Посилання на статтю

Ляшенко О.І. Моделі втрати стійкості ринкових механизмів / О.І. Ляшенко // Управління проектами та розвиток виробництва: Зб.наук.пр. – Луганськ: вид-во СНУ ім. В.Даля, 2005 - №1(13). - С. 84-96. Режим доступу: http://www.pmdp.org.ua/

УДК 330

О.І. Ляшенко

МОДЕЛІ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ РИНКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

Розглянуто питання описання економічного механізму втрати стійкості ринкових систем. На прикладі чотирьох моделей: павутиноподібної моделі функціонування ринку, моделі Петрова втрати стійкості ринкового механізму, моделі ділового циклу, моделі Солоу оптимального економічного росту описані економічні механізми втрати стійкості, а також запропоновані можливі дії держави для підтримання стійкості функціонування описаних ринкових механізмів. Дж. 8.

Ключові слова: динамічна рівновага, втрата стійкості, атрактор, модель, економічний механізм.

Е.И. Ляшенко

МОДЕЛИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РЫНОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Рассматривается вопрос описания экономического механизма потери устойчивости рыночных систем. На примере четырех моделей: паутинообразной модели функционирования рынка, модели Петрова потери устойчивости рыночного механизма, модели делового цикла, модели Солоу оптимального экономического роста описаны экономические механизмы потери устойчивости, а также предложены возможные действия государства для поддержания устойчивости функционирования описанных рыночных механизмов. Ист. 8.

O.I. Lyashenko

MODELS OF MARKET MECHANISMS STABILITY LOSS

Point of the description the economic mechanism of market systems stability loss is considered. Economic mechanisms of stability loss are described on the example of four models: cobweb model of the market functioning, Petrov's model of market mechanism systems stability loss, model of a business cycle, Solow's model of optimum economic growth. Also possible state actions for maintenance the stability of described market mechanisms are offered.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Теорія, що описує *процес* встановлення рівноваги та представляє перехід від одного рівноважного стану до іншого як події, що послідовно розгортається у часі, отримала назву *теорії динамічної рівноваги.*

Основи теорії динамічної рівноваги були закладені А.Маршалом. Він розглядав рівновагу не як застиглий, статичний стан, а як певний момент неперервного руху, розвитку. Рівноважний стан – це завершальний етап процесу адаптації ринку до умов, що змінилися, і одночасно стартовий стан для початку нового процесу. А.Маршал постійно проводить думку про те, *що рівновага – не статична, а динамічна категорія.* У концепції А.Маршала перехід від однієї рівноваги до іншої відбувається шляхом послідовних перервних ітерацій, кожна з яких закінчується встановленням проміжної статичної рівноваги [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Подальший розвиток цього методу був зроблений у роботах Г.Шульца та У.Ріккі, які розробили знамениту павутиноподібну модель. Умова стійкості рівноваги на прикладі павутиноподібної моделі широко відома. Після екзогенного шоку нова рівновага буде досягнута у кінцевому підсумку лише при умові, що попит більш еластичний, ніж пропозиція. У протилежному випадку нова рівновага ніколи не буде встановлена, навпаки, коливання ринкової кон'юнктури будуть весь час посилюватись.

Стан рівноваги може бути стійким (стаціонарним) і рухомим. Про стаціонарно рівноважний стан говорять в тому випадку, якщо при зміні параметрів системи, що виникла під впливом зовнішніх чи внутрішніх збурень, система повертається до попереднього стану. Стан рухомої (нестійкої) рівноваги має місце тоді, коли зміна параметрів викликає за собою подальші зміни в тому ж напрямку і посилюється з часом. Довгий час в стані рівноваги можуть перебувати лише закриті системи, що не мають зв'язків з зовнішнім середовищем, тоді як для відкритих систем рівновага може бути лише миттю у процесі неперервних змін. Рівноважні системи не здатні до розвитку і самоорганізації, оскільки гасять відхилення від свого стаціонарного стану, тоді як розвиток і самоорганізація припускають якісну його зміну [2].

В процесі свого розвитку система проходить дві стадії: еволюційну (яку інакше називають адаптаційною) і революційну (стрибок, катастрофа). Під час розгортання еволюційного процесу відбувається повільне нагромадження кількісних і якісних змін параметрів системи і її компонентів, у відповідності з якими в точці біфуркації система вибере один з можливих для неї атракторів. В результаті цього відбудеться якісний стрибок і система сформує нову дисипативну структуру, що відповідає вибраному атрактору, що відбувається в процесі адаптації до змінених умов зовнішнього середовища. Еволюційний етап розвитку характеризується наявністю механізмів, які придушують сильні флуктуації системи, її компонентів або середовища і повертають її у стійкий стан, властивий їй на цьому етапі. Поступово в системі зростає ентропія, оскільки через зміни, що накопичилися в системі, а також в її компонентах і зовнішньому середовищі, здатність системи до адаптації падає і наростає нестійкість. Виникає гостре протиріччя між старим і новим в системі, а при досягненні параметрами системи і середовища біфуркаційних значень нестійкість стає максимальною і навіть малі флуктуації приводять систему до катастрофи - стрибка. На цій фазі розвиток набуває непередбачуваного характеру, оскільки він викликається не лише внутрішніми флуктуаціями, силу і направленість яких можна прогнозувати, проаналізувавши історію розвитку і сучасний стан системи, але і зовнішніми, що вкрай ускладнює, а то й робить неможливим прогноз. Іноді висновок про майбутній стан і поведінку системи можна зробити, виходячи з "закону маятника" - стрибок може сприяти вибору атрактора, "протилежного" минулому. Після формування нової дисипативної структури система знову вступає на шлях плавних змін, і цикл повторюється.

Окрім затухаючих самостійно або флуктуацій, що нейтралізуються національною економікою, існують також кумулятивні коливання, результуючі дії яких поступово накопичуються в економіці і також сприяють настанню стрибка. Серед кумулятивних флуктуацій особливо треба виділити мультиплікативні і акселеративні флуктуації (в цьому поділі пальма першості належить економічній теорії). Причому до останніх треба віднести не лише зміну інвестицій і доходу, але й попит, ціни, процент, прибуток, заборгованість.

Про нерівноважність економіки можна судити за своєрідними "індикаторами", якими є наявність прибутку, проценту, підприємництва, процесів нагромадження капіталу, монополії, інфляції, безробіття, криз, недовантаження виробничих потужностей, відкритість економіки та ін.

Головна роль у посиленні нерівноважності належить механізму позитивних зворотних зв'язків. Петля позитивного зворотного зв'язку посилює навіть слабкі флуктуації до гігантських, сприяючи тим самим якісному стрибку системи. В макроекономіці відомі два види позитивних зворотних зв'язків - мультиплікатор інвестицій, відкритий Дж.М. Кейнсом, і принцип акселератора, описаний Дж.М. Кларком. Наявність лише цих двох механізмів, при умові відносно великого обсягу інвестицій чи приросту попиту, робить економіку нерівноважною. В дійсності таких механізмів набагато більше. Зокрема, до них відносяться інфляція витрат, інфляційні сподівання, дефіцитні сподівання.

Виділення невирішених частин загальної проблеми. Класична економічна теорія вивчає "нормальну" поступову еволюцію економічної діяльності та відносин. Діючи більш чи менш незалежно на основі обмеженої інформації про зовнішні умови, економічні агенти реалізують вигідну для себе комбінацію економічних благ. Таким чином, можна вважати, що рівновага є проявом властивостей самоорганізації економічної діяльності маси людей. Класична економічна теорія розглядає загальну рівновагу як нормальний стан механізмів, що регулюють суспільне відтворення.

Але сучасна економічна дійсність ставить проблеми, що не вкладаються в рамки традиційних концепцій економічної рівноваги та росту. В розвинених країнах структурні зрушення в економіці відбуваються на очах одного покоління. В країнах, що розвиваються, застій в сукупності з високою інфляцією мало схожий на класичну рівновагу. Планова адміністративно регульована економіка до пори до часу знаходилась у своєрідному стані рівноваги, зовсім не схожому на ринкову. В колишніх країнах соціалізму відбувається зміна економічного укладу, а це – більш, ніж структурне зрушення. Все частіше дослідники стикаються з фундаментальними питаннями, які практично не обговорювались класичною економічною теорією, але заслуговують найпильнішої уваги. Їх можна охарактеризувати в цілому як проблеми механізмів самоорганізації економічних систем.

Формулювання цілей статті. Актуальними є питання описання економічного механізму втрати стійкості ринкових систем. Нижче на прикладах чотирьох моделей: павутиноподібної моделі функціонування ринку, моделі Петрова втрати стійкості ринкового механізму, моделі ділового циклу, моделі Солоу оптимального економічного росту описані економічні механізми втрати стійкості, а також запропоновані можливі дії держави для підтримання стійкості функціонування описаних ринкових механізмів.

Виклад основного матеріалу дослідження

Павутиноподідна модель. Мікроекономіка – основа всієї сучасної економічної науки. Мікроекономіку інколи називають "теорією цін", оскільки її предметом є механізм розподілу ресурсів, головними індикаторами якого виступають ціни. В центрі уваги мікроекономічного аналізу – досягнення рівноваги між попитом і пропозицією, за якими в свою чергу стоять індивідуальні плани споживання і виробництва. Перші складаються окремими споживачами, що мають мету максимізувати корисний ефект споживання. Плани виробництва розробляють підприємства, що прагнуть максимізувати прибуток. Необхідні передумови мікроекономічного аналізу – припущення про існування вільного ринку і про раціональний характер поведінки індивідів. Відзначимо, що всі ці теоретичні побудови базуються на припущенні про досконалий характер конкуренції, який полягає в тому, що всі домашні господарства і підприємства діють у відповідності з ринковими цінами (як реципієнти цін). Іншими словами, мова йде про припущення, у відповідності з яким ціни виконують функцію барометра, або про параметричну систему цін.

Основними проблемами, з якими ми стикаємося, приймаючи таке припущення, є такі: яким чином на ринку з досконалою конкуренцією досягається відповідність попиту і пропозиції, тобто як встановлюється рівновага, як встановлюються ринкові ціни, як визначається обсяг торгових операцій (кількість угод). Це – проблеми функціонування механізму ринку, тобто процесу ринкового регулювання.

Почнемо з того, що представимо процес ринкового регулювання у вигляді моделі, яку прийнято називати павутиноподібною [3].

Будемо вважати, що на ринку одного товару функція попиту $D(t)$ і функція пропозиції $S(t)$ – лінійні функції ціни $P(t)$ на момент часу t або ціни попереднього моменту часу.

Функція попиту:

$$D(t) = a + P(t), \tag{1}$$

де *a*, *A* – сталі параметри.

Функція пропозиції:

$$S(t) = b + BP(t-1), \tag{2}$$

де *b*, *B* – сталі параметри.

Сутність павутиноподібної моделі може коротко виражена в двох таких положеннях:

а) Пропозиція реагує на ціни з деяким лагом (відставанням в часі); іншими словами, сьогоднішня пропозиція $S(t)$ визначається ціною попереднього періоду $P(t-1)$, а сьогоднішній попит $D(t)$ визначається ціною поточного періоду $P(t)$.

б) Ціни кожного періоду $P(t)$ встановлюються на такому рівні, щоб зрівняти попит і пропозицію, тобто на рівні, при якому $D(t) = S(t)$.

Умови стабільності процесу можна легко вивести, якщо прирівняти формули (1) і (2) і одержати наступне лінійне рівняння, де ціни виступають як змінні (будемо вважати, що $A \neq 0$):

$$P(t) = \frac{B}{A} P(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}. \tag{3}$$

Ціна рівноваги P^*, при якій $P(t) = P(t-1)$, дорівнює

$$P^* = (\beta - \alpha)/(A - B), \tag{4}$$

а, отже, умовою, що визначає збіжність $P(t) \to P^*$ при $t \to \infty$, є нерівності

$$-1 < B/A < 1; \quad |B/A| < 1. \tag{5}$$

Державним регулюванням, що забезпечує стабільність ринку товару, для якого еластичність попиту менше еластичності пропозиції (прикладом такого товару є хліб) полягає у встановленні "стелі ціни".

Модель Петрова. Економічна історія налічує багато прикладів криз, під час яких ринкові ціни виявлялись нестійкими. Нестійкість ринкових цін пояснюють невідповідністю ринкових механізмів, що склалися, наявній технологічній структурі економіки. На користь цього говорить те, що вихід з кризи звичайно супроводжується змінами структури ринкових механізмів. Тому актуальною є задача дослідження впливу структури споживання на запас стійкості ринкових механізмів.

Можливість наблизитись до розв'язання цієї задачі з'явилась завдяки розвитку нового напрямку в теорії динамічних систем, пов'язаного з поняттям "дивного атрактора". Результати теорії динамічних систем автори монографії [4] використали при моделюванні ринкових механізмів. Ними запропонована математична модель формування ринкової ціни, яка дозволяє дослідити стійкість ринкових механізмів, використовуючи лише характеристики еволюції технологічної структури економіки. Нижче на основі ідей роботи [4] пропонується одна проста модель втрати стійкості ринкових механізмів, на якій проявляється взаємовплив старої технологічної структури економіки та нової структури споживання на стійкість існуючих ринкових механізмів.

Розглянемо ринок однорідного товару. Припустимо, що в кожен момент часу товар продається за єдиною ціною p, поведінка споживачів описується функцією попиту $C(p)$, поведінка виробників – функцією пропозиції $Y(p)$. Будемо вважати, що характерний час зміни функцій попиту набагато більший характерного часу зміни ціни, так що функції попиту і пропозиції можна вважати незмінними. Нехай зміні ціни відповідає швидкий час, а зміні функцій попиту та пропозиції – повільний. Моделюючи швидкий процес зміни ціни, як і в [4], будемо вважати цей час дискретним, що змінюється з деяким кроком.

Позначимо через p_n ціну товару на кроці n. Нехай покупці товару на кроці n, орієнтуючись на ціну p_{n-1}, планують витратити суму грошей $p_{n-1}C(p_{n-1})$, а виробники планують випуск на продаж товару в кількості $Y(p_{n-1})$. Вважається, що покупці та виробники діють строго у відповідності зі своїми планами. Тоді на кроці n встановиться ціна [4]:

$$p_n = \frac{p_{n-1}C(p_{n-1})}{Y(p_{n-1})}. \tag{6}$$

Припустимо, що товар виробляється галуззю, яка використовує як виробничий фактор єдиний тип ресурсу – однорідну робочу силу. Будемо розглядати лише стаціонарні магістральні траєкторії. Вважаємо, що в кожний момент часу t технологічна структура галузі описується гладкою функцією щільності розподілу потужностей по технологіях виробництва $m(\lambda)$, де λ – норма витрат праці на одиницю випуску товару. Змінна λ характеризує технологію виробництва. Множина технологій, що використовуються в галузі, описується напівпроменем $[\nu, \infty)$, так що функція щільності $m(\lambda)$ розподілу потужностей по технологіях визначена при $\nu \le \lambda < \infty$. Параметр $\nu > 0$ задає найкращу технологію, тобто характеризує існуючий технічний рівень виробництва в галузі.

Як відомо, вибуття потужностей внаслідок зношення устаткування означає, що збільшуються простої устаткування внаслідок поломок. Внаслідок цього знижується випуск товару в одиницю часу, але кількість робочих місць, як правило, не зменшується, і всі робочі місця залишаються зайнятими. Отже, виробничі одиниці технологічно старіють і продуктивність праці падає з часом. Будемо вважати, що сумарна потужність M старіє згідно експоненціального закону з показником амортизації μ. Оскільки ми розглядаємо лише стаціонарні траєкторії, то $M = const, \quad I = \mu M = const$, де I – інвестиції у виробництво.

Щоб одержати вираз для розподілу потужностей по технологіях $m(t,\lambda)$, обчислимо сумарну потужність виробничих одиниць, в яких в момент часу *t* норма витрат праці $\bar{\lambda}(t,\tau) \le \lambda$. Позначимо її через $M(t,\lambda)$. Маємо

$$M(t,\lambda) = M(\lambda) = \frac{I}{\mu}\left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right). \tag{7}$$

З (7) одержуємо вираз для стаціонарного розподілу потужностей по технологіях

$$m(\lambda) = \frac{dM(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\nu I}{\mu \lambda^2}. \tag{8}$$

Згідно класичних уявлень, вважаємо, що на кожному кроці *n* виробники планують випуск, максимізуючи сподіваний прибуток. Вираховуючи прибуток, вони орієнтуються на ціну p_{n-1} та ставку зарплати *s*. Будемо вважати, як і в [4], що пропозиція робочої сили більше попиту на неї, існує безробіття і ставка заробітної плати $s > 0$ – задана стала.

Виробники максимізують прибуток, тому лише рентабельні технології будуть завантажені на повну потужність; інші технології не використовуються, оскільки вони приносять збитки. Умовою рентабельності технології, очевидно, буде нерівність $p_{n-1} - s\lambda \ge 0$. Тоді функція пропозиції визначиться виразом

$$Y(p_{n-1}) = \int_{\nu}^{\frac{p_{n-1}}{s}} m(\lambda) d\lambda = M\left(1 - \frac{s\nu}{p_{n-1}}\right). \tag{9}$$

Тепер звернемося до функції попиту. Якщо попит на товар не залежить від ціни, товар є предметом першої необхідності. Припустимо, що на ринку продається товар першої необхідності і галузь випускає цей товар. Введемо позначення

$$x_n = \frac{s\nu}{p_n}, \quad A = \frac{M}{C}. \tag{10}$$

Тоді з (6) з урахуванням (9) одержуємо

$$x_n = Ax_{n-1}(1 - x_{n-1}). \qquad (11)$$

Природно припустити, що найкраща технологія незбиткова, тобто $s\nu / p_n \leq 1$. Отже, $0 \leq x_n \leq 1$. Щоб відображення (11) переводило $x_{n-1} \in [0,1]$ в $x_n \in [0,1]$, необхідно і достатньо, щоб

$$0 \leq A \leq 4 = A_M. \qquad (12)$$

Побудована модель ціноутворення (11) по заданій початковій умові x_0 однозначно визначає нескінченну траєкторію $x_0, x_1, ..., x_n, ...$. Змістовний інтерес являє вивчення асимптотичної при $n \to \infty$ поведінки розв'язку рівняння (11).

При всіх $A \geq 0$ в динамічній системі (11) існує нерухома точка $x = 0$, що відповідає нескінченно великій ціні на товар. Крім цього, при $A \geq 0$ існує ще одна нерухома точка $x_p(A) = 1 - 1/A$, що відповідає врівноваженій ціні. Траєкторія, що породжується точкою $x_p(A)$, змістовно цікава, тому що це – єдина траєкторія, на якій прогноз ціни споживачами та виробниками товару збігається з реалізацією і виробництво узгоджене з попитом.

Розглянемо, як із збільшенням параметра *A* змінюється асимптотична поведінка траєкторій динамічної системи (11). Якщо $0 \leq A \leq 1$, то при будь-якому початковому x_0 траєкторія системи (11) прямує до 0. Змістовно умова $0 \leq A \leq 1$ означає, що для задоволення попиту не вистачає виробничих потужностей, при цьому ціна товару прямує до $+\infty$. При $A = 1$ відбувається біфуркація, в результаті якої нерухома точка стає нестійкою і народжується стійка (при *A* близьких до 1) нерухома точка $x_p(A)$, яка виявляється стійкою при $1 < A < 3 = A_1$ і нестійкою при $A > A_1$. При $A = A_1$ нерухома точка $x_p(A)$ втрачає стійкість в результаті біфуркації Хопфа.

Відомо, що в динамічній системі (11) при збільшенні параметра *A* спостерігається нескінченна послідовність біфуркацій подвоєння періоду $\{A_k\}$. При $A = A_k$ траєкторія періоду 2^{k-1} втрачає стійкість, і в результаті біфуркації Хопфа народжується стійка траєкторія періоду 2^k, до якої притягуються траєкторії динамічної системи (11) при майже всіх початкових умовах. Існує границя

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A_\infty \approx 3{,}57, \qquad (13)$$

якій відповідає атрактор динамічної системи (11). Відзначимо, що при $A = A_M = 4$ динамічна система (11) поводить себе як стохастична.

Прояснюється така картина. Доки надлишок потужностей з виробництва товару, що характеризується величиною *A*, не дуже великий, ринкові механізми регулюють ціну товару так, що вона збігається до врівноваженої, що зрівнює попит і пропозицію. Якщо ж в результаті надлишкових інвестицій надлишок потужностей перевищить критичні значення, ціна на ринку починає коливатись, а потім і зовсім змінюється хаотично. Економічні агенти тепер не в змозі прогнозувати зміну ціни і згортають ділову активність. В економіці це явище відоме як криза перевиробництва. Вийти з цієї кризи можна, лише змінивши структуру виробництва. Державне регулювання якраз і полягає в тому, щоб сприяти розвитку галузей, що можуть задовольнити новий попит, за рахунок галузей, продукція яких попитом не користується. Не виключається також зовнішня допомога у вигляді уточнення структури експорту та імпорту товарів, а також у вигляді займів. Таким чином, запас стійкості ринкових механізмів залежить від структури технологічних ланцюжків та структури споживання.

Модель ділового циклу. Хоча в довгостроковій перспективі економіка виявляє тенденцію до зростання, її розвиток складається з хвиль підйомів та спадів кон'юнктури. Закономірності, зв'язані з хвилеподібним характером економічної динаміки, здавна притягували увагу економістів, в формулюванні яких ця проблема постає як проблема ділового циклу. Нижче познайомимося з моделлю ділового циклу [3], запропонованою Самуельсоном та Хіксом, в якій механізми коливання кон'юнктури пояснюються, виходячи з принципу акселерації та концепції мультиплікатора.

Ядро принципу акселерації являє положення про те, що масштаби інвестування залежать від приросту або темпів зміни попиту на кінцеву продукцію. Інвестиційний попит, що породжується цим, кратний попиту на кінцеву продукцію. Ступінь його кратності називають фактором акселерації. В моделі Самуельсона – Хікса рівняння інвестицій, що базується на принципі акселерації при факторі акселерації, рівному v, записується так:

$$I(t) = v(Y(t-1) - Y(t-2)). \tag{14}$$

Закономірності в сфері споживчих витрат виразимо у вигляді функції споживання, вводячи в неї часовий лаг тривалістю в 1 період:

$$C(t) = aY(t-1) + b. \tag{15}$$

В формулах (14) і (15) $v > 0, \quad 0 < a < 1, \quad b > 0$.

З умови рівноваги попиту і пропозиції

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{16}$$

одержуємо динамічне рівняння

$$Y(t) = (a+v)Y(t-1) - vY(t-2) + b. \tag{17}$$

Особливості розв'язків динамічного рівняння (17) випливають з того, які величини граничної схильності до заощадження $s = 1 - a$ та фактора акселерації ν.
Рівноважний розв'язок $Y(t) = Y(t-1) = Y^*$ для (17) задається як

$$Y = b/(1-a). \tag{18}$$

Якщо ми покладемо $y(t) = Y(t) - Y^*$, то (17) може бути перетворене до вигляду

$$y(t) = ay(t-1) + \nu(y(t-1) - y(t-2)). \qquad (19)$$

Якщо λ_1 і λ_2 – корені характеристичного рівняння для (19), тобто

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (\nu - s + 1)\lambda + \nu = 0, \qquad (20)$$

то розв'язок рівняння (20) можна виразити так:

$$Y(t) = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t. \qquad (21)$$

З урахуванням знаків і абсолютних значень розв'язків квадратного рівняння (20) ми одержуємо чотири види динаміки [3]:

1) при $0 < \nu < \left(1 - \sqrt{s}\right)^2$ – монотонне спадання;

2) при $\left(1 - \sqrt{s}\right)^2 < \nu < 1$ – затухаючі коливання;

3) при $1 < \nu < \left(1 + \sqrt{s}\right)^2$ – зростаючі коливання;

4) при $\nu > \left(1 + \sqrt{s}\right)^2$ – монотонне зростання.

Державне регулювання полягає у всебічному сприянні розвитку інвестиційного процесу та підприємництва.

Модель Солоу. Тут мова буде йти про модель, що описує економічне зростання в так званій агрегованій відкритій економіці. Агрегована модель характеризується тим, що в ній виробляється єдиний однорідний продукт. Відкритість моделі означає присутність як імпорту в економіку, так і експорту з неї. В нижче описаній моделі імпорт і експорт розглядаються у вигляді сальдо зовнішньої торгівлі (імпорт мінус експорт), що в такому випадку може також розглядатись як зовнішня допомога. Зовнішня допомога розглядається як керування економікою країни, що опинилася в скрутному становищі і прагне вийти з часом в стан свого максимального добробуту.

Будемо вважати, що час t змінюється неперервно і введемо позначення: $Y(t)$ – випуск продукції власного виробництва в момент часу t; $C(t)$ – споживання; $K(t)$ – капітал; $L(t)$ – праця (трудові ресурси); $I(t)$ – капіталовкладення (інвестиції); $Y^i(t)$ – імпорт; $Y^e(t)$ – експорт; $Y^a(t) = Y^i(t) - Y^e(t)$ – сальдо зовнішньої торгівлі.

Основні співвідношення досліджуваної моделі мають такий вигляд [5]:

$$Y(t) + Y^a(t) = C(t) + I(t). \qquad (22)$$

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t). \qquad (23)$$

Нехай $Y = F(K, L)$ – неокласична виробнича функція, що характеризується лінійною однорідністю, додатними частковими похідними по K і L та нульовим значенням, якщо хоча б один з ресурсів K або L нульові. Ми не будемо розрізняти населення та робочу силу. Введемо такі величини: $y = \dfrac{Y}{L}$ – середня продуктивність праці, $k = \frac{K}{L}$ – фондоозброєність праці, $i = \frac{Y^i}{L}$ – питома величина імпорту (на одиницю населення), $e = \frac{Y^e}{L}$ – питома величина експорту, $a = \frac{Y^a}{L}$ – питома величина зовнішньої допомоги. Тоді виробничу функцію можна представити у вигляді

$$y = \varphi(k), \quad \varphi'(k) > 0, \quad \varphi''(k) < 0 \text{ *для всіх* } k>0. \quad (24)$$

Звідси з урахуванням (22) - (23) випливає фундаментальне диференціальне рівняння Солоу теорії економічного росту, модернізоване з урахуванням зовнішньої торгівлі [5]:

$$k' = \varphi(k) + a - c - (n + \delta)k. \quad (25)$$

Рівень споживання на душу населення визначає корисність або добробут суспільства у будь-який момент часу. Будемо вважати, що функція соціальної корисності на душу населення має такі властивості:

$$\begin{gathered} U'(c) > 0, \quad U''(c) < 0 \quad \forall c > 0, \\ U'(c) \to 0 \quad при \quad c \to 0, \quad U'(c) \to 0 \quad при \quad c \to \infty. \end{gathered} \quad (26)$$

Тоді задача оптимального росту формулюється таким чином: максимізувати $\int_0^\infty U(c)e^{-rt}dt,$ де $r = p - n > 0$, при умовах

$$\begin{aligned} &k' = \varphi(k) + a - c - (n + \delta)k, \\ &k(0) = k_0, \ \ 0 \le c(t) \le \varphi\big(k(t)\big) + a. \end{aligned} \quad (27)$$

Побудуємо гамільтоніан

$$H = U(c)\exp(-rt) + \lambda\big(\varphi(k) + a - c - (n + \delta)k\big). \quad (28)$$

З принципу максимуму випливають два рівняння руху:

$$k' = \varphi(k) + a - c - (n + \delta)k, \quad (29)$$

$$c' = -\frac{U'(c)}{U''(c)}\big(\varphi'(k) - (p + \delta)\big). \quad (30)$$

Застосовуючи явну найпростішу схему дискретизації системи (29) - (30), одержуємо

$$k_{i+1} = k_i + \Delta t_i \left(\varphi(k_i) + a_i - c_i - (n+\delta)k_i\right), \tag{31}$$
$$c_{i+1} = c_i + \Delta t_i \left(\frac{U'(c_i)}{U''(c_i)}\left(\varphi'(k_i) - (\delta + p)\right)\right), \; i = 0,1,2,...,$$

де a_i – керуючий параметр (рівень сальдо “імпорт-експорт” у момент t_i). Для будь-якого початкового значення a_0 система (31) має нерухому точку $\left(k_0^*, c_0^*\right)$, що визначається системою рівностей

$$c_0^* = \varphi\left(k_0^*\right) + a_0 - (n+\delta)k_0^*, \tag{32}$$

$$\varphi'\left(k_0^*\right) = p + \delta. \tag{33}$$

Якщо рівень дисконтування $r = 0$ і $a_0 = 0$, то отримаємо у перетині точку $\left(k^{**}, c^{**}\right)$. Подібні точки відомі в літературі як золоте правило питомого споживання відношення капітал/праця, що зберігає сталі значення протягом всього розглядуваного проміжку часу. Числа k_0^*, c_0^* по аналогії можна назвати модифікованим золотим правилом нагромадження і споживання, що враховує ненульове сальдо “імпорт-експорт” і дисконтування з рівнем $r = p - n$. Далі, перепишемо (31) у вигляді

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= f_1(k_i, c_i, a_i), \\ c_{i+1} &= f_2(k_i, c_i), i = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{34}$$

Обчислимо якобіан у нерухомій точці $\left(k^*, c^*\right)$:

$$J = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial k & \partial f_1/\partial c \\ \partial f_2/\partial k & \partial f_2/\partial c \end{vmatrix}, \tag{35}$$

для якого знайдемо власні значення:

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\Delta t}{2}\left(r - \sqrt{r^2 + \frac{4U'\left(c^*\right)}{U''\left(c^*\right)}\varphi''\left(k^*\right)}\right), \tag{36}$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{\Delta t}{2}\left(r + \sqrt{r^2 + \frac{4U'\left(c^*\right)}{U''\left(c^*\right)}\varphi''\left(k^*\right)}\right), \tag{37}$$

тобто $|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| > 1.$

Отже, нерухома точка $\left(k^*, c^*\right)$ є сідловою (у локальному сенсі). Оскільки k^* – стале, то і $y^* = \varphi(k^*)$ – стале, і *K* та *L* ростуть в одній і тій же пропорції. При цьому *Y* та *K* ростуть в рівній пропорції з ростом *L*, що особливо важливо для гармонійного стабільного розвитку. Відзначимо, що є лише одна стійка траєкторія, що веде в точку $\left(k^*, c^*(a)\right)$. Це одна з сепаратрис [5]. Початкове відношення k_0 і споживання c_0 повинні бути вибрані так, щоб потрапити на стійку траєкторію. Інші ситуації призведуть або до "голодного" споживання, або до "проїдання" всього капіталу. Далі, в точці $\left(k^*, c^*\right)$ рівень (душового) споживання сталий і не може збільшуватись протягом часу. Це можна пояснити статичністю продуктової функції $Y = F(K, L)$, в якій відсутній технологічний прогрес. Таким чином, щоб обрати стійку траєкторію з множини можливих траєкторій, потрібно обрати спеціальне початкове значення споживання c_0 і таку точку $\left(k_0, c_0\right)$, щоб вона виявилась на стійкій траєкторії.

Інша альтернатива – можливість стабілізації траєкторії за допомогою методу Отта-Грегорі-Йорке (*OGY*-методу), чому присвячений подальший виклад. Цей метод був запропонований в [6], успішно застосовувався у фізиці, хімії, біології, а в економіці був використаний в роботі [7] для стабілізації розв'язків у динамічній моделі поведінки двох конкуруючих фірм. У роботі [8] *OGY*–метод використаний для стабілізації нестійких розв'язків у моделях неокласичної теорії оптимального економічного зростання агрегованої закритої економіки у випадку, коли функція соціальної корисності від споживання $U(c)$ двічі диференційовна та строго опукла вгору. Цей випадок приводить до задачі оптимального планування із строго опуклим функціоналом відносно керування $c(t)$. Аналогічним шляхом досліджується задача економічного росту відкритої економіки з керуванням, що є зовнішньоторговельним сальдо.

Нестійка нерухома точка в околі хаотичного атрактора є сідловою точкою. При цьому $|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| > 1$. Відповідні власні вектори e_1 та e_2 визначають стійкий та нестійкий напрямки в околі нерухомої точки $\left(k^*, c^*\right)$.

Будемо змінювати керуючий параметр *a* так, щоб відбувався зсув траєкторії $\left(k_i, c_i\right)$ до області стійкості нерухомої точки $\left(k_i^*, c_i^*\right)$. Для цього вектор $\Delta v_{i+1} = \left(\Delta k_{i+1}, \Delta c_{i+1}\right) = \left(k_{i+1} - k^*, c_{i+1} - c^*\right)$ не повинен мати у своєму розкладі за базисом e_1 та e_2 ненульових компонент, перпендикулярних стійкому напрямку, тобто вектору e_1.

Повернемося до лінеаризації системи (31) в околі точки k^*, c^*, a_0. Для малих значень $\Delta k_i = k_i - k^*, \quad \Delta c_i = c_i - c^*, \quad \Delta a_i = a_i - a^*$ справедлива наближена рівність

$$\begin{gathered} \Delta k_{i+1} = (1 + r\Delta t)\Delta k_i - \Delta t \cdot \Delta c_i + \Delta t \cdot \Delta a_i, \\ \Delta c_{i+1} = -\frac{U'\left(c^*\right)}{U''\left(c^*\right)}\varphi''\left(k^*\right)\Delta t \cdot \Delta k_i + \Delta c_i \end{gathered} \tag{38}$$

або у векторному вигляді

$$\Delta V_{i+1} = J\Delta V_i + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta t \Delta a_i. \tag{39}$$

З урахуванням (39) для керуючого параметра одержуємо вираз

$$\Delta a_i = \left[1 + \frac{\Delta t}{2}\left(r + \sqrt{r^2 + \frac{4U'(c^*)}{U''(c^*)}\varphi''(k^*)}\right)\right] \times$$
$$\times \left[-\Delta k_i + \frac{\Delta c_i}{r + \sqrt{r^2 + \frac{4U'(c^*)}{U''(c^*)}\varphi''(k^*)}}\right]. \tag{40}$$

Опишемо більш детально процес стабілізації нестійкої траєкторії. Для початкових значень k_0, c_0, a_0 з рівнянь (32)-(33) знаходимо k_0^*, c_0^*, а з (31) знаходимо k_1, c_1. Потім за формулою (40) знаходимо поправку Δa_1 і нове значення $a_1 = a_0 + \Delta a_1$ керуючого параметра *a*. Далі весь процес повторюється для наступної трійки значень k_1, c_1, a_1 і т.д. Припускається, що з часом *t* значення k_t, c_t, a_t, а також k_t^*, c_t^* стабілізуються у деякій області фазового простору (k, c).

Державне регулювання полягає в підтриманні за рахунок зовнішньої допомоги необхідної для оптимального зростання структури економіки.

Висновки з даного дослідження. Державне регулювання є потужним фактором для забезпечення стійкості ринкових систем. При цьому керування полягають в зміні структури економічної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дорошенко М.Е. Анализ неравновесных состояний и процессов в макроэкономических моделях. М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2000. – 206 с.
2. Ерохина Е.А. Теория экономического развития: системно – синергетический подход. [Электрон. текстовые данные] / Библиотека экономической и деловой литературы. http://www/ek-lit.agava.ru/eroh/index.html.
3. Математическая экономика на персональном компьютере: Пер. с яп. / М.Кубонива, М.Табата, С.Табата, Ю.Хасэбэ; Под ред. М.Кубонива; Под ред. и с предисл. Е.З. Демиденко. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.: ил.
4. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
5. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. – К.: Інформтехніка. 1995. – 320 с.
6. Ott E., Gregori C., Yorke J.A. Controlling Chaos // Phys. Rev. Lett. 1990, N 64.
7. Holist J.A., Hagel T., Haag G., Weidlich W. How to Control a Chaotic Economy? // J. Evol. Econ. 1996, N 6.
8. Яновский Л.П. Контролирование хаоса в моделях экономического роста // Экономика и математические методы. – 2002. – том 38, N 1. – С. 16-23.

Стаття надійшла до редакції 25.01.2005 р.