Посилання на статтю

Кононенко И.В. Анализ устойчивости решений в задачах формирования стратегии развития предприятия с алгоритмическими и аналитическими целевыми функциями и ограничениями / И.В. Кононенко, Н.В. Шатохина // Управління проектами та розвиток виробництва: Зб.наук.пр. – Луганськ: вид-во СНУ ім. В.Даля, 2004. – № 3(11). – С.138-144. Режим доступу: http://www.pmdp.org.ua/

УДК 519.6

И.В. Кононенко, Н.В. Шатохина

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ С АЛГОРИТМИЧЕСКИМИ И АНАЛИТИЧЕСКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ

На примере однокритериальной дискретной динамической задачи поиска оптимального плана развития предприятия, модель которой содержит представления, сочетающие аналитические и алгоритмические зависимости в целевой функции и ограничениях, разработан подход к анализу устойчивости решения задачи в случае изменения коэффициентов целевой функции, левых и правых частей ограничений. Рис. 1, ист. 7.

Ключевые слова: стратегическое управление, дискретная динамическая оптимизация, устойчивость решения, допустимое решение, перспективное решение, алгоритмические и аналитические модели.

І.В. Кононенко, Н.В. Шатохіна

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ В ЗАДАЧАХ ФОРМУВАННЯ СТРАТЕГІЇ РОЗВИТКУ ПІДПРИЄМСТВА З АЛГОРИТМІЧНИМИ ТА АНАЛІТИЧНИМИ ЦІЛЬОВИМИ ФУНКЦІЯМИ Й ОБМЕЖЕННЯМИ

На прикладі однокритеріальної дискретної динамічної задачі пошуку оптимального плану розвитку підприємства, модель якої містить представлення, що поєднають аналітичні й алгоритмічні залежності в цільовій функції й обмеженнях, розроблений підхід до аналізу стійкості розв'язку задачі у випадку зміни коефіцієнтів цільової функції, лівих і правих частин обмежень. Рис. 1, дж. 7.

I.V. Kononenko, N.V. Shatokhina

SOLUTION STABILITY ANALYSES IN TASKS OF ENTERPRISE DEVELOPMENT STRATEGY FORMING WITH ANALYTIC AND ALGORITHMIC CRITERION FUNCTIONS AND RESTRICTIONS

On single-criterion discrete dynamic task of optimal enterprise development plan search as an example, an approach to decision task stability analyses is developed. Task model contains expressions, combining analytic and algorithmic dependences in criterion function and restrictions. Approach to task solution stability analyses in case of coefficients changes in criterion function, left and right components of restrictions is created.

Постановка проблемы. В настоящее время для разработки эффективных и адекватных реальным процессам методов поиска стратегии развития предприятий целесообразно применение аппарата математического программирования, в том числе дискретной оптимизации. Параллельно с созданием новых эффективных методов решения подобных задач большое практическое значение приобретают вопросы анализа устойчивости получаемых решений. Актуальность данной проблемы обусловлена наличием неопределённости в исходных данных, которая может быть связана не только с погрешностями и неточностями в описаниях некоторых характеристик и параметров задачи, но и с изменением величин во времени.

Методики проведения исследований устойчивости решений для непрерывных задач представлены достаточно полно. Вопросы устойчивости для задач линейного программирования изучались в работах [1, 2]. Однако для целочисленных задач данная проблема не менее актуальна, ей посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов [3]. Ранее авторами для решения задач развития производственной системы были предложены модель и метод решения однокритериальной задачи оптимизации процесса развития производства с алгоритмической целевой функцией, алгоритмическими и аналитическими ограничениями. Следующим этапом развития данного направления стала формулировка модели задачи выбора стратегии развития предприятия в однокритериальной постановке с учётом возможности осуществления мероприятий по увеличению спроса на выпускаемую продукцию и предложен алгоритм ее решения. В работе [4] были предложены модель и метод решения многокритериальной динамической немарковской задачи выбора стратегии развития предприятия с учетом рисков, присутствующих в процессе функционирования производственно-экономической системы. Для решения сформулированной задачи ранее был предложен метод, основанный на сочетании идей метода неявного перебора и метода уступок.

Целью данной работы является создание подхода для осуществления анализа устойчивости решения, постоптимального и параметрического анализа на примере однокритериальной дискретной задачи поиска оптимального плана развития предприятия, модель которой содержит представления, сочетающие аналитические и алгоритмические зависимости в целевой функции и ограничениях.

Основная часть. Рассмотрим понятие **устойчивости задачи**. Существует целый ряд различных интерпретаций термина «устойчивость» [1, 2]. Остановимся кратко на нескольких из них.

Для задачи:

$$\begin{aligned} &L = (\vec{c}, \vec{x}) \to max \\ &A\vec{x} \le \vec{b}, \quad \vec{x} \ge 0 \end{aligned}, \tag{1}$$

построим возмущенную задачу:

$$\begin{aligned} &L = (\vec{c}(\delta), \vec{x}) \to max \\ &A(\delta)\vec{x} \le \vec{b}(\delta), \quad \vec{x} \ge 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где (δ) – параметр, который позволяет формализовать механизм действия возмущения, $\delta > 0$.

При изменениях параметра (δ) задача (2) отклоняется от задачи (1).

Для $\vec{c}(\delta)$, $A(\delta)$, $\vec{b}(\delta)$ выполняются условия:

$$\|A(\delta)-A\|<\delta,\ \|b(\delta)-b\|<\delta,\ \|c(\delta)-c\|<\delta. \quad (3)$$

Говорят, что задача (2) принадлежит окрестности δ, если выполняются условия (3). Иными словами, выполнение условия (3) определяет степень отклонения (либо близости) задачи (2) к (1).

Пусть X^* – множество решений задачи (1), f^* – её значение в оптимуме, $X^*(\delta)$, $f^*(\delta)$ – аналогичные величины для возмущенной задачи.

Определение №1:

Задачу (1) назовём устойчивой, если существует такое $\delta_0>0$, что для $\forall\delta, 0\le\delta\le\delta_0$, задача (2) имеет решение.

Иначе, задача (1) устойчива, если она имеет решение, а также имеет решение любая задача, полученная из неё путём незначительных изменений параметров.

Определение №2:

Задачу (1) назовём устойчивой по функционалу, если она устойчива и для $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \ \delta>0$, и как только выполняются условия (3), $\left|f^*(\delta)-f^*\right|<\varepsilon$.

Определение №3:

Задачу (1) назовём устойчивой по решению, если она устойчива и для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0$, что как только выполняются условия (3) для $\forall x^*(\delta)\in X^*(\delta)$ найдётся $x^*\in X^*$, удовлетворяющее условию $\left|x^*(\delta)-x^*\right|<\varepsilon$.

В данной работе будем трактовать анализ устойчивости следующим образом.

Определение №4:

Под анализом устойчивости будем понимать определение допустимых интервалов изменения исходных данных, в пределах которых оптимальное решение и значение целевой функции останутся неизменными.

Параллельно с анализом устойчивости целесообразно проведение постоптимального анализа, т.е. выявления активных ограничений, сдерживающих улучшение решения; и параметрического анализа, заключающегося в исследовании изменения решения в зависимости от изменения некоторых параметров.

Перейдём к описанию подхода к **анализу устойчивости** в рамках проведения постоптимального анализа полученного решения на примере однокритериальной динамической задачи с алгоритмической целевой функцией, алгоритмическими и аналитическими ограничениями и булевыми переменными. Рассматривается случай изменения коэффициентов целевой функции, левых и правых частей ограничений. Воспользуемся общей идеей подхода к анализу устойчивости решений задач целочисленного линейного программирования при использовании метода ветвей и границ, а также некоторыми понятиями и теоремами из теории линейного программирования.

В рассматриваемой задаче необходимо максимизировать дисконтированную прибыль планового периода, при этом уложиться в зарабатываемые и выделенные на развитие средства, а также обеспечить необходимую производственную мощность с учётом прогнозов спроса на производимую продукцию. Рассматриваемая задача, назовём её «3», имеет следующий вид:

$$F = \sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H} Ц_t^{(h)} B_t^{(h)} \alpha_t - \sum_{t=1}^{t_н}\sum_{j=1}^{M} z_{jt} x_{jt} - \sum_{t=1}^{t_н}\sum_{u=1}^{I} z_{ut}{}^c x_{ut}{}^c -$$

$$- \omega_{пред} + Л_{пред} - И_{пред} \to max,$$

$$A_t^{(h)} \geq З_t^{(h)}, \quad t = \overline{1,T}, \; h = \overline{1,H},$$

$$S_t = S_{t-1}/\alpha_{t-1} + \beta F_{t-1} + K_t + \sum_{j=1}^{M}\sum_{p=t+1-g}^{t} Л_{j,t+1-g} x_{jp} - \sum_{j=1}^{M}\sum_{p=t+1-g}^{t} \omega_{j,t+1-g} x_{jp} +$$

$$+ \sum_{u=1}^{I}\sum_{p=t+1-g}^{t} Л^c{}_{u,t+1-g} x_{up}{}^c - \sum_{u=1}^{I}\sum_{p=t+1-g}^{t} \omega^c{}_{u,t+1-g} x_{up}{}^c, \; S_t \geq 0, \; t = \overline{1,T},$$

$$x_{jt} \in \{0,1\}, \; j = \overline{1,M}, \; t = \overline{1,t}, \quad x_{ut}{}^c \in \{0,1\}, \; u = \overline{1,I}, \; t = \overline{1,t},$$

$$x_{jt} = x_{jt}^0, \; j = \overline{1,M}, \; x_{ut}{}^c = x^c{}_{ut}{}^0, \; u = \overline{1,I}, \; t = 2-g, 3-g, \ldots, 0,$$

$$\sum_{j=1}^{M} x_{jt} \leq 1, \quad \sum_{u=1}^{I} x_{ut}{}^c \leq 1, \quad t = \overline{1,t_н},$$

где $z_{jt} = \sum_{r=1}^{l} \omega_{jr}\alpha_{t+r-1} - \sum_{r=1}^{l} Л_{jr}\alpha_{t+r-1} + \sum_{r=1}^{l} И_{jr} \sum_{k=t+r-1}^{T} \alpha_k$,

$$l = 1 - t + \min(t + g - 1, T),$$

$$z_{ut}{}^c = \sum_{r=1}^{l} \omega_{ur}{}^c \alpha_{t+r-1} - \sum_{r=1}^{l} Л_{ur}{}^c \alpha_{t+r-1} + \sum_{r=1}^{l} И_{ur}{}^c \sum_{k=t+r-1}^{T} \alpha_k,$$

$$l = 1 - t + \min(t + g - 1, T).$$

Здесь x_{jt} – булева переменная, равная 1, если в *t*-м году планового периода внедряется *j*-й вариант развития производства, и 0 – в противном случае; *j* – номер варианта развития производства, $j = \overline{1,m}$; $x_{ut}{}^c$ – аналогичная переменная, связанная с вариантами по увеличению спроса, *u* - номер варианта работ по увеличению спроса; $A_t^{(h)}$ – производственная мощность по *h*–му типу продукции в году *t*. Остальные переменные задачи сохранили тот же смысл, что и в работе [4].

Выделим величины, в процессе определения которых могут возникать неопределённости и неточности. Будем предполагать, что погрешности могут возникнуть в задании коэффициентов целевой функции, левых и правых частей ограничений. Это $B_t^{(h)}$ – величина спроса на производимую продукцию *h*-го типа продукции в году *t*; $З_t^{(h)}$ – запланированный объём выпуска *h*-го типа продукции в году *t*; K_t – объём средств, выделенных на развитие; z_{jt} – значение затрат при принятии варианта, связанного с увеличением производственных мощностей; z_{ut}^{c} – значение затрат при принятии варианта, связанного с развитием спроса; ω_{jr} – величина единовременных затрат, необходимых для реализации *j*–го варианта увеличения производственных мощностей в *r*-м году; $Л_{jr}$ – величина остаточной стоимости основных фондов, выбывших в *r*-м году при реализации варианта *j* ; ω_{ur}^{c} – величина единовременных затрат, необходимых для реализации *u*–го варианта развития спроса в *r*-м году; $Л_{ur}^{c}$ – величина остаточной стоимости основных фондов, выбывших в *r*–м году при реализации варианта *u*.

Сформулируем задачу «З$^+$» следующего вида:

$$F=\sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H}Ц_t^{(h)}B_t^{(h)+}\alpha_t-\sum_{t=1}^{t_н}\sum_{j=1}^{M}z_{jt}^{+}x_{jt}-\sum_{t=1}^{t_н}\sum_{u=1}^{I}z_{ut}^{c+}x_{ut}^{c}-$$

$$-\omega_{пред}+Л_{пред}-И_{пред}\to max, \qquad (4)$$

$$A_t^{(h)}\ge З_t^{(h)+}, \quad t=\overline{1,T},\ h=\overline{1,H}, \qquad (5)$$

$$S_t=S_{t-1}/\alpha_{t-1}+\beta F_{t-1}+K_t^{+}+\sum_{j=1}^{M}\sum_{p=t+1-g}^{t}Л_{j,t+1-g}^{+}x_{jp}-$$

$$-\sum_{j=1}^{M}\sum_{p=t+1-g}^{t}w_{j,t+1-g}^{+}x_{jp}+\sum_{u=1}^{I}\sum_{p=t+1-g}^{t}Л_{u,t+1-g}^{c+}x_{up}^{c}-\sum_{u=1}^{I}\sum_{p=t+1-g}^{t}w_{u,t+1-g}^{c+}x_{up}^{c},$$

$$S_t\ge 0,\ t=\overline{1,T}, \qquad (6)$$

$$x_{jt}\in\{0,1\},\ j=\overline{1,M},\ t=\overline{1,t},\quad x_{ut}^{c}\in\{0,1\},\ u=\overline{1,I},\ t=\overline{1,t},$$

$$x_{jt}=x_{jt}^{0},\ j=\overline{1,M},\ x_{ut}^{c}=x_{ut}^{c\,0},\ u=\overline{1,I},\ t=2-g,3-g,\ldots,0,$$

$$\sum_{j=1}^{M} x_{jt} \le 1, \quad \sum_{u=1}^{I} x_{ut}{}^{c} \le 1, \quad t = \overline{1, t_н}. \tag{7}$$

Здесь $z_{jt}{}^{+}$, $z_{ut}{}^{c+}$, $З_t^{(h)+}$, $\omega_{j,\,t+1-p}^{+}$, $\omega_{u,\,t+1-p}^{c+}$ – значения параметров модели, которые максимально изменены в большую сторону; $B_t^{(h)+}$, K_t^{+}, $Л_{j,\,t+1-p}^{+}$, $Л_{u,\,t+1-p}^{c+}$ – в меньшую сторону.

Допустимая область задачи «З$^{+}$» содержится в допустимой области задачи «З». Пусть X^*, $X^* = \left\{x^*{}_{jt}\right\}$, $j = \overline{1, M}$, $t = \overline{1, T}$ – оптимальное решение задачи «З$^{+}$»; $f^{\,opt}$ – значение целевой функции в оптимуме; $f^{\,*}$ – рекордное значение целевое функции; f' – нижняя граница для изменения значений целевой функции, которое может быть достигнуто на переменных, не входящих в частичное решение; $f + z_{jt} + z_{ut}{}^{c}$ – значение целевой функции для проверяемого частичного решения.

При уменьшении $z_{jt}{}^{+}$, $z_{ut}{}^{c+}$, $З_t^{(h)+}$, $\omega_{j,\,t+1-p}^{+}$, $\omega_{u,\,t+1-p}^{c+}$ и увеличении $B_t^{(h)+}$, K_t^{+}, $Л_{j,\,t+1-p}^{+}$, $Л_{u,\,t+1-p}^{c+}$ оптимальное решение задачи «З$^{+}$» может быть найдено повторным анализом всех частичных решений и их расширений.

Рассмотрим основные шаги алгоритма анализа устойчивости в ходе решения задачи «З$^{+}$».

1. Проверяем на допустимость каждое рассматриваемое в процессе решения задачи «З$^{+}$» частичное решение (см. рис.1). Таким образом, формируем множества частичных решений, для которых не выполняется какое-либо ограничение задачи, например, $\theta_t^{(h)}$ – множество частичных решений, для которых не выполняется одно ограничение (5) для *t*–го года и *h*–го типа продукции. Параллельно запоминаем критические значения варьируемых параметров, соответствующих этим частичным решениям.

2. Осуществляем проверку рассматриваемых частичных решений задачи «З$^{+}$» на перспективность. Для этого на всех этапах ветвления, при отсечении неперспективных ветвей, требуем, чтобы они и дальше оставались не перспективными при изменениях рассматриваемых параметров с точки зрения полученного оптимума задачи.

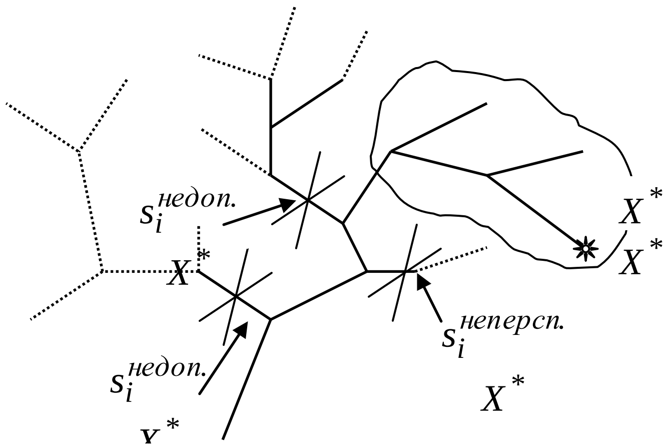

Рис. 1. Процесс выявления недопустимых и неперспективных решений

Остановимся на втором этапе более подробно. Необходимо отметить, что в процессе его осуществления проверка перспективности частичных решений идет параллельно для двух случаев.

2.1. Для ситуации, когда погрешности и неточности возникают в коэффициентах целевой функции: z_{jt}, $z_{ut}{}^{c}$, $B_t^{(h)}$.

2.2. Для аналогичной ситуации, но с величинами, формирующими ограничения рассматриваемой задачи: $З_t^{(h)}$, K_t, ω_{jr}, $Л_{jr}$, $\omega_{ur}{}^{c}$, $Л_{ur}{}^{c}$.

В обоих случаях для частичных решений, для которых в процессе оптимизации согласно алгоритму, предложенному в работе [4], выполняется условие $f + z_{jt} + z_{ut}{}^{c} + f' \geq f^*$, и соответствующего варьируемого параметра, например $З_t^{(h)}$, определяем критическое значение $Ф^{(h)s}$. Данное критическое значение должно быть таким, что при величине изменения $\Delta\, З_t^{(h)} \leq Ф^{(h)s}$ ни одно из допустимых решений задачи линейного программирования, формируемой в ходе реализации алгоритма неявного перебора для поиска нижних границ [4], не имело значения целевой функции f', при котором $f + z_{jt} + z_{ut}{}^{c} + f' < f^{opt}$ [5].

Существенное различие в упомянутых выше ситуациях заключается в том, что приращения в параметрах целевой функции и ограничениях по-разному сказываются на решении и результирующем оптимальном значении прибыли.

Так, для ограничений линейного вида согласно теореме Гейла и третьей теоремы двойственности [6, 7] можно утверждать, что при выполнении условий теоремы Гейла $f^*(\Delta З_t^{(h)}) = f^*$.

При рассмотрении приращений в целевой функции $f^*(\Delta z_{jt}) = f^* + x_{jt}^{opt} \Delta z_{jt}$ [3], где $\Delta З_t^{(h)}$, Δz_{jt} – новые, измененные значения $З_t^{(h)}$ и z_{jt}.

3. Производим сравнение найденных перспективных решений с оптимумом. Для выполнения условия о сохранении оптимального решения оптимальным требуем, чтобы перспективные решения оставались хуже оптимума. Найденные лучшие перспективные решения запоминаем в качестве вспомогательной информации.

4. Для формирования результирующей области устойчивости решений рассматриваемой задачи используем информацию о критических значениях, полученных на шаге 1, а также критических значениях изменений параметров в целевой функции и ограничениях, найденных на шаге 2.

Выводы. Описан подход к анализу устойчивости целочисленной задачи оптимизации плана развития предприятия в однокритериальной постановке на основе метода неявного перебора с учетом возможного варьирования параметров в целевой функции, левых и правых частях ограничений.

Результаты работы будут использоваться при разработке алгоритма поиска оптимальной стратегии развития сахарного завода и анализе устойчивости полученного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов С.А. Условия устойчивости задач ЛП. // Журнал вычислительной математики и математической физики, - 1981. Т.21, №6, С. 1402-1410.
2. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. – М.: Сов. радио, 1966. – 524с.
3. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наук. думка, 1988.– 471 с.
4. Кононенко И.В., Шатохина Н.В. Метод решения многокритериальной задачи формирования плана развития предприятия с учетом рисков // Открытые информационные и компьютерные технологии. – Харьков: НАКУ “ХАИ”.- 2003. Вып. 20. – С. 185-193.
5. Кононенко И.В., Смолин П.А. Анализ устойчивости решения динамической задачи с алгоритмическими ограничениями // Математическое и компьютерное моделирование в машиностроении: Сб. науч. тр. – Киев, 1994. – С. 48-55.
6. Ланкастер К. Математическая экономика. - М.: Сов. радио, 1972. – 464с.
7. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. - М.: Изд-во иностр. лит., 1969. - 398с.

Стаття надійшла до редакції 25.07.2004 р.