DOI: 10.13140/RG.2.1.4498.6321
УДК 519.21

Міхайленко Віктор Мефодійович
Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри ІТППМ, *ORCID 0000-0002-9573-9873*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Філонов Юрій Петрович
Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, ORCID 0000-0002-1100-4854
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

НЕОБМЕЖЕНІСТЬ ЗА ЙМОВІРНІСТЮ СИСТЕМ, ЩО КЕРУЮТЬСЯ ЗАГАЛЬНИМ ОДНОРІДНИМ ЛАНЦЮГОМ МАРКОВА

Анотація. *Досліджено параметр складної системи, малі значення якого відповідають кризам, а великі – розвитку, в припущенні, що цей параметр є функціоналом деякого загального однорідного ланцюга Маркова. Наведено умови, в яких відносна частота криз пряму до 0 з ймовірністю 1 та за ймовірністю цей параметр розвитку необмежено зростає. Розглядаються економічні моделі (межа самоокупності та тимчасові кризи) та динаміка популяції бактерій. Результати виводяться з доведеної тут схеми одержання ознак непозитивності ланцюгів Маркова.*

Ключові слова: процес Маркова; ланцюг Маркова; дискретний простір; фазовий простір

Вступ

У роботі для систем, керованих однорідним ланцюгом Маркова (л.М.), наводиться схема отримання тверджень про необмежене (за ймовірністю) зростання системи і показано як схема працює. Матеріал роботи відноситься до кола питань найбільш повно описаних в [1].

Зміст основного результату – теореми 1 – інтегральний критерій непозитивності загального однорідного л.М. Інші інтегральні критерії розглядалися в роботах [1-3]. Розглянуто деякі моделі з економічним та біологічним змістом.

Теорема 2 розрахована на моделі зростання [5]. Теорема 3 відноситься до застосувань в економіці, теорії масового обслуговування (ТМО).

Мета статті

Мета статті – дослідження параметра складної системи, малі значення якого відповідають кризам, а великі – розвитку. Для роботи з результатами достатньо початкових знань з ТМО, для вивчення доведення тереми 1 в розділі 2-6 [6].

Застосування в економіці та елементи ТМО є в роботах [7] (дискретний простір, дискретний та неперервний час) та [8], деякий підхід до даної роботи коротко є в [9]. Інтегральні умови іншого математичного характеру є в роботі [10] за участі авторів цієї роботи.

Виклад основного матеріалу

1.1. *Фазовий простір* E л.М. (ξ_n). Дамо загальні вимоги до ланцюга (ξ_n), до E і до тест-функції $F = F(x) > 0, x \in E$ із теорем в термінах [6] (а потім, в п.1.2., опишемо E детально без термінів з [6], щоб врахувати можливі поєднання дискретних і неперервних складових).

1.1.1. У фазовому просторі E σ – алгебра подій сепарабельна, ланцюг (ξ_n) незвідний, множини $(F < C)$ для великих C є скінченні суми мінорантних множин $((F < C) = \{x | F(x) < C\})$, F – невід'ємна функція на E).

1.1.2. Зауваження про дискретний простір:

Нехай міра μ кожної 1-точкової множини $= 0$ або > 0. Тоді: сепарабельність – це наслідок зчисленності (дискретності) E; незвідність – досяжність ланцюгом будь-якої множини A, $\mu A > 0$, з будь-якого стану і недосяжність множини A, ($\mu A = 0$), із станів x, для яких $\mu\{x\} > 0$, (міра μ максимальна в сенсі нерозширюваності носія: не можна $\mu\{x\} = 0$ замінити на $\mu\{x\} > 0$ ні для яких x). Тобто незвідність означає наявність тільки одного замкнутого класу станів, що сполучаються, досяжного з усіх станів.

Мінорантні (small) множини – це, зокрема, множини $\{x\}$, $\mu\{x\} > 0$.

1.2. Загальна прикладна структура E (але досить часткова для вимоги 1.1.1.).

1.2.1. E вкладається в деяке R^n з наслідуванням околів точок, $E = E' + E^{(1)} + E^{(2)} + ...$ (доданки не перетинаються), $E^{(i)}$ є зворотні гладкі образи

$R^m(m=m(i))$, іншими словами точки, лінії, поверхні.

1.2.2. В $E^{(i)}$ звичайна міра з R^m (1-нична $(m = 0)$, довжина $(m = 1)$, площа $(m = 2)$, ...) або їй еквівалентна $(\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1(dx) = p(x)\mu_2(dx)$, щільність $p(x) > 0$ на R^m), μ є сумою (по i) таких мір, $E \setminus E'$ – носій μ, $(\mu E' = 0)$; $p(x,y)$ $\left(p^{(n)}(x,y)\right)$ − щільності перехідних ймовірностей (за n кроків) по $\mu, (i = 1,2,...)$.

1.2.3. У будь-якої точки $x \in E^{(i)}$ є окіл $V\left(V \subset E^{(i)}\right)$, для якого $p^{(n)}(x,y) > \varepsilon > 0$ ($x,y \in V, \varepsilon, n$ залежать від V), V досяжна (тобто $\sum_1^\infty p^n(x,V) > 0$) із будь-якого стану E $(i = 1, 2, \ldots)$.

В описаних умовах (1.2.1. – 1.2.3): простір подій є сепарабельним, μ визначає незвідність ланцюга, μ − максимальна. Околи V з 1.2.3 – мінорантні множини, тобто виконується 2.1.1 (для F потрібно перевіряти можливість скінченного покриття множин $(F < C)$ околами V, часто це зводиться до очевидної можливості виконання покриття обмеженої множини скінченною кількістю околів).

Перед п.1.3 нагадаємо знаки $a^{\binom{+}{(-)}} = {}_{(-)}^{+} a \vee 0; \vee(\wedge) - max(min)$

1.3. Теорема 1 (основна). Нехай для л.М. (ξ_n) разом з умовою 2.1.1 виконуються такі умови 1.3.1-1.3.4. $(\varepsilon, c_1 = \mathrm{const} > 0)$:

1.3.1. Функції F, φ, f – необмежені (φ, f – невід'ємні, задані на $[0;\infty)$); φ, f – зростають, f – опукла вгору;

1.3.2. $P\Delta F(\Delta\varphi \wedge 1)$ і $|a|$ обмежені на *E*; тут $\Delta F = |\delta F|, \delta F = F(y) - F(x)$, $\Delta\varphi = |\varphi(F(y)) - \varphi(F(x))|$, $a = a(x) = P\delta F = \int P(x,dy)\delta F = M\left(F(\xi_{n+1}) - F(\xi_n) | \xi_n = x\right)$ − середній стрибок $F(\xi_n)$ в т. $\xi_n = x$;

1.3.3. $P(\delta f < -\varepsilon) > \varepsilon$ при $F(x) > C_1$; тут $\delta f = f(F(y)) - f(F(x))$;

1.3.4. $\sum a_m^- < \infty$; тут $a_m^- = \max\left(a^- \middle| m \le f(x) < m+1\right)$.

Тоді ланцюг непозитивний (часто пишуть неергодичний), $F(\xi_n) \to \infty (n \to \infty)$ за ймовірністю (тобто $P\{F(\xi_n) > C\} \to 1 (n \to \infty)$ при будь-якому С).

Непозитивність для нашого ланцюга це є відсутність стаціонарності при будь-якому початковому розподілі. Розглядається доведення теореми 1 в розділах 2-6, мотиви вибору F, φ, f в п. 4.2.

Якщо в теоремі 1 узяти $F = f^2, u = f(x) \in \tilde{E} = [1,\infty)$ (зсув f дозволяє зсунути інтервал $\tilde{E}$), то отримаємо 1.3.5.

1.3.5. Наслідок.

Позначимо $v = f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n) = f(y) - f(x)$ – стрибок функціонала f, $\alpha_{1,2}$ – моменти стрибка ($\alpha_1(x) = Pv, \alpha_2(x) = P(v^2)$). Якщо для деякого числа $c > 0$ та спадної функції $\psi(u) > 0$ справедливі умови:

а) $-\psi < 2u\alpha_1 + \alpha_2 < c, \alpha_2 < c$;

б) $p(v < -1/c) > 1/c \quad (u > c);$,

в) $\int_1^\infty \psi du < \infty$,

то марковський ланцюг непозитивний, $u_n = f(\xi_n) \to \infty (n \to \infty)$ за ймовірністю, відносна частота подій ($u_i < c$), $i < n$, напевно прямує до нуля ($c = const$, $n \to \infty$).

Доведення наслідку. Маємо 1.3.3, як умову б) наслідку. Так як $a = P\left((u+v)^2 - u^2\right) = 2u\alpha_1 + \alpha_2$, то $a_m^- < \psi(m)$ з умови а).

Значить ряд в 1.3.4 збігається за інтегральною умовою Коші (див. умову в) наслідку). Далі (аналогічно доведенню з 1.4, але при $\varphi = \ln u$): $\Delta\varphi = |\ln(1 + v/u)| < 2|v|/u$ при $|v| < u/2$ і відповідно $\Delta F(\Delta\varphi \wedge 1) < \left|2uv + v^2\right| \cdot \frac{2|v|}{u} \le (2|v| + |v|/2) \cdot 2|v| < 5|v|^2$, а при $|v| \ge u/2$ теж $\Delta F(\Delta\phi \wedge 1) \le \Delta F = \left(2uv + v^2\right) \le 4v^2 + v^2 = 5v^2,$ тобто 1.3.2. виконується, оскільки $P5v^2 = 5\alpha_2$ обмежена за умовою а) наслідку. Поведінка відносно частоти є наслідком непозитивності. Наслідок доведений.

1.3.6. Часто для марковських систем є область значень параметрів, для яких процес ергодичний і область, де процес неергодичний. Складнощі виникають там, де в деякому сенсі система на спільній межі цих областей.

Наприклад, беремо випадкове блукання зі збуренням в околі одиниці (див. 1.3.5 при $u = x$ та без а)-в), але коли v – однаково розподілені і $|v| < c$ при $u > c$). Тоді при $\alpha_1 < -1/c < 0$ буде ергодичність, а при $\alpha_1 \ge 0$ – неергодичність, це відомі критерії Фостера та непозитивності [1; 2]. Наші процеси з 1.3.5. містять, як часткові випадки, і «межеве» блукання з $\alpha_1 = 0$ і просторово неоднорідні процеси з умовою $\alpha_1(u)<0(u>c)$ (зміщення характеристик «в бік ергодичності»), які тим не менш, зберігають неергодичність.

Усі результати цієї роботи – «білямежеві», ймовірностні, належать до нескінченного проміжку часу, тому практична перевірка завжди має помилки першого та другого роду.

1.3.7. Приклад застосування теореми 1. Нехай p – щільність популяції бактерій в середовищі (можливі варіанти із забрудненням, старіння системи).

Зазвичай мала p експоненціальна у часі, а далі обмежувальні фактори логістику змінюють. Якість (здоров'я системи) оцінюємо величиною $u=-\ln p$.

З вищесказаного велике u (що відповідає малим p) змінюється лінійно. Вважаємо $u\geq 1$ (вибір одиниць). Подія ($u<u_{кр}$) означає хворобу (злам системи).

Нехай ще постійно є дія лікування (профілактики, очищення системи). Маємо $u_{n+1}=u_n+v(n=0,1...-час)$. Середню різницю дій лікування та зараження позначимо $Mv=Pv=\alpha_1$. Позначимо σ – середнє квадратичне відхилення показника $v, \alpha_2=\sigma^2+\alpha_1^2$.

Вважаємо, що система розвивається як марківський ланцюг в сенсі 1.2 і виконуються умови подібні (1.3.5 а)-в)):

(а) $-cu^{-1,01}<2u\alpha_1+\sigma^2<c, \sigma^2<c$;

(б) $p(v<-1/c)>1/c(u>c>1)$.

Величини u, α_1, σ^2 є функціями стану системи. Працює наслідок 1.3.5. (узяти $\psi=u^{-1.01}$, тоді в) очевидне, (б) співпадає з б); з (а) випливає $|\alpha_1|<c/2$, тобто а) теж виконується з іншим с.

Умова (б) означає, що є відокремлена від 0 можливість погіршення стану, коли він не найгірший. Умова (а) означає асимптотичне наближення до «стабільності» $\alpha_1=0 \quad (u\to\infty)$: грубо кажучи, за одиницю часу стабільний % «розмноження» бактерій компенсується «загибеллю» цього додаткового % профілактичними засобами або ліками (можливі випадкові коливання), але реально (при неідеальному здоров'ї, тобто $u<\infty$) компенсація може бути, особливо при великому зараженні, неповною. Припустимо повну виліковність хвороби за скінченний в середньому і обмежений час, але не загибель повної колонії бактерій, які продовжують жити за тим же законом в тому ж середовищі. Наша теорема 1 (конкретніше – наслідок 1.3.5) каже, що прості відхилення (а), (б) від «стабільності» не дають регулярного повторення хвороби, бо відносна частота повторень повинна напевно наближатися до нуля.

Запишемо теорему 2 − ще один наслідок теореми 1 з розрахунком на моделі зростання (але не тільки), так як допускається зростання абсолютних моментів скачків для $F(\xi_n)$ при зростанні $F(x)(\xi_n=x)$.

1.4. Теорема 2. Твердження основної теореми справедливе, якщо виключити її умови з функцією φ, але ввести умову: $\frac{a_2}{F+1}$ обмежено на E ($a_2=P(\Delta F)^2$ другий початковий момент стрибка для $F(\xi_n)|_{\xi_n=x}$).

Доведення. Візьмемо $\varphi=\ln(F+1)$. Будемо писать $\ln F$, вважаючи $F\geq 1$. При $\frac{\Delta F}{F}\geq\frac{1}{2}$ буде $(\Delta\varphi\wedge 1)\leq 1\leq\frac{2\Delta F}{F}$, а при $\frac{\Delta F}{F}\leq\frac{1}{2}$ буде $\Delta\varphi\wedge 1\leq\Delta\varphi=\left|\ln|F+\delta F|-\ln F\right|=\left|\ln\left(1+\frac{\delta F}{F}\right)\right|\leq 2\frac{|\delta F|}{F}$

(із розкладу $\ln(1+z)\leq|z|+\frac{|z|^2}{2}+\frac{|z|^3}{3}+...$ при $|z|\leq\frac{1}{2}$). Тобто в будь-якому випадку $P\Delta F(\Delta\varphi\wedge 1)\leq 2\frac{P(\Delta F)^2}{F}=2\frac{a_2}{F}$, отже для $\varphi=\ln(F+1)$ (повернулись знову до $F+1$) виконуються всі умови теореми 1 (перевірили тільки неочевидне). Кінець доведення.

1.5. Процес отримання доходів. Опишемо процес, який використовується в подальшому економічному додатку.

Нехай, в стабільних умовах, послідовно від клієнтів фірма отримує (на візит) доходи $\theta^{(1)}, \theta^{(2)},...$ − однаково розподілені випадкові величини (в.в.) з першими двома моментами θ_1, θ_2, незалежні в сукупності і від часового потоку появи клієнтів. Як це зазвичай передбачають в ТМО, дохід за час t буде $\theta(t)=\theta^{(1)}+...+\theta^{(\eta)}$, де $\eta=\eta(t)-$ пуасонівський процес, $M\eta(t)=\lambda_t=t\lambda_1=\lambda$. Тоді $\theta(t)$ − відомий процес з незалежними стаціонарними приростами. Розподіл $\theta(t)$ − складний пуасонівський (але дискретність $\theta^{(i)}$ не передбачається, оскільки розподіл доходів осіб в економіці описують, наприклад, неперервним логнормальним розподілом). Опускаючи звичайні викладки, можна записати: $M\theta(t)=\lambda_t\theta_1; M\theta^2(t)=\lambda_t^2\theta_1^2+\lambda_t\theta_2$.

По центральній граничній теоремі (ЦГТ) при $\lambda_t \to \infty$ (тобто при $t \to \infty$) (ЦГТ застосовна для процесів з незалежними стаціонарними приростами зі скінченним другим моментом) для $I_\lambda = \frac{\theta(t)-\lambda_t\theta_1}{\sqrt{\lambda_t\theta_2}}$ буде $P\{I_\lambda \le -C\} \to \varepsilon_c > 0(\lambda \to \infty)$.

1.5.1. Зауваження до наступного пункту 1.6.: складний пуасонівський розподіл має перетворення Лапласа $exp(\lambda(\tilde{\varphi}-1))$, де $\tilde{\varphi}$ є перетворенням для $\theta^{(1)}$ (використовується в застосуваннях). Час будемо вважати фіктивним: 2 однакових пункти прийому з частотою клієнтів λ дадуть за 1 годину той же розподіл доходів (в сумі), що і перший пункт за 2 години. Тобто будемо рахувати частоту (за 1 сталий період) $\lambda = \lambda(x)$ як величину пов'язану з станом (розміром і т.п.) фірми, а не часом.

1.6 *Динаміка розміру фірми.* Вважаємо, що послідовність станів $\xi_n \in E$ фірми (n – номер за кількістю періодів часу) в стабільних умовах є однорідний л.М., який разом з функцією $F(x)$ (капітал фірми) задовільняє формальним умовам 1.1.1. За період F змінюється на величину $\theta - r$, де $r = r(x)$ − в сумі очікувані відомі витрати (зарплата, страхові внески, поповнення резерву, …), θ (складна пуасонівска в.в., см. 1.5.1) – дохід з відомим $\lambda(x)$ − середнім очікуваним числом клієнтів, які в середньому приносять дохід θ_1 на одне обслуговування клієнта, проценти з капіталу вилучаються з розгляду (йдуть акціонерам). При досяганні рівня $F < F_{кр}$ фірма оновлюється (отримання страховки, рекапіталізація, нові володарі з інвестиціями, …) і процес продовжується (тобто немає обриву л.М.). Позначимо $a = a(x) = \lambda\theta_1 - r$ – середній приріст капіталу. Для простоти далі $F, r \ge 2$ (копійок), але зверху F теоретично необмежена.

Теорема 3. Нехай функція $\rho = \rho(F) \ge 0$ є незростаючою по F і такою, що $\Phi = \rho F \ln^2 F$ не спадає. При виконанні умов (числа $c_{1,2} > 0$):

(1.6.1) $-\frac{c_1}{\Phi} \le a \le c_2$;

(1.6.2) $\frac{c_1}{\rho^2} \le \lambda \le c_2 F$

величина $F(\xi_n) \xrightarrow{P} \infty (n \to \infty)$, фірма розвивається як непозитивний марківський ланцюг.

Зауваження. Наприклад функції $\rho = 1$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{F}}$, $\rho = \frac{1}{\ln^2 F}$ можна використовувати в застосуваннях.

Доведення. Визначимо $f(F) = \int_0^F \rho dF$ і перевіримо умови теореми 2.

Із (1.6.2.) випливає нерівність $\rho \ge \sqrt{\frac{c_1}{c_2 F}}$, тобто $f(F)$ необмежена, опуклість вгору є наслідком незростання $\rho = f'(F)$.

Далі $|a|$ (а значить і a^2) обмежені по (1.6.1.), так як Φ не спадає.

Із п.1.5. отримуємо $a_2 = M(\theta - r)^2 = M((\theta - \lambda\theta_1) + a)^2 = $ $= \lambda\theta_2 + a^2 \le c_2 F\theta_2 + a^2$ (див. 2.6.2.). Сумуючи, в результаті отримуємо обмеженість $\frac{a_2}{F+1} + |a|$ для теореми 2.

Перевіримо 4.3.3. Нерівність $\delta f < -\varepsilon$ через опуклість $f(F)$ виконується при $\rho\delta F = f'_F \delta F < -\varepsilon$. Достатньо перевірити, що $\delta F = \theta - r < -\frac{\varepsilon}{\rho}$ з ймовірністю $> \tilde{\varepsilon}$ (число $\tilde{\varepsilon} > 0$). Нехай $\varepsilon \downarrow 0, c \uparrow \infty, \varepsilon\sqrt{c} \downarrow 0$. При $\lambda > c$ буде (на основі (2.6.1-2)) $\frac{a+\varepsilon\rho^{-1}}{\sqrt{\lambda\theta_2}} = \frac{a}{\sqrt{\lambda\theta_2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda\rho^2\theta_2}} \le \frac{c_2}{\sqrt{c\theta_2}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{c_1\theta_2}}$ спадна величина. Значить ймовірність $P\left(\theta - r < \frac{-\varepsilon}{\rho}\right) = P\left(\frac{\theta - \lambda\theta_1}{\sqrt{\lambda\theta_2}} \le -\frac{a+\varepsilon\rho^{-1}}{\sqrt{\lambda\theta_2}}\right) > \tilde{\varepsilon}$ за ЦГТ (див.2.5.) при деякому $\tilde{\varepsilon} > 0$. При $\lambda \le c$ буде $\varepsilon\rho^{-1} \le 2 \le r$, так як $r \ge 2$ за умовою, $\rho^{-1} \le \sqrt{\frac{\lambda}{c_1}} \le \sqrt{\frac{c}{c_1}}$ за 1.6.2. і за припущенням $\varepsilon\sqrt{c} \downarrow 0$. Значить у нас буде $\theta - r \le -\varepsilon\rho^{-1}$ з ймовірністю більшою ніж $P(\theta = 0)$. Але ця ймовірність є ймовірністю відсутності клієнтів, тобто $e^{-\lambda}$ за розподілом Пуасона, і при $\lambda \le c$ буде $e^{-\lambda} > \tilde{\varepsilon} = e^{-c}$.

Залишилося перевірити 1.3.4. Із нерівності $a^- \le \frac{c_1}{\Phi}$ (2.6.1) і зростання $\Phi = \Phi(F)$ випливає, що достатньо встановити збіжність ряду $\sum_m \frac{1}{\Phi(F_m)}$, де F_m визначається з рівності $m = f(F_m)$. Ця збіжність виконується за інтегральним критерієм Коші ($\Delta f = (m+1) - m = 1$):

$$\int_2^\infty \frac{1}{\Phi(F)} df(F) = \int_2^\infty \frac{f'_F}{\Phi} dF = \int_2^\infty \frac{\rho}{\Phi} dF = \int_2^\infty \frac{1}{F \ln^2 F} dF < \infty .$$

Теорема доведена.

1.7. Приклад (більш конкретний випадок теореми 3). Нехай фірма (див. описання перед теоремою 3) при зміні капіталу F змінює кількість робочих місць (може і їх географію, ще щось) десь у порядку $F^{0.5}$ (між $\varepsilon F^{0.5}$ та $\frac{1}{\varepsilon} F^{0.5}$, число $\varepsilon > 0$) і, таким же чином, відповідно змінюється $\lambda(x)$ – (середня) кількість обслуговувань клієнтів (за період). Витрати $r_1(x)$ на одне обслуговування при цьому тримаються в інтервалі.

(1.7.1) $\theta_1 - cF^{-0.5} < r_1 < \theta_1 + cF^{-1.26}$, число $c > 0$.

Стверджуємо: відносна кількість критичних ситуацій ($F < F_{кр}$) з часом напевно прямує до 0.

Зауважимо про правдоподібність у простих випадках умови $r_1 = \theta$, як межі самоокупності.

Доводимо твердження. Візьмемо $\rho = F^{-0.25}$ в теоремі 3. Тоді (1.6.2) виглядає як $c_1 F^{0.5} \le F^{0.5} < c_2 F$ (виконується, $c_{1,2}$ деякі). Так як $a = \lambda(\theta_1 - r_1)$, то з (1.7.1) та з умови на порядок λ нерівність (1.6.1) виглядатиме так: $-c_1 F^{-0.75} \ln^{-2} F < -cF^{0.5} \cdot F^{-1.26} < cF^{0.5} \cdot F^{-0.5} < c_2$ (виконується при відповідних $c_{1,2}$, c). За теоремою 3 маємо непозитивність ланцюга, що тягне за собою наше твердження.

Загальні відомості

2.1. Дамо математичні означення додатково. Додатні ядра $P = P(x, dy), G, Q$ (з індексами теж) визначені на просторі E з сепарабельною σ – алгеброй. Про властивості, зв'язані з ядром P, говоримо P – властивість, наприклад: P – ланцюг – л.М. з перехідною ймовірністю $P = P(x, dy)$; P – с-г. функція – супергармонічна функція ($F \ge PF \ge 0$). Букви F, H, S далі – вимірні функції на Е з значеннями в $R_+ = [0; \infty]$ значення ∞ можливе для мір, функцій ядер, при цьому $0 \cdot \infty = 0$; міри $\pi = \pi(dx), \mu$ додатні на E; f, φ – зростаючі ($\uparrow$) функції $(R_+ \to R_+)$; знак ($\downarrow$) для спадання, $\downarrow_n (\cdot)$ – границя спадної послідовності; n, m, i, l – натуральні числа, тобто елементи N; $(\cdot) << (\cdot)$ якщо $(\cdot) \le (\cdot)\infty$, для мір і ядер це означає абсолютну неперервність, значить, існування відповідної щільності (оскільки Е сепарабельно); оскільки $P, Q << P + Q$, то використанням щільності можна вводити $P \underset{(\wedge)}{\vee} Q, (P - Q)^{\pm}, \downarrow_n Q_n, \uparrow_n Q_n$ для ядер, а не тільки мір, чисел, функцій (різниця розглядається тільки за відсутності істотної невизначеності (див. 2.2) $\infty - \infty, P \sim Q$ є еквівалентність $(P\infty = Q\infty); \varepsilon, c$ з індексами – скінченні числа > 0; запис $F = O(H)$ означає виконання нерівності $F \le cH$ для деякого с; $F = o(H)$ при збіжності означає, що $\lim \left(F / H \right) = 0$; 1 – функція тотожно рівна одиниці, наприклад $F = O(1)$ говорить про обмеженість F. Використовуємо прямий добуток (позначаємо точками) і згортку (без точок); наприклад далі (не з цієї роботи, на різних просторах будуть визначені ядра): $U(x, du, dt) = T(x, du)\Phi(x, u, dt)Q(x, u, t)$, коротко $U = T \cdot \Phi \cdot \Theta$ (прямий добуток), розглядається як ядро

$$U(x, A) = \int_A T(x, du)\Phi(x, u, dt)\Theta(x, u, t) = T\Phi\Theta\chi_A$$

(згортка). Також пишемо $U(x; A) = UA = U\chi_A = U(\cdot)$, тобто ототожнюємо множину А, її індикатор χ_A, визначаючи цю множину A деяке висловлювання $(\cdot)$, наприклад $(2 < x < 3) = \chi(x < x < 3) = \{x | 2 < x < 3\}$. В згортках позначення аргументів змінюється – для $F(x)$ і $P(x, dy)$ буде $PF = \int P(x, dy)F(y)$, але для $g(x, y)$ $Pg = \int P(x, dy)g(x, y)$.

2.2. Об'єкт, який вивчається в роботі це ядро P – перехідна ймовірність зворотного (1-зворотного [6]) л.М. з гармонічною мірою π, тобто $P1 = 1$, $\pi P = \pi$, $\pi \ne 0$ і π є максимальна міра, яка визначає незводимість P. Слова «істотно», «по мірі π», «π _ м.в. (майже всюди)» скрізь опускаємо: $P_1 \ne 0$ означає $\pi P_1 1 > 0;$ $H > 0$ означає $\pi H > 0$; необмеженість H означає, що немає обмеженості H ні на одній множині повної міри π, тобто H істотно необмежена. Функції F, H, S в роботі скінченні (тобто π – м.в.). Зворотні ядра P можуть бути 0-зворотні ($\pi 1 = \infty$) або додатньо зворотні ($\pi 1 < \infty$, тоді рахуємо $\pi 1 = 1$ і P – ланцюг з початковим розподілом π є стаціонарним).

Деякі загальні властивості ядер та мір цієї роботи

У розділі виводяться деякі властивості, пов'язані з розбиттям $P = P_1 + P', P_1 \ne 0$, які в літературі наводяться для розбиття часткового виду (в [6] це звуження P на множину, виділення атомів). Далі $G' = \sum_{n\geq 0} P'^n$ – ядро потенціалу для P', яке визначає середню кількість влучень P' – ланцюга (з обривом) в множини; $H_\infty = \lim_n P'^n H$ (для інших функцій і мір $(\cdot)_\infty$ визначається аналогічно). Буквами ***D,D**** фіксуємо початок і кінець доведень.

3.1. $P'H \leq H, P_1 H = 0 \Rightarrow H = 0.$ **D:** $P'H + P_1 H = PH \leq H$ значить $H = c1$ як с.-г. функція або $H = 0$. Оскільки $P_1 H = 0, P_1 \neq 0$, то саме $H = 0$. **D*.**

3.2. $1_\infty = 0$. **D:** $1 = P^n 1 = P'^n 1 + \sum_0^{n-1} P^i P_1 P'^{n-i-1} 1$ (розклад бінома $(P_1 + P')^n$ по останньому включенню P_1). За монотоністю існують $1_\infty = \downarrow P'^n 1$ і в границі для розкладу (збіжність в інтегралах) буде $1 \geq 1_\infty + G P_1 1_\infty$, де $G = \sum P^n = \infty$ з причини зворотності P. За необхідністю маємо $P_1 1_\infty = 0$, тобто. (див.3.1) $1_\infty = 0.$ ***D****

3.3. $G'h^+ < \infty$ (за визначенням $h = PH - H = P\delta H$), $\Rightarrow G'h^- + G'P_1 H + H_\infty = H + G'h^+$ зокрема існує гранична функція H_∞. ***D:*** Із визначення h пишемо $h^- + (P_1 + P')H = H + h^+$. Множачи цю рівність на $P'^n (n = 1,2,...)$ і сумуючи по n зі скороченнями $P'^i H$ зліва і справа послідовно маємо існування необхідніх елементів і рівність, яку доводимо ***D*.***

3.4. $\pi P_1 G' = \pi$. **D** За аналогією з доведенням в 4.2 (але, множачи на π зліва) пишемо $\pi = \downarrow \pi P^n = \downarrow \pi P'^n + \pi P_1 G'$. Залишилося побачити, що $\pi_\infty = \downarrow \pi P'^n = 0$ за дуальністю до п.4.2. **D*.**

3.5. $\pi S < \infty \Rightarrow G'S < \infty$. **D:** Із 4.4. і визначення G' пишемо $\infty > \pi S = \pi P_1 G'S \geq \pi P_1 P'^i G'S$. Так як (ще раз 3.4) $\sum \pi P_1 P'^i = \pi$, то із попередньої нерівності $G'S < \infty$. **D***

3.6. $S < \infty \Leftrightarrow \mu S < \infty$ для деякої міри $\mu \sim \pi$ (проста властивість).

3.7. Якщо A є скінченна сума мінорантних множин, то $G'A$ обмежена функція. При цьому $P^n A \to 0$ для 0-зворотного ядра P. ***D:*** Якщо χ – індикатор мінорантної множини, то (див.[6]) $\chi = O(P^n P_1 1)$ для деякого n. Із співвідношень $P^n = P'^n + \sum^{n-1} P'^i P_1 P^{n-1-i}, P1 = 1, P_1 1 \leq 1$ отримуємо $\chi = O\left(\sum_0^n P'^i P_1 1\right)$. Множачи зліва на G' з врахуванням нерівності $G'P' \leq G'$ отримаємо $G'\chi = O(G'P_1 1) = O(1)$, оскільки $G'P_1 1 = 1$ по дуальності до п.3.4. Перше доведення, а влістивість $P^n A \to 0$ є в [6]. **D*.**

Основна лема. 4*.1. Лема*. (Позначення введені раніше, функція φ, нагадаємо, необмежена, неперервна зліва): $G'\left(P\Delta H(\Delta\varphi \wedge 1) + h^+\right) < \infty \Rightarrow H_\infty = 0$ (тут $\varphi = \varphi(H(x))$, за аналогією з $\varphi(F(x))$ в розділі 2).

Доведення наведено далі в п.4.2-6, введемо тут позначення для нього: $H_c = (H - C)^+, H_{c\infty} = (H_c)_\infty, h_c^\pm = (h_c)^\pm$ $(h_c = P\delta H_c)$; індикатори $\chi_1 = (H(x) > c), \chi_2 = (H(x) \leq c < H(y)$ або $H(y) \leq c < H(x))$, $\chi_3 = (\Delta\varphi < 1), \overline{\chi_3} = 1 - \chi_3$ міра $\mu \sim \pi$ і $\mu G'(P\Delta H(\Delta\varphi \wedge 1) + h^+) < \infty$ (див. 4.6. і формування леми).

4.2. $\delta H_c \leq \chi_1 \delta H + \Delta H \chi_2$. **D:** Доведення слідує з усіх варіантів запису нерівності 4.2: а) При $H(y), H(x) \leq c$ буде $0 \leq 0$; б) при $H(x) \leq c < H(y)$ буде $H(y) - c \leq \Delta H$; в) при $H(y) \leq c < H(x)$ буде $c - H(x) \leq \delta H + \Delta H = 0$; г) при $H(x), H(y) > c$ буде $\delta H_c = \delta H \leq \delta H$.**D*.**

4.3. $\mu G'P\Delta H \chi_2 \chi_3 \to 0$ для деякої послідовності $c = c_n \uparrow \infty$. **D:** За визначенням χ_2 пишемо $\int \chi_2 d\varphi(c) = \Delta\varphi$, а використовуючи теорему Фубіні і дані із 4.1. пишемо $\int \mu G'P\Delta H \chi_2 \chi_3 d\varphi(c) = \mu G'P\Delta H(\Delta\varphi \wedge 1) < \infty$. Тепер 4.3 випливає з необмеженості φ. **D*.**

4.4. $\mu G'h_c^+ \leq \mu G'\chi_1 h^+ + \mu G'P\Delta H \chi_2(\chi_3 + \overline{\chi_3})$. **D:** Послідовно в 4.2. множимо зліва на P, виконуємо операцію $(\cdot)^+$, множимо на $\mu G'$.**D*.**

4.5. $\mu G'h_c^+ \to 0$ при $c = c_n \uparrow \infty$ із п.4.3. **D:** Враховуючи визначення μ в 4.1, властивість $\chi_{1,2} \to 0$ (при $c \to \infty$ і будь-яких x, y) і принцип обмеженої збіжності в 4.4. на основі 4.3 отримаємо необхідне. **D*.**

4.6. $H_{c\infty} \leq H_c + G'h_c^+$ $(c = c_n$ из 4.3). **D:** Це випливає з нерівності $H_c^+ \leq h^+$, нерівності $G'h^+ < \infty$ (умова леми) і твердження п.3.3 для H_c .**D*.**

4.7. $H_\infty = 0.$ **D:** З очевидної нерівності $H \leq c1 + H_c$ і того, що $1_\infty = 0$ (див.3.2) випливає $H_\infty \leq H_{c\infty}$ (див. визначення $(\cdot)_\infty$ на початку розділу і п.4.1). Із п.4.6 можна записати:

$\mu_1 H_\infty \le \mu_1 H_{c\infty} \le \mu_1 H_c + \mu_1 G' h_c^+ (\mu_1 \le \mu, \mu_1 \sim \mu$ – зменшили μ із умови $\mu G' h^+ < \infty$ (див. 4.1), щоб забезпечити $\mu_1 H < \infty$ (див.3.6) і, $\mu_1 H_c < \infty$).

Переходячи до границі (при $c = c_n \uparrow \infty$) із п.4.5 отримаємо: $\mu_1 H_\infty \le \downarrow_{c_n} \mu_1 H_{c_n}$ т.я. $\downarrow_n H_{c_n} = 0$. Значить $H_\infty = 0(\mu_1 \sim \mu \sim \pi)$.**D*.**

Вибір тест функцій f, φ, F і ядер $P_1, P' = P - P_1$. 5.1. Часто мають справу з скінченновимірним простором $\tilde{E}$, в який відображається вимірно E ($u = \Phi(x), u \in \tilde{E}$) і функцію $F(x)$ для критеріїв шукають як $F = F(u)$ (вимірна), тобто $F(x) = F(u(x))$. При зростанні (строго) $\varphi = \varphi(F), f(F)$; є оберненість $(F = F(f),...)$, тобто мова йде про вибір трійки функцій F, f, φ на $\tilde{E}$, монотонно змінних (див. теорему 1, наслідок 1.3.5 наприклад).

5.2. Звернемося до умови теореми 1. Очевидно $f'_F P\delta F \underset{(\le)}{\ge} P\delta f$, коли є опуклість вгору і (вниз) функції f (при оберненні $F(f)$ тип опуклості змінюється).

Неформально: так як $\Delta\varphi \approx \varphi'_F \Delta F$, то збільшення ступеня зростання F (відносно f, f не змінюємо) обмежено умовою 1.3.2, оскільки φ'_F неможна сильно зменшити через потребу необмеженості φ, але збільшення зростання F корисне для виконання умови 1.3.4, так як (див. нерівність вище) зменшує носій a^-. Тепер про функції f: зменшення зростання f (F не змінюємо) корисне для умови 1.3.4, але може порушити умову 1.3.3. Повернемося до формального викладання.

5.3. Нехай $P'f \le f, P'(\delta f < -\varepsilon) > \varepsilon$ на $(f > c)$ і ще виконується умова мінорантності 1.1.1, але для f; $A_m = (m < f \le m+1)$. Тоді $G'A_m = O((f \wedge m) + 1)$ рівномірно по m.

D: Поповнимо E точкою поглинання $0'$– точкою обриву P'- ланцюга ξ_n і нехай $f(0') = 0$. На основі $P'f \le f$ отримуємо супермартингал $f(\xi_n)$. Для нього за відомою теоремою про перетин відрізків середнє число перетинів відрізку $[m-1; m]$ супермартингалом не перевищує $f(x) \wedge m$ за умови $\xi_0 = x$.

За умови «з ε» із п.5.3. з ймовірністю більшою ε^l, де $l = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, відбувається перетин відрізку $[m-1; m]$ супермартингалом за умови $m < f(\xi_0) \le m+1$ (марковська властивість ланцюга), тут рахуємо $m - 1 > c$. Це дає по тій же марківській властивості, твердження п.6.3 при $m - 1 > c$. При $m - 1 \le c$ буде $G'A_m < \infty$ за наявності в умові мінорантності і на основі п.4.7. Таким чином 6.3. справедливо в цілому.**D*.**

5.4. Якщо функція f опукла вгору, справедливо наступне $(f = f(F))$:

а) $\delta F < -k < 0 \Rightarrow \delta f < -k \frac{\delta f}{\delta F} \Rightarrow \delta f \le -k f'_F$

(просте твердження);

б) $P'F \le F \Rightarrow P'f \le f$.

D: Послідовно: опуклість f дає $\frac{1}{P'1} P'f \le f\left(\frac{P'F}{P'1}\right); f\left(\frac{P'F}{P'1}\right) \le f\left(\frac{F}{P'1}\right)$ (неспадність f і умова); $f\left(\frac{F}{P'1}\right) \le \frac{1}{P'1}$ (опуклість і додатність f).**D*.**

5.5. $P'(\delta f \le -\varepsilon) = P(\delta f \le -\varepsilon)$ при $P = P'$ на $\delta f < 0$. Очевидно.

5.6. Вибір P'. Нехай $a = PF - F < \infty$; $\tilde{P}$ є звуження P на $(a^+ > 0) \cap (\delta F > 0)$;

$P_1 = \frac{a^+}{\tilde{P}F} \cdot \tilde{P}, P' = P - P_1$. Тоді: $P_1 \ne 0, P' = P$ на $(\delta F \le 0); P_1 F = a^+$ і $P'F \le F$.

D: По-перше $a^+ \ne 0$, інакше функція F була б супергармонічною, і, через зворотність ланцюга, константою. По-друге, за визначенням P_1 буде $P_1 \ne 0$, $P' = P$ на $(\delta F \le 0)$, $P_1 F = a^+$. Нарешті, через останню рівність буде $P_1 F = [(P_1 + P')F - F]^+ \ge P_1 F + P'F - F$.

Скорочуючи на $P_1 F$, маємо нерівність $P'F \le F$. **D*.**

Висновок

Доведення теореми 1. 6.1. Будемо вести доведення від протилежного. Нехай $\pi 1 < \infty$, тоді за умовою теореми $\pi(P\Delta F(\Delta\varphi \wedge 1) + a^+) < \infty$ і на основі п.3.5 виконуються умови основної леми (див.4.1) при $H = F$. Таким чином $F_\infty = 0$.

6.2. Виберемо P' як в п.5.6. Запишемо нерівність твердження п.3.3 для $H = F$, $h = a; G'a^{-} + G'P_1 F + F_\infty = F + G'a^{+}$. Підставляючи $P_1 F = a^{+}$ і $F_\infty = 0$ (див.5.6 і 6.1) маємо $G'a^{-} = F$.

6.3. Правильно $P'(\delta f < -\varepsilon) > \varepsilon$ на $(F > c_1)$ на основі: умова 1.3.3, твердження п.5.5 і п.5.6.

6.4. Виконується п.5.3 по п.6.3. при $(f > c) \subset (F > c_1)$, п.5.6. Значить $G'A_m = O((f \wedge m) + 1$ рівномірно по m, тобто $G'A_m \le c(1 + f) f_m$, де $f_m = \left(1 \wedge \frac{m}{f+1}\right) + \frac{1}{f+1} \le 2$ (обмежено рівномірно по *m*, *x*) і прямує до 0 коли $F \to \infty$ (тобто $f \to \infty$) при кожному m.

6.5. Із п.6.2, умови 1.3.4 і п.6.4 можно писати $(A_m = (m < f(x) \le m + 1))$:

$$F = G'a^{-} \le \sum_m G'A_m a_m^{-} < c(f+1) \sum_m f_m a_m^{-}.$$

За принципом обмеженої збіжності $\sum_m f_m a_m \to 0$ (при $F \to \infty$), тобто $F = o(f)(F \to \infty)$, що суперечить опуклості f вгору. Теорема 1 доведена.

Список літератури

1. *Meyn S.P., Tweedie R.L. (1993). Markov chains and Stochastic Stability, Springer-Verlag, New York.*
2. *Tsygan M., Filonov Y. A certain class of Foster-Lyapunov functions, Theory of Stochastic processes 3 (19), 1997, № 1-2, p. 183-192.*
3. *Ісакова Т.І., Філонов Ю.П. Інтегральні умови зворотності марківських ланцюгів із загального мірою незводимості // Укр.мат.журн., 2004. – Т. 56. – №11. – С. 705-719.*
4. *Філонов Ю.П. Одне узагальнення процесу Гальтона-Ватсона // Зб. Матеріалів 14 міжнародної наукової конференції ім. М.Кравчука. – Київ, 2012. – С. 132-133.*
5. *Kersting G. On recurrence and transience of growth models. J.Appl.Probab, 1986, 23, p.614-625.*
6. *Nummelin E. (1984). General Irreducible Markov chains and Non-Negative Operators/ Cambridge University Press, London.*
7. *Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том II. Марковские цепи. – М. : МЦНМО, 2009 (з англійської).*
8. *Клейнрок Л.. Теория массового обслуживания. – М. : Машиностроение, 1979.*
9. *Філонов Ю.П. Умова необмеженості за ймовірністю стохастичної моделі зростання // Матеріали XIII Міжн.н.к. ім. М.Кравчука (III). ст. 114, НТУУ, Київ, 2010.*
10. *Tsygan M., A certain class of Foster-Lyapunov functions and ergodic properties for Markov models, Department of Mathematics, Goterborg, 1994.*

Стаття надійшла до редколегії 31.03.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.О. Білощицький, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ.

Михайленко Виктор Мефодьевич
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой ИТППМ, *ORCID 0000-0002-9573-9873*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Филонов Юрий Петрович
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, *ORCID 0000-0002-1100-4854*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ СИСТЕМ, КОТОРЫЕ УПРАВЛЯЮТСЯ ОБЩЕЙ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

Аннотация. *Исследован параметр сложной системы, малые значения которого соответствуют кризисам, а большие – развитию, в предположении, что этот параметр является функционалом некоторой общей однородной цепи Маркова. Приведены условия, в которых относительная частота кризисов стремится к 0 с вероятностью 1 и по вероятности этот параметр развития неограниченно растет. Рассмотрены экономические модели (предел самоокупаемости и временные кризисы) и динамика популяции бактерий. Результаты выводятся из доказанной в статье схемы получения признаков неположительности цепей Маркова.*

Ключевые слова: процесс Маркова; цепь Маркова; дискретное пространство; фазовое пространство

Mikhaylenko Victor
Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, *ORSID 0000-0002-9573-9873*
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kiev
Filonov Yuri
PhD (Physical and Mathematical Sciences), Associate Professor, Department of Mathematics, *ORSID 0000-0002-1100-4854*
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kiev

UNLIMITENESS BY THE PROBABILITY SYSTEMS THAT ARE GUIDED BY COMMON HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN

Abstract. *This paper shows a diagram of obtaining approvals of unlimited (in probability) growth system and show how the circuit works for systems controlled by homogeneous Markov chain (CM). The content of the main result – integral criterion of non-positiveness of general homogeneous CM In the phase space E* σ *- separable algebra of events, the chain* (ξ_n) *is irreducible set is finite* $(F < C)$ *for large amounts of minor* $((F < C) = \{x | F(x) < C\})$ *sets* F *- an essential function in E). Another features to be considered are functions –* f, φ *and* $[0, \infty]$ *the ratio between the* $f(F), \varphi(F), F$ *(test function) which enable to obtain specific criteria of neerhodyc of system using the proposed scheme. Let think p – density populations of bacteria in the environment (options pollution, aging system). Usually small exponential in time, and then the limiting factors change logistics. Quality (health systems) estimate by the value* $u = -\ln p$. *Event* $(u < u_{кр})$ *means disease (fracture system). There is no action of constantly treatment (prevention, cleaning system). We have* $u_{n+1} = u_n + v(n = 0,1... - time)$. *Lets assume the full curability of the disease for an average of finite and limited time, but not a complete destruction of the colony of bacteria that live on by the same law in the same environment. Our scheme leads to the condition* $-cu^{-1,01} < 2uMv + Dv < c, Dv < c$ *that mainly provides significant movement in the incidence of 0. Another example. The firm F capital changes the amount of working places (maybe even their geography, something else) somewhere in the order* $F^{0.5}$ *(between* $\varepsilon F^{0.5}$ *and* $\frac{1}{\varepsilon}F^{0.5}$, $\varepsilon > 0$ *) and in the same manner, changes* $\lambda(x)$ *– (average) number of clients serving (for the period). The cost* $r_1(x)$ *fore one service held in the interval (x – a state company):* $\theta_1 - cF^{-0.5} < r_1 < \theta_1 + cF^{-1.26}$, *number* $c > 0$, θ_1 *– average revenue per one service. Approval: relative number of critical situations (* $F < F_{кр}$ *) by the time probably goes to 0, the capital F in probability increases. It is assumed stable economic conditions. The serving flow for one work place is hard-Poisson generalized. Almost half of the work devoted to mathematical justification of the scheme, the other – the application which is similar to showed results.*

Keywords: Markov process; Markov chain; discrete space; phase space

References

1. Meyn, S.P. & Tweedie, R.L. (1993). Markov chains and Stochastic Stability, Springer-Verlag, New York.
2. Tsyga,n M. (1997). A certain class of Foster-Lyapunov functions / M. Tsygan, Y. Filonov // Theory of Stochastic processes, 3 (19), 1-2, 183-192.
3. Isako,v T.I. (2004). Integrated repayment terms Markov chains with general measure nezvodymosti/ T.I. Isakov, Y. Filonov // Ukr.mat.zhurn, 56, №11, 705-719.
4. Filonov, J.P. (2012). One generalization process Galton-Watson, Coll. 14 Materials of international scientific conference named. M. Kravchuka, Kyiv, 132-133.
5. Kersting, G. (1986). On recurrence and transience of growth models. J.Appl.Probab, 23, 614-625.
6. Nummelin, E. (1984). General Irreducible Markov chains and Non-Negative Operators / Cambridge University Press, London.
7. Kelbert, M. & Sukhov, Y. (2009). Probability and Statistics in Example and problems. Volume II. Markovskye chain. Moscow, MTSNMO (English).
8. Kleinrock, L. (1079). Theory of mass of service. Moscow, Mashinostroenie, 1979.
9. Filonov, J.P. (2010). Conditions unboundedness in probability stochastic growth model. Materials XIII Mizhn.n.k. them. M.Kravchuka (III). Kyiv, NTU, 114.
10. Tsygan, M. (1994). A certain class of Foster-Lyapunov functions and ergodic properties for Markov models, Department of Mathematics, Goterborg.

Посилання на публікацію

APA *Mikhaylenko, V., & Filonov, Yu. (2015). Unlimiteness by the probability systems that are guided by common homogeneous Markov chain. Management of Development of Complex Systems, 22 (1), 107-115. dx.doi.org\10.13140/RG.2.1.4498.6321*

ГОСТ *Міхайленко В.М. Необмеженість за ймовірністю систем, що керуються загальним однорідним ланцюгом Маркова [Текст] / В.М. Міхайленко, Ю.П. Філонов // Управління розвитком складних систем. – 2015. - № 22 (1). – С. 107-115. dx.doi.org\10.13140/RG.2.1.4498.6321*