщення одиниці вантажу від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача. Згідно з основним визначенням тінювої ціни, робиться висновок про те, що при збільшенні кількості вантажу, що перевозиться по певному маршруту, на одиницю загальні витрати на транспортування зміняться на величину тінювої ціни. Така тінюва ціна дорівнює величині Приведеної вартості (рисунок) для кожного маршруту та рівна оцінці клітинок  $\Delta_{ij}$ , взятої з протилежним знаком. Наприклад, приведена вартість маршруту А2→В1 (E13) дорівнює модулю оцінки клітинки (2;1)  $|\Delta_{21}| = | -1 | = 1$  (аналогічна рівність виконується і для решти величин) [4, с. 171–172].

Тепер на прикладі слід розглянути, як зміна кількості перевезеного вантажу на певному маршруті вплине на величину цільової функції.

Наприклад, потрібно внести до порожньої клітинки (1;2) табл. 1 додаткові 4 одиниці вантажу (тобто, постачальник А1 перевезе споживачу В2 на 4 одиниці більше вантажу). Потрібно перерозподілити наявні запаси по-новому, побудувавши цикл (ланцюг), і отримати новий оптимальний план (табл. 3).

Вихідний план після перерозподілу перевезень

Постачальники	Споживачі							Запаси, a <sub>i</sub>
	B1		B2		B3		B4	
A1	8		3		5		2	100
	0		4		0		96	
A2	4		1		6		7	150
	0		96		54		0	
A3	1		9		4		3	250
	50		0		146		54	
Потреби, b <sub>j</sub>	50		100		200		150	500

Згідно з означенням тіньової ціни, перерозподіл вантажоперевезень має привести до збільшення ( $|\Delta_{12}| = 5 > 0$ ) загальних транспортних витрат на  $5 \times 4 = 20$  грош. од. і вони дорівнюватимуть, відповідно,  $1400 + 20 = 1420$  грош. од. Можна перевірити це припущення порахувавши нове значення цільової функції як суму добутоків тарифів на кількість вантажу на кожному маршруті:

$$4 \times 3 + 96 \times 2 + 96 \times 1 + 54 \times 6 + 50 \times 1 + 146 \times 4 + 54 \times 3 = 1420 \text{ грош. од.}$$

Отже, підтвердилась думка про те, що тіньовими цінами переміщення одиниці вантажу від *i*-го постачальника до *j*-го споживача є величини їх приведеної вартості або оцінок  $\Delta_{ij}$ , взятих з протилежним знаком, оскільки вплив цих показників на цільову функцію співпадає з самою суттю поняття "тіньова ціна".

Виділяють ще одну інтерпретацію тіньової ціни переміщення одиниці вантажу від *i*-го постачальника до *j*-го споживача. Вважають, що приведена вартість показує на скільки необхідно зменшити витрати на перевезення (тариф) по даному маршруту, щоб його використання стало ефективним (щоб не вигідні маршрути стали вигідними) [5]. У цьому легко переконатися, поглянувши на рисунок. Як видно, наведена вартість для заповнених клітинок дорівнює нулю (тобто, маршрут при даному тарифі використовується та є ефективним), для незаповнених клітинок ця величина є додатною і показує на скільки потрібно зменшити тариф на даному маршруті. Наприклад, щоб маршрут (1;3) став вигідним і увійшов до оптимального плану, необхідно тариф цього маршруту  $c_{13} = 5$  зменшити на 2 одиниці, тобто новий тариф складе  $c_{13}' = 5 - 2 = 3$  грош. од. Проте не завжди можна знизити тариф на величину тіньової ціни, адже в деяких випадках він може набути нульового або від'ємного значення (що неможливо для реального життя). Наприклад, тариф маршруту (1;2)  $c_{12} = 3$  неможливо знизити на величину 5 (тіньова ціна), бо у цьому випадку новий тариф складе  $c_{12}' = 3 - 5 = 2$  грош. од. [4, с. 181].

Також, нульова тіньова ціна є свідченням існування альтернативного оптимуму, якому відповідає така ж загальна вартість транспортування [4, с. 178].

Отже, для транспортної задачі характерна наявність двох видів тіньових цін – потенціалів учасників перевезення та тіньових цін переміщення одиниці вантажу від *i*-го постачальника до *j*-го споживача. Від того, які цілі ставить перед собою економіст, залежить вид тіньової ціни, котрий він обере для обчислення і метод її розрахунку (відповідна формула при ручному обчисленні або відповідний показник у звіті про стійкість при обчисленні в MS Excel).

З точки зору математики, тіньові ціни у транспортній задачі впливають на цільову функцію так само, як і тіньові ціни в інших різновидах задач: якщо вони додатні, то значення цільової функції збільшується, якщо від'ємні – зменшується.

Для економістів знання тіньових цін у транспортних задачах має величезне значення. Потенціали учасників перевезення дозволяють розробити стратегію розширення обсягів виробництва (запасів) доти, доки всі тіньові ціни не стануть додатними, причому розширювати виробництво необхідно, у першу чергу, на тих підприємствах, потенціали яких найменші. Тіньові ціни переміщення одиниці вантажу від *i*-го постачальника до *j*-го споживача дозволяють оцінити у вартісному еквіваленті дві можливі ситуації. По-перше, можливі зміни ринкової кон'юнктури коли необхідно використовувати певний маршрут у конкретних умовах і потрібно вжити заходи щодо поліпшення ефективності його використання. По-друге, наслідки помилкового розподілу руху ресурсів, тобто альтернативні втрати/виграші. По-третє, нульова тіньова ціна є свідченням існування альтернативного оптимуму.

Отже, обчислення тіньових цін відіграє важливу роль під час економічного аналізу, дозволяючи поглибити його і розширити кількість можливих стратегій поведінки на ринку, що забезпечує стійкість підприємства, його підготовленість до можливих змін і, як наслідок, стабільність його розвитку.

*Наук. керівн. Малярець Л. М.*

**Література:** 1. Лебедева І. Л. Економіко-математичні моделі на базі транспортної задачі : навч. посібн. / І. Л. Лебедева, Г. К. Снурикова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2007. – 160 с. 2. Мортіков В. Тіньові ціни в економічній теорії: [Поняття, визначення] / В. Мортіков, А. Моклякова // Економіка України. – 2007. – № 18. – С. 46–51. 3. Економічний розвиток і державна політика : навч. посібн. / Ю. Бажал, О. Кілієвич, О. Мертенс та ін. ; за заг. ред. Ю. Єханурова, І. Розпунтенка. – К. : Вид. УАДУ, 2001. – 480 с. 4. Мешкова Л. Л. Логістика в сфері матеріальних послуг (На прикладі снабженческо-заготовительных и транспортных услуг) / Л. Л. Мешкова, И. И. Белоус, Н. М. Фролов. – 2-е изд. испр. и перераб. – Тамбов : Изд. ТГТУ, 2002. – 188 с. 5. Кузьмичов А. І. Математичне програмування в Excel [Електронний ресурс] / А. І. Кузьмичов, М. Г. Медведєв. – К. : Вид. Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с. – Режим доступу : [http://exsolver.narod.ru/LM/LM\\_transp\\_min.html](http://exsolver.narod.ru/LM/LM_transp_min.html).