УДК 519.5:510.22+ 517.5:621.391

Минаев Юрий Николаевич
Доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных сетей и систем, *orcid.org/0000-0001-6630-3344*
Киевский национальный авиационный университет, Киев
Минаева Юлия Ивановна
Кандидат технических наук, доцент кафедры основ информатики, *orcid.org/0000-0002-2367-1507*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Филимонова Оксана Юрьевна
Кандидат технических наук, доцент кафедры основ информатики, *orcid.org/0000-0001-6630-3344*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Филимонов Георгий Александрович
Аспирант кафедры информационных технологий, *orcid.org/0000-0002-6394-0636*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

ТЕНЗОРНЫЕ МОДЕЛИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Аннотация. *Рассматрено представление интервала в виде тензорной модели с последующей тензорной декомпозицией и формированием подмножества упорядоченных пар (псевдонечеткое множество вида* $\{x \ {}^{\pi}\mu^{x}\}_1^n, {}^{\pi}\mu^{x} \to [0,1]$ *– псевдоФП). Аналогичные нечеткому множеству псевдомодели ФП обладают расширенным свойством функции принадлежности* $\sum_{i=1,n}\left({}^{\pi}\mu^{x}\right)^2 = 1$. *Предложено нечеткий интервал определять как подмножество упорядоченных пар (псевдонечеткое множество) (ПмУП), наиболее близкое по унитарной норме к исходному (четкому) интервалу. Сформулированы алгоритмы выполнения арифметических операций над интервалами на уровне тензорных моделей. Приведены примеры, показывающие эффективность предложенных методов и моделей.*

Ключевые слова: интервал; нечеткое множество; тензор; тензорная декомпозиция; неопределенность; норма; НЕ-фактор

Введение

Задача интеллектуального анализа данных включает поиск новых знаний и обработку т.н. неполных данных, которые чаще всего представлены как многомерные массивы, элементы их могут быть зашумлены или измерены с недостаточной точностью.

Эта задача в настоящее время выдвигается на передний план. Такие данные формализуют в виде одно- или многомерных интервалов, а в более сложном случае – интервальными оболочками [1] или тензорами с 2D или 3D матрицами.

Известно, что многие естественные явления могут достаточно точно моделироваться или близко аппроксимироваться мультилинейными функциями. Мультилинейность означает, что матрица измеренных эффектов феномена разлагается в низкоранговые матрицы предполагаемых причин.

Сингулярная декомпозиция обеспечивает билинейный факторинг матрицы данных

$$\mathbf{M}\!: \mathbf{U}_{p\times r}\cdot \mathrm{diag}(\mathbf{s}_{r\times 1})\ ;$$

$$\mathbf{V}^{T}_{r\times q} \xleftarrow{\ \mathrm{SVD}_r\ } \mathbf{M}_{p\times q},\ r \le \min(p,q)\,.$$

Основное применение сингулярного разложения – это построение малоранговых аппроксимаций, т.е. построение матрицы ранга r такой, что ранг существенно меньше, чем общий размер матрицы, представляющей собой некоторую таблицу.

Если проблема состоит в том, чтобы разделить переменные вида $\mathbf{A}(i, j\cdot k)$, то это приводит к задаче тензорных разложений. В соответствии с определением тензор –это многомерный массив, двумерная таблица; подобный многомерный массив необходимо сжать и построить малопараметрическое представление, исключив трудности, обусловленные многомерностью массива.

По аналогии с задачей определения ближайшего четкого множества для заданного нечеткого множества (НМ), которая сводится к оптимизационной задаче, учитывая, что интервал рассматривается как частный случай НМ, формулируется задача поиска объекта, ближайшего к интервалу.

Здесь тензорные декомпозиции должны сыграть решающую роль, т.к. известно, что любой вектор (в т.ч. интервальный) длины 2^n может быть преобразован в тензор [2] с матрицами размерностью 2×2. Эти матрицы будут малоранговыми, даже если взятый вектор состоит из значений одномерной функции.

Цель и задачи исследования

Интервальный анализ (ИА) относится к наиболее востребованным разделам математики [3-9]. В последние годы интерес к ИА резко усилился, что объясняется попытками применения ИА к решению новых задач в условиях неопределенности.

Интервальные методы явились основой для практически единственной модели, которая эффективна при всех (известных на сегодня) видах НЕ-факторов – новой теории, связанной с решением задач в условиях неопределенности.

Основная решаемая задача – представить интервал в виде совокупности упорядоченных пар (ПмУП) и таким образом обеспечить универсализм решения задач в условиях неопределенности, т.к. НМ – ПмУП – сегодня основной способ моделирования неопределенности.

Формально задача имеет вид:

$$\min\left\|\mathbf{I}_x - x\otimes{}^{\pi}\mu_x\right\|_F^2,$$

где $\mathbf{I}_x$- матрицизированный интервал $\mathbf{x}=[x^{\min}, x^{\max}]=\{x\in\mathbb{R} : x^{\min}\le x\le x^{\max}\}$ (или интервальный вектор), минимальный размер интервальной матрицы 2×2, т.к. интервал может быть представлен интервальным вектором, состоящим из двух интервалов, но может быть любым в зависимости от того, на сколько подинтервалов разбит исходный интервал; $x\otimes{}^{\pi}\mu_x$ – Кронекерово произведение (КП), причем ${}^{\pi}\mu_x$ играет роль ФП, ${}^{\pi}\mu_x \to[0,1]$, $x\in \mathbf{I}_x$. ПмУП $\left(x\ {}^{\pi}\mu_x\right)$ представляет собой нечеткий интервал (НиН).

При фиксированном x НиН интервал может, сохраняя свою близость по Ф-норме с исходным (четким) интервалом, иметь достаточно большое число форм представления $\left({}^{\pi}\mu_x\right)$.

В частности нечеткий интервал (Нин) может иметь треугольную, трапециевидную и др. формы псевдоФП, имея при этом разную длину, т.к. КП компонент ПмУП должно быть всегда примерно одинаковым.

Такое представление позволяет:

– привлечь к исследованию интервала, кроме традиционных стандартных методов, методы и модели теории нечетких множеств(ТНМ), в частности, методы нечеткой арифметики (Нар), нечетких выводов с псевдоФП, полученной на основе гарантированного результата;

– применение новых методов к решению задач в условиях неопределенности, в частности, САУ с интервальными коэффициентами могут быть заменены на системы матричных уравнений.

Структура ПмУП такова, что первая компонента играет роль универсального множества, на которм задается этот объекта; длина этой компоненты может быть значительно короче исходного интервала, т.е. имеет место сокращение интервальной неопределенности (это одна из задач доформального исследования НЕ-факторов и Data Mining).

Анализ последних достижений и публикаций

В работах [10;11] введено понятие НЕ-факторов для обозначения комплекса свойств, присущих реальной Системе знаний (СЗн), но плохо представленных в «классических» формальных системах.

Это несоответствие заключается в том, что базовые свойства традиционных аппаратов, которые считаются необходимыми для любой формальной системы (точность, полнота, определенность, корректность и др.), являются в знаниях о реальном мире редкими исключениями, представляя частные случаи таких НЕ-факторов как неточность, недоопределенность, не(до)полнота, не(до)корректность и др. НЕ-фактор позволил сформировать идею недоопределенности как общего явления (фактора).

Главный вывод, который позволили сделать работы, связанные с НЕ-факторами, состоит в том, что интервальное представление является наиболее рациональным и практически единственным для Н-моделей.

Недоопределенность требует внести в стандартное интервальное представление коррективы, в частности, возникает предложение исследовать не сам объект (интервал), а ближайший к нему по унитарной норме – тензор с матрицей p×q.

В теории НЕ-факторов рассматривают интервал как пару чисел, который в контексте системы НЕ-факторов не является содержательным типом данных, он выступает как компонент типов, реализующих различную прагматику в зависимости от природы моделируемого объекта.

Здесь допущена некорректность, т.к. интервал одновременно и математический объект, названный «пара чисел», и множество (массив) данных (значений), ограниченных верхним и нижним пределами.

Для устранения данной некорректности рационально использовать новую форму представления интервала – подмножество упорядоченных пар, аналогичное НМ, что особенно актуально для многомерных интервалов. В этом случае интервал будет являться содержательным объектом.

Укажем, что в теории НЕ-факторов главное внимание акцентировано на доформальное исследование объекта как на способе формирования требований к формальному аппарату, но, на наш взгляд, доформальное исследование следует связывать прежде всего с получением скрытых знаний.

Возвращаясь к интервальным НЕ-факторам, заметим, что интервальная математика, несмотря на большую востребованность в интервальных расчетах, не нашла массового применения именно из-за чрезмерной ширины интервалов выходных значений.

Интервальный НЕ-фактор – один из наиболее существенных прикладных результатов теории НЕ-факторов.

Теория и методология НЕ-факторов в основном коснулись тех видов неопределенности, где интервальная неопределенность является главной и основной моделью, которая рассматривается только в ее стандартном виде, чем игнорируется принцип множественности моделей, основополагающий для неопределенности.

Также укажем, что методология НЕ-факторов игнорирует психологические аспекты принятия решений в неопределенности.

Изложение основного материала

Общий вид стандартного интервала: $\mathbf{x} = [x^{min}, x^{max}]$, кроме того, обозначают $x^{max} = \overline{x}$, $x^{min} = \underline{x}$. Реальный интервал **x** – непустое множество реальных чисел, где есть infinum и sup-remum. Множество всех интервалов на □ обозначено как

$$I□ = \left\{ \left[x^{min}, x^{max} \right] : x^{min}, x^{max} \in □, x^{min} \le x^{max} \right\}.$$

Недостатки, присущие стандартной интервальной арифметике (ИАр), определили интерес к нечеткому интервалу (НИн), который получен путем наложения ФП на стандартный интервал. В работе [12] НИн представлены как упорядоченная пара функций, НЧ определены как подслучай.

Четыре арифметических операции определены, используя понятия универсальных обратных функций, как это принято в мат.статистике. В связи с использованием Нин, приобретает особую роль нечеткая арифметика как средство решения многих проблем принятия решений и др.

Исходным в работе [13] есть представление интервала, предполагающее, что все возможные величины интервала принадлежат ему с одинаковой степенью членства, что совершенно не обосновано, т.к. принцип экстремальной энтропии дает различные распределения на интервале в зависимости от его длины.

Стандартная ИАр дает гарантированное вложение решения, которое обычно слишком велико или абсолютно неточно (т.н. “эффект зависимости”).

Свойство независимости, принятое в арифметике действительного числа, не поддерживается для интервальной арифметики, а также нечеткой интервальной арифметики.

В работе [14] предложен новый путь рассмотрения НИн. Вместо того, чтобы считать их НМ, их анализируют как четкие множества объектов, которые представлены т.н. градуальными (реальными) числами. Градуальные числа в основном имеют те же алгебраические свойства, что и реальные числа, но они – функции. НИн рассмотрен как пара нечетких порогов, которые, в свою очередь, есть монотонные последовательности реальных чисел.

Интервальное число в работе [15] представлено как неопределенное реальное число:

$\mathbf{A} = [a1; a2] = \{x \mid a1 \le x \le a2; x \in □\}$.

В работе [7] введены понятия интервального вектора – упорядоченного кортежа из интервалов. Множество интервальных векторов, компоненты которых принадлежат □, обозначают через $\mathbf{I}□^n$. Обратим внимание на понятие интервальной оболочки множества [шар], определяемой как пересечение всех интервальных векторов, содержащих S, т.е.

$I\,S = \cap\{ a \in I\,R^n \mid a \supseteq S \}$.

Интервальная оболочка – это интервальный объект, наилучшим образом приближающий извне (т. е. объемлющий) рассматриваемое множество, и компоненты I S являются проекциями множества S на координатные оси пространства (S – непустое ограниченное множество в $□^n$ или $□^{n \times m}$).

Интервальная арифметика (ИАр) хорошо известна [16], наиболее известные методы: ИАр, получаемая приложением объединенного расширения; стандартный метод. В работе [20] числовой интервал переопределен в эквивалентную форму как реально значная функция одной переменной и двух коэффициентов или параметров. Интервал $[x^{min}, x^{max}]$ – реальная однозначная функция $X^{\mathbf{I}}(\lambda_x)$,

где $X^I(\lambda_x) = (1-\lambda_x)x^{min} + \lambda_x x^{max} = w_x \lambda_x + x^{min}, 0 \le \lambda_x \le 1;$

$w_x = x^{max} - x^{min}, 0 \le x^{min}$ – ширина интервала.

Строго говоря, в числа x^{min}; x^{max} (следовательно w_x) известны как входы или данные, они являются коэффициентами, поскольку λ_x – это переменная, однако ограниченная между 0 и 1. Понятие "ИАр с ограничениями" означает, что $X^I(\lambda_x)$ – однозначная реальная линейная функция с двумя коэффициентами.

В работе [17] для предложенного определения интервального числа $[\underline{x},\overline{x}]$ как графа реальной однозначной функции $X^I(\lambda_x)$, рассмотренного ранее, арифметические операции определены следующим образом:

$$\begin{gathered}Z = X \bullet Y = \\ =\{z|z=x \bullet y, \forall x \in X^I(\lambda_x), \forall y \in Y^I(\lambda_y), 0 \le \lambda_x, \lambda_y \le 1\}= \\ =\{z|z=(\lambda_x \underline{x} + (1-\lambda_x)\overline{x}) \bullet \lambda_y \underline{y} + (1-\lambda_y)\overline{y}), 0 \le \lambda_x \le 1, 0 \le \lambda_y \le 1\}= \\ =[\underline{z},\overline{z}],\end{gathered}$$

где $\underline{z} = \min\{z\}, \overline{z} = \max\{z\}$, операция $\bullet \in \{+, -, \times, /\}$.

Обратим внимание на то, что хотя интервал – это отдельный тип НМ, "fuzzy"-перехода в интервале нет, в то же время интервал может считаться как тип нечеткого интервала (точно также, как действительное число может считаться как тип сложного числа) [18-20].

Интервал обладает двойной природой: "новый" тип числа $[x] = [x^{min}; x^{max}]$, состоящего из двух элементов (нижний связанный и верхний связанный), или как набор $[x] = [x^{min} \le x \le x^{max}]$. Эта двойная природа интервала используется на равных правах.

В целом ряде работ НИн рассматриваются как НЧ, поскольку НИн– более общее понятие, чем НЧ. Необходимо учитывать, что на этот раз НМ охватывают переходные свойства объектов.

Важная характеристика формулировки в том, что интерпретация понятия «интервальное НМ» – это множество НМ, использовано в качестве основного понятия. Напомним, что стандартная НАр основана на принципе нечеткого расширения и определяет арифметические операции над НЧ (переменными) и их ФП.

В общем случае любая из четырѐх основных арифметических операций над НМ $\tilde{A},\tilde{B}$ может быть описана при помощи принципа нечеткого расширения $\mu_{\tilde{A}*\tilde{B}}(z)=\max_{x*y=z}\{\min[\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)]\}$, где

$$\tilde{A} = \{a/\mu^a\}, \mu^a \to [0,1], a \in X$$

$$\tilde{B} = \{b/\mu^b\}, \mu^b \to [0,1], b \in X.$$

В настоящее время надежды на прорыв в области управления в условиях неопределенности связывают с идеями мягкой математики, сформулированными в работах [22; 23]. Не касаясь детального анализа этих работ, напомним, что мягкое множество определено как параметризированное классом принадлежности семейство элементов универсума в теории НМ или НМ 2-го порядка**,** т.е. НМ, у которого ФП–нечёткое множество. Другими словами, мягкие множества – это расширенные НМ.

Тензорные декомпозиции. Тензорные декомпозиции (ТД) положены в основу создания ПмУП, являющегося основным объектом и моделью для интервалов. Они являются рациональными (практически эффективно контролируемыми) аппроксимациями массивов (одномерных и многомерных), полученными в результате решения оптимизационных задач [21].

Отдельно рассмотрим идеологию асимптотической математики и синергетики, получивших в последнее время очень большое развитие. Учитывая контекст работы, укажем, что большой вклад здесь внес М.Д. Крускал, впервые предложивший матричные аппроксимации, позволившие решить целый ряд новых задач

Напомним, что декомпозиция матриц – это один из способов матричных аппроксимаций. Матрицы и билинейную декомпозицию рассмотрим, использовав работу [24]. Пусть **X** – матрица размерностью I×Q. Ранг **X –** минимальное число ранг-1 матриц, которое требуется, чтобы сформировать **X**.

Ранг-1 матрица – это внешнее произведение двух векторов, скажем, $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}^T$, где **a** и **b** – векторы. Если rank(**X**) = R, то тогда можно написать $\mathbf{X} = a_1 b_1^T + +a_2 b_2^T + \cdots + a_R b_R^T$, что является билинейной декомпозицией **X**.

Билинейная декомпозиция компактно записывается в виде $\mathbf{X = AB}^T$, где столбцы **A** и **B** – a_r и b_r соответственно для $1\le r\le R$. Обычно можно усечь эту декомпозицию для R<< rank(**X**), в этом случае имеем низкоранговую аппроксимацию **X**.

Одна из наиболее популярных матричных декомпозиций – сингулярная декомпозиция – (SVD): $\mathbf{X=U\Sigma V}^T$, где **U, V**–унитарные I×I и J×J матрицы, соответственно, и ∑–прямоугольная диагональная матрица, содержащая неотрицательные сингулярные величины **X**.

Если выбрать **A = U**∑, **B = V** и наибольшее R < rank(**X**), получаем оптимальную низкоранговую аппроксимацию **X** в смысле наименьших квадратов.

Основные сведения о сингулярной декомпозиции SVD [25]**.** Пусть **A** – m× n матрица ρ = rank(A). Сингулярная декомпозиция (SVD) **A**–представлена в виде:

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{m\times n} = \underbrace{\mathbf{U_A}}_{m\times p}\underbrace{\mathbf{\Sigma_A}}_{p\times p}\underbrace{\mathbf{V_A}}_{p\times n} = \sum_{i=1}^{p}\sigma_{\mathbf{A},i}\mathbf{u}_{\mathbf{A},i}\mathbf{v}_{\mathbf{A},i}^T,$$

где $\sigma_{A,1} \geq \cdots \geq \sigma_{A,\rho} > 0$ – сингулярные величины; $u_{A,1},\cdots,u_{A,\rho} \in \mathbb{R}^m$, $v_{A,1},\cdots,v_{A,\rho} \in \mathbb{R}^n$-левый и правый сингулярные векторы.

В приложениях, в частности, в данном контексте используют только верхние k (<< m; n) сингулярных величин и сингулярных векторов (в работе использована только одна сингулярная величина и одна пара векторов $\{\mathbf{u}_{A,1}, \mathbf{v}_{A,1}\}$.

Ранг k усеченного SVD (k-SVD) обозначен в виде $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_{A,k} u_{A,k} v_{A,k}^T = \underbrace{U_{A,k}}_{m\times k} \underbrace{\Sigma_{A,k}}_{k\times k} \underbrace{V_{A,k}^T}_{k\times n}$.

Здесь $\mathbf{U}_{A;k}$ состоит из первых k сингулярных векторов $\mathbf{U}_A$, $\Sigma_{A;k}$ $\mathbf{V}_{A;k}$, определяемых аналогично. Среди всех m×n ранг-k матриц, $\mathbf{A}_k$ – ближайшая аппроксимация **A** в смысле Ф-нормы: $A_k = \arg\min_X \|A - X\|_F^2 = \arg\min_X \|A - X\|_2^2, \mathrm{rank}(X) \leq k.$

Тензор-интервал, тензорно-интервальная математика. Основная модель интервала, принимаемая в работе, имеет вид двух последовательных подинтервалов. Стандартное представление интервала (левая и правая границы, среднее значение) описывается так:

$\mathbf{I}_x$=[x_1 mean(x) x_2], $\mathbf{I}_x = {}^{(1)}\mathbf{I}_x \cup {}^{(2)}\mathbf{I}_x$,

${}^{(1)}\mathbf{I}_x$=[x_1 mean(x)],

${}^{(2)}\mathbf{I}_x$= [mean(x) x_2], mean(x)=1/2(x_1 + x_2) – рис. 1.

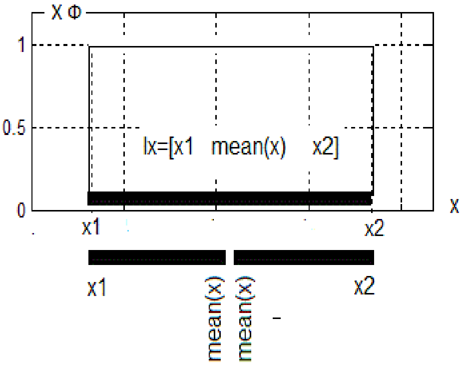

Рисунок 1 – Расчетная модель интервала

Эта модель позволяет вектор (в т.ч. интервальный) длины 2^n преобразовать в тензор 2x2 [2]. Общая схема моделирования предполагает представление интервала как ПмУП и включает процедуры, схематично показанные ниже:

$$I_x = [x^{min}\ x^{max}] \to T_{I_{xj}} \to Tab\_pup = \\ = \left(x_{ij}\right)_{i=1,n}^{j=1,n} \to \mathrm{vec}\left(KP\right) = \mathrm{vec}[x_i \otimes {}^{\pi}\mu_{x_i}] .$$

1^0. При помощи процедуры reshape формируем тензор с матрицей 2×2:

$\mathbf{I}_x = {}^{(1)}\mathbf{I}_x \cup {}^{(2)}\mathbf{I}_x$ → reshape($\mathbf{I}_x$, 2 ,2)=

$$I_x = {}^{(1)} I_x \cup {}^{(2)} I_x \xrightarrow{\quad} \mathrm{reshape}(I_x,\ 2\ ,2) = \begin{pmatrix} x_1 & \mathrm{mean}(I_x) \\ \mathrm{mean}(I_x) & x_2 \end{pmatrix}.$$

2^0. Реализация процедуры тензорной декомпозиции [u s v] = svd($\mathbf{T}_{\mathbf{I}_{x_1}}$) и вычисление подмножества упорядоченных пар Tab_pup:

Tab_pup= sort([abs(u(:,1) * s(1,1)) *max(abs(v(:,1))), abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))]).

3^0. Вычисление КП для компонент Tab_pup(:,1),Tab_pup(:,2):

Tab_kron= Tab_pup(:,1) ⊗Tab_pup(:,2)^T.

4^0. Выполняются вычисления Ф-норм для матриц $T_{I_{xj}}$ и $Tab\_kron : \|A\|_F^2 = \mathrm{trace}(A \cdot A^T)$; близость (в пределах 5 %) норм свидетельствует о корректности представления интервала данным ПмУП.

5^0. Из множества Tab_kron результат формируется в стандартной интервальной форме: minmax=[min(Tab_kron) max(Tab_kron)];

rez=[min(minmax) max(minmax)].

Эксперименты и результаты

Пример: вычисление ПмУП, ближайшего к интервалу [1 3].

На рис. 2, *а* приведено НЧ $\tilde{2}$ □ < примерно 2> в форме НМ с треугольной ФП, заданное на УМ [1 3]. Заметим, что интервальная двойка – ${}^{I}\tilde{2}$ имеет однозначно $\mu(\tilde{2}) = 1$.

На рис. 2, *б* приведено ПмУП, ближайшее к заданному интервалу – УМ [1 3].

Расчетные выражения, на основании которых получено ПмУП, ближайшее к интервальному объекту [1 3;1 1] (интервал ∪ ХФ), приведены в табл. 1.

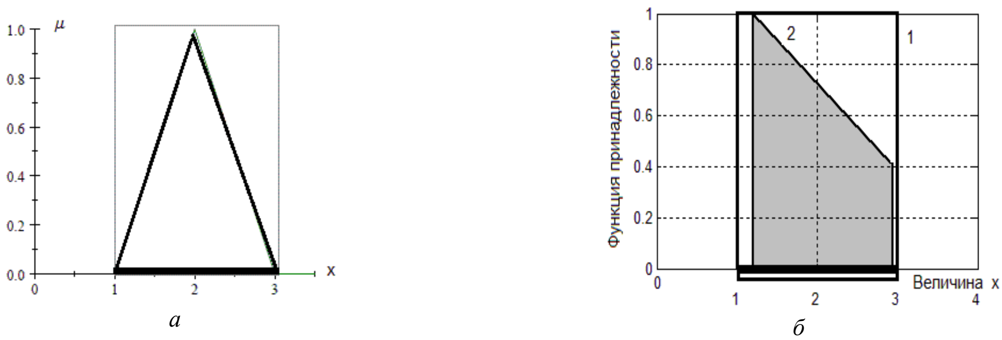

Рисунок 2 – Высказывание примерно 2 □ $\tilde{2}$, определенное в интервале [1, 3]: аНМ <близко к 2>; б – интервал [1, 3] (линия 1), и подмножество упорядоченных пар (линия 2), ближайшее в смысле Ф-нормы к расчетному интервалу dvi=[1 1;3 1]

Таблица 1

[u s v]=svd(dvi) →	u = -0.38 -0.92 -0.92 0.38	s = 3.41 0 0 0.59	v = -0.92 0.38 -0.38 -0.92	ПмУП 1.21 1.00 2.91 0.41	Ф-Нормы Интервал ПмУП 3.46 3.41

Интервал [1 3] представлен ПмУП {1.21 1.0; 2.91 0.41}, близость указанных объектов по Ф-норме: 3.41/3.46≈0.99 .

Арифметика в системе ПмУП. Если интервалы $\mathbf{I}_a$ и $\mathbf{I}_b$ представлены ПмУП как

$$I_a = [a^{min}\quad a^{max}] \to \hat{a} = \left(a \quad {}^{\pi}\mu^{a}\right),$$

$$I_b = [b^{min}\quad b^{max}] \to \hat{b} = \left(b \quad {}^{\pi}\mu^{b}\right),$$

то любая арифметическая операция сводится к совокупности операций над компонентами ПмУП (матрицами 2×n) и практически совпадает по форме и семантике с операциями нечеткой арифметики. Пусть $*_f \in \{+,-,*,/\}$ – арифметическая операция, она выполняется следующим образом: $\mathbf{I}_a *_f \mathbf{I}_b \to \hat{a} *_f \hat{b}$ $\Rightarrow\{\hat{a}$ (:,1).$*_f$ $\hat{b}$ (:,1)/min[($\hat{a}$ (:,2), $\hat{b}$ (:,2))]}. Напомним, что (:,1) и (:,2) – это 1-й и 2-й столбцы матриц, соответствующих ПмУП.

Числовой пример 1. Исходные интервалы: x1 =[3.00 12.00], x2=[7.00 15.00]: Формирование ПмУП тензор-интервала и результата операции представлено в табл. 2, 3.

Таблица 2

Интервал x1	Интервал x2	Сумма интервалов: x1+x2
7.14 0.57	10.83 0.70	17.98 0.57
12.00 1.00	15.00 1.00	27.00 1.00

Таблица 3

Расчетный результат в интервальной форме rez =	Стандартный результат в интервальной форме standart_int =	Близость результата по норме: расчетный и стандартный
10.18 27.00	10.00 27.00	28.85 28.79

Дефадзификация псевдоНМ: x1 x2 x1+x2
10. 13.28 23.74

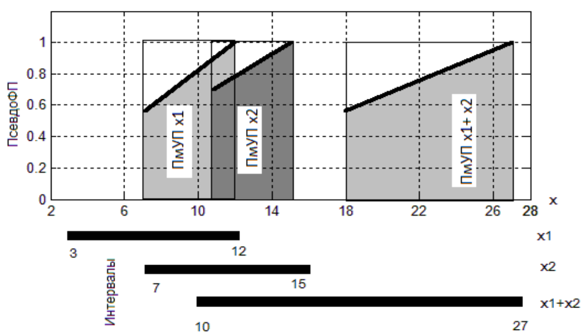

Рисунок 3 – Графическая интерпретация операции интервальной арифметики, реализованной над ПмУП, моделирующая интервалы: ПмУП x1→ [3 12], ПмУП x2→ [7 15], ПмУП (x1+x2) →[3 12]+[7 15]

Пример выполнения операции вычисления суммы двух интервалов при представлении последних тензор-интервалами с матрицами 3 × 3: исходные интервалы:[x1], [x2] → [3.00 12.00], [7.00 15.00].

Расчетный результат в интервальной форме: rez = [10.30 27.00] (расчетный результат вложен в результат, полученный стандартными методами интервальной арифметики) (табл. 3).

Стандарный результат в интервальной форме: standart_int =[10.00 27.00] (табл.3).

Дефадзификация псевдоНМ, соответствующих интервалам:

$$I_{x_1} = [3 \quad 12] \to 8.84\ ,\ I_{x_2} = [7 \quad 15] \to 12.14\ ,$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} \to 21.08\,.$$

$I_{x_1} = [3 \quad 12]$, $I_{x_2} = [7 \quad 15]$, и суммы

$I_x = I_{x_1} + I_{x_2}$ в системе ближайших КП.

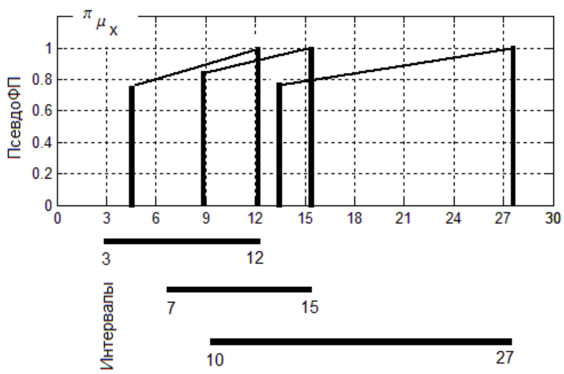

Рисунок 4 – Представление интервалов

Можем сделать следующие выводы:

1. ПмУП, соответствующее интервалу, также названо пседоНМ, т.к. 2-компонента обладает свойствами ФП и, в частности, находится в интервале [0, 1], но не обладает семантикой НМ.

Арифметические операции с ПмУП проводятся аналогично НМ: для 1-й компоненты $P_{ab}(:,1)$ – стандартная покомпонентная арифметика, а для 2-й $P_{ab}(:,2)$ – max/min процедуры, аналогично ФП для НМ; обратная величина P_{ab}^{-1} определена в виде $P_{ab}^{-1}=[P_{ab}(:,1)^{-1}\, P_{ab}(:,2)]$ с неизменной псевдоФП.

Обратим внимание, что к интервалу $\mathbf{I_a}$, представленному в виде ПмУП (псевдоНМ) ${}^{\pi}\tilde{a} = \{a/{}^{\pi}\mu^{a}\} = \begin{pmatrix} a_1/{}^{\pi}\mu^{a_1} \\ \vdots \\ a_n/{}^{\pi}\mu^{a_n} \end{pmatrix}$, где ${}^{\pi}\mu^{a}$ – псевдоФП, может быть применена псевдоинверсия $^{\pi}\tilde{a}$, имеющая в матлаб-нотации вид pinv($^{\pi}\tilde{a}$). Укажем, что результат pinv($^{\pi}\tilde{a}$) может приниматься как сопоставление стандартного обратного интервала некоторой его модели без взаимного перехода. Рациональная область применения pinv($^{\pi}\tilde{a}$) – системы алгебраических уравнений с интервальными переменными, преобразованные в системы матричных уравнений.

2. Алгебраизованная тензор-интервальная математика выполняется по алгоритму:

интервал $I_x = [x_1(=x^{\min}),\ x_2(=x^{\max})]$ представляют в виде последовательности подинтервалов

$$\bigcup_{i=1,n} [x_{i-1} \quad x_i],$$

где n=m^2; -множество чисел (данных) $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ преобразуется в тензор с матрицей **X** размерностью m×m: $X \to {}^{x}T = [x_{ij}]_{i=1,m}^{j=1,m}$ при помощи процедуры reshape (·) ; тензор $^{x}\mathbf{T}$ при помощи процедуры сингулярной декомпозиции преобразуется в подмножество упорядоченных пар

$$^{x}T = \left({}^{x}T(:,1)\,{}^{x}T(:,2)\right) = \left[\,{}^{x}t_i \quad \mu_i^{t_x}\right], \mu_i^{t_x} \to [0,1],$$

$$\mathrm{sum}\left(\left(\mu_i^{t_x}\right)^2\right) = 1,\ \ i = 1,n;$$

обладающее свойством

$$\left\|{}^{x}T\right\|_F^2 \cong \left\|{}^{x}T(:,1) \otimes {}^{x}T(:,2)\right\|_F^2 .$$

Сокращение неопределенности. Обратим внимание на два обстоятельста: во-первых, ПмУП – это сопоставление интервалу нового объекта, ближайшего по унитарной норме. Длина 1-й компоненты ПмУП значительно короче, чем длина интервала, на основании которого они сформированы.Так как ПмУП имеют смысл псевдоНМ, то их 1-я копонента имеет смысл универсального множества, т.е. в данной модели имеет место уменьшение интервала неопределенности, что может оказать серьезное влияние на принятие решения. Интервал позволяет получить различные по форме ПмУП, что дает новые возможности в принятии решений: сочетание теории НМ с парадоксами рационального поведения (учет психологии человека при принятии решений в условиях неопределенности), сформулированных в работах Д.Канемана и А.Тверски.

Во-вторых, дефадзификация ПмУМ дает результаты, не совпадающие со средними значениями. Это ставит под сомнение рациональность назначения ФП, по крайней мере, необходимо одновременно учитывать экспертно назначенную ФП и пседоФП, полученную на ПмУП.

Заметим, что принцип экстремальной энтропии позволяет получить оптимальные (в смысле минимума энтропии) распределения на интервале в зависимости от его длины, которые не совпадают с ФП, назначенными экспертно.

Укажем на связь: четкий интервал → нечеткий интервал→ НМ. В теории НМ введено понятие ближайшего четкого множества: НИн можно определять как ПмУП (некоторое НМ), ближайшее (в смысле унитарной нормы) к исходному (четкому) интервалу.

Например, в рассмотренном выше случае имеем: исходный (четкий) интервал x=[3.00 12.00], ПмУП есть псевдоНМ – нечеткий интервал – $\{x\ {}^{\pi}\mu(x)\} = \begin{pmatrix} 4.73 & 0.77 \\ 8.51 & 0.88 \\ 12.00 & 1.00 \end{pmatrix}$. Приходим к концепции регулируемой неопределенности, получаемой на основе использования скрытых знаний и формируемой моделями и методами тензорной декомпозиции.

Выводы

1. Работы, посвященные теории НЕ-факторов, показали: интервальное представление является наиболее рациональным и практически единственным для Н-моделей. Недоопределенность требует внести в стандартное интервальное представление определенные коррективы.

В настоящее время стала очевидной необходимость применения новых методов доформального исследования объекта (получение скрытых знаний) и новых моделей интервальной неопределенности, что возможно на основе принципов тензорных декомпозиций интервалов.

Предложено исследовать не сам объект (интервал), а ближайший к нему по унитарной норме – тензор с матрицей m×m.

2. Основная первичная модель интервала, принимаемая в работе, имеет вид двух последовательных подинтервалов, стандартное представление интервала (левая и правая границы, среднее значение) представлено как: $\mathbf{I}_x$=[x_1 mean(x) x_2], $\mathbf{I}_x = {}^{(1)}\mathbf{I}_x \cup {}^{(2)}\mathbf{I}_x$, $^{(1)}\mathbf{I}_x$=[x_1 mean(x)], $^{(2)}\mathbf{I}_x$= [mean(x) x_2], mean(x)=(x_1+x_2)/2.

Общая схема моделирования предполагает представление интервала как ПмУП и включает процедуры формирования тензора с матрицей 2×2 (или m×m в случае нескольких последовательных подинтервалов), тензорной декомпозиции и вычисление п/множества упорядоченных пар.

Математические операции в среде тензор-интервалов предложено выполнять двумя способами: непосредственно над матрицами тензоров, моделирующих интервалы (матричная алгебра) или над ПмУП, полученных путем сингулярной декомпозиции тензор-интервалов, когда арифметические операции выполняются по правилам нечеткой арифметики.

3. ПмУП – это сопоставление интервалу нового объекта-аналога НМ, ближайшего по унитарной норме. ПмУП имеют смысл псевдоНМ, их первая копонента имеет смысл универсального множества, в данной модели имеет место уменьшение интервала неопределенности, что может оказать серьезное влияние на принятие решения.

Список литературы

1. Moore R.E. Introduction to interval analysis /Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.–2009.–234 p.

2. Оселедець И.В. Тензорные разложения и их применения: лекция в Яндексе 30 октября 2016 в 17:39. [Электрон.ресурс] / И.В Оселедець. – Режим доступа: https://habrahabr.ru/com-pany/yandex/blog/313892/

3. Гутовски М. В. Красота и сила интервальных методов. [Электрон. ресурс] / М.В. Гутовски М. В.- Режим доступа: http://www.nsc.ru/interval/Introduction/PowerBeauty. pdf

4. Kearfott R.B. Interval Computations: Introduction, Uses, and Resources, Euromath. Bull., 2 (1), pp. 95–112.

5. Interval Computations. [Electronic resource] /–Режим доступа: /http://www.cs.utep.edu/ interval-comp/

6. Интервальный анализ и его приложения. [Электрон. ресурс] / – Режим доступа: http: //www.nsc.ru/interval

7. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. /С.П. Шарый. – Новосибирск: ИВТ СО РАН. – 2013. – 702 с.

8. Gutowski M.W. Interval straight line fitting. [Electronic resource] / M.W Gutowski – Access mode: http://arXiv.org/ abs/math/ 0108163/.

9. Gutowski M.W. Prosta dostatecznie gruba. [Electronic resource] / M.W Gutowski – Access mode: http://pupil.ifpan.edu. pl/ ~postepy/ dodatki/prosta/prosta.pdf

10. Нариньяни А.С. Недоопределенные модели и операции с недоопределенными значениями / А.С. Нариньяни. – Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН СССР. – 1982. – 400 с.

11. Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний / А.С. Нариньяни // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. – 1986.–№ 5. – С. 3 – 28.

12. Schneider J. Arithmetic of fuzzy numbers and intervals – a new perspective with examples [Electronic resource] / J.SCHNEIDER. – Access mode: arXiv: 1310.5604v1 [math.GM] 16 Oct 2013.

13. Boukezzoula R. Inverse arithmetic operators for fuzzy intervals [Electronic resource] /R.Boukezzoula, S.Galichet, L.Foulloy. – Access mode:www.eusflat.org/...2007/... /GALICHET_ Sylvie (111).pdf/.

14. Fortin J., Dubois D., Fargier H. Gradual Numbers and their Application to Fuzzy Interval Analysis. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 2008. – 16, 2. – P. 388 – 402.

15. Lindblad J. Fuzzy Sets and Fuzzy Techniques.Lecture 9. Fuzzy numbers and fuzzy arith-metics [Electronic resource] /J. Lindblad. – Access mode:http://www.cb.uu.se/~joakim/course/fuz-zy/vt07/lectures/L9_4.pdf

16. Lodwick W. Introduction to Fuzzy and Possibilistic Optimization" / W.Lodwick, E. Untiedt // in Chapter 1: Fuzzy Optimization: Recent Developments and Applications, Weldon A. Lod-wick and Janusz Kacprzyk (Editors), Springer-Verlag, New York, 2010.

17. Lodwick W. A. Fundamentals of Interval Analysis and Linkages to Fuzzy Set Theory. Handbook of granular computing / W. Pedrycz, A. Skowron, Vl. Kreinovich. – John Wiley, Publishers, West Sussex, England.-2008, pp.55-79.

18. Aminifar S. A. Uncertainty in Interval Type-2 Fuzzy Systems / S. Aminifar, A. Marzuki// Mathematical Problems in Engineering Volume 2013, Article ID 452780. –16 pp.

19. Experimental Uncertainty Estimation and Statistics for Data Having Interval Uncertainty: Sandia Report: SAND2007-0939 / Sandia National Laboratories Albuquerque, New Mexico 87185 and Livermore, California 94550: Ferson S., Kreinovich V., Hajagos J., Oberkampf W. and Ginzburg L. – 2007. – 162 pp.

20. Dutta P. Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study / P.Dutta, H. Boruah, T. Ali // International Journal of Latest Trends in Computing. – 2011, Vol. 2, Issue 1, 99-108.

21. Khatab A. Kronecker Algebra for series-parallel multi-state systems reliability evaluation / A. Khatab, D. Aitkadi, N. Regz // Evaluation and optimization of innovative production systems of goods and services: 8-th International Conference of Modeling and Simulation – MOSIM'10, Ham-mamet–Tunisia, May 10-12, 2010. – 340pp.

22. Молодцов Д.А. Теория мягких множеств / Д.А. Молодцов. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 380 с

23. Мациевский В. Множества, мультимножества, нечеткие и мягкие множества без универсума / В. Мациевский В// Вестник РГУ им. И. Канта. (Серия «Физ.-мат. науки»). –2007. – Вып. 10. – С. 44 – 52.

24. Kang U. GigaTensor: Scaling Tensor Analysis Up By 100 Times-Algorithms and Disco-veries / U.Kang, E.Papalexakis, A. Harpale, C. Faloutsos//18-th ACM SIGKDD international confe-rence on Knowledge discovery and data mining: Beijing, China – August 12 – 16, 2012; Proceedings of the 18-th ACM SIGKDD, ACM New York, NY, USA.

25. Wang S. A Practical Guide to Randomized Matrix Computations with MATLAB Imple-mentations [Electronic resource] / S.Wang. – Access mode: arXiv:1505.07570v6 [cs.MS]-57 pp.

26. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман: Пер. с франц. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

Статья поступила в редколлегию 03.07.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. П.П. Лизунов, заведующий кафедрой основ информатики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев.

Мінаєв Юрій Миколайович
Доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерних систем і мереж, *orcid.org/0000-0001-6630-3344*
Національний авіаційний університет, Київ
Мінаєва Юлія Іванівна
Кандидат технічних наук, доцент кафедри основ інформатики, *orcid.org/0000-0000-0002-2367-1507*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Філімонова Оксана Юріївна
Кандидат технічних наук, доцент кафедри основ інформатики, *orcid.org/0000-0001-6630-3344*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Філімонов Георгій Олександрович
Аспірант кафедри інформаційних технологій, *orcid.org/0000-0002-6394-0636*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ТЕНЗОРНІ МОДЕЛІ ІНТЕРВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВІ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ УПРАВЛІННЯ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

***Анотація**. Розглянуто представлення інтервала у вигляді тензорної моделі з наступною тензорною декомпозицією і формуванням підмножини упорядкованих пар (псевдонечітка множина виду $\{x \quad {}^{\pi}\mu^{x}\}_1^n, {}^{\pi}\mu^{x} \to [0,1]$ – псевдоФН). Аналогічні нечіткій множині псевдоФН мають розширені властивості функції належності $\sum_{i=1,n}\left({}^{\pi}\mu^{x}\right)^2 = 1.$ Запропоновано нечіткий інтервал визначати як ПмУП найбільш близьку за унітарною нормою до початкового (чіткого) інтервалу. Сформульовано алгоритми виконання арифметичних операцій над інтервалами на рівні тензорних моделей. Наведено приклади, що показують ефективність запропонованих методов і моделей.*

Ключові слова: інтервал; нечітка множина; тензор; тензорна декомпозиція; невизначеність; норма; НЕ-фактор

Minaev Yurii
DSc (Eng.), professor, professor of computer system and networks departement of National aviation university, *orcid.org/0000-0001-6630-3344*
National aviation university, Kiev
Minaeva Julia
PhD (Eng.), Docent, Associate Professor at Computer Science chair, Constuction Department, *orcid.org/0000-0000-0002-2367-1507*
Kiev National university of construction and architecture, Kiev
Filimonova Oksana
PhD (Eng.), Docent, Associate Professor at Computer Science chair, Constuction Department, *orcid.org/0000-0001-6630-3344*
Kiev National university of construction and architecture, Kiev
Filimonov George
Postgraduate at the Informational Technologies Chair, *orcid.org/0000-0002-6394-0636*
Kiev National university of construction and architecture, Kiev

TENSOR MODELS OF INTERVAL MATHEMATICS AS A BASIS OF THE DISABILITY METHOD OF THE MANAGEMENT TASK UNDER UNDERSTANDING CONDITIONS

***Abstract.** The purpose of article is representation new methods of solving control problems in condition of uncertainty based on tensor models. Necessity of using the interval uncertainty models which is possible on the basis of the principles of tensor interval decompositions, became evident. We consider the representation of an interval in the form of a tensor model with the following tensor decomposition and the formation of a subset of ordered pairs (a pseudo-odd set of a kind $\{x \quad {}^{\pi}\mu^{x}\}_1^n, {}^{\pi}\mu^{x} \to [0,1]$ – a pseudo- membership function) analogous to a fuzzy set. Proposed to define a fuzzy interval as subset of ordered pairs, which is closest to the initial (clear) interval by the unitary norm. Algorithms for performing arithmetic operations on intervals at the level of tensor models are formulated. The general modeling scheme assumes the representation of the interval as subset of ordered pairs and includes procedures for the formation a tensor with the matrix 2 x 2 (or m x m in the case of several consecutive subintervals), tensor decomposition, and calculation of n / sets of ordered pairs. Mathematical operations in the medium of tensor intervals are suggested to be performed in two ways: directly over the matrices of tensors modeling the intervals (matrix algebra); over subset of ordered pairs obtained by singular decomposition of tensor intervals, arithmetic operations are performed according to the rules of fuzzy arithmetic. In article are given examples, showing the effectiveness of the proposed methods and models.*

Keywords: interval; fuzzy set; tensor; tensor decomposition; uncertainty; norme; Non-factor

References

1. Moore, R.E., Kearfott, R.B., Cloud, M.J. (2009). Introduction to interval analysis. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 234.

2. Oseledets', I.V. Tenzornyye razlozheniya i ikh primeneniya. Lektsiya v Yandekse 30 oktyabrya 2016 v 17:39. [Electronic resource]. – Access mode: https://habrahabr.ru/ compa-ny/yandex/blog/313892/

3. Gutovski, M.V. KRASOTA I SILA INTERVAL'NYKH METODOV. [Electronic resource]. – Access mode: www.nsc.ru/interval/Introduction/PowerBeauty.pdf

4. Kearfott, R.B. Interval Computations: Introduction, Uses, and Resources. Euromath. Bull., 2 (1), 95–112. [Electronic resource] / R.B Kearfott. Access mode: http://interval.louisiana.edu/ preprints/survey.ps

5. Interval Computations. [Electronic resource] / – Access mode: /http://www.cs.utep.edu/ interval-comp/

6. Interval'nyy analiz i yego prilozheniya. [Electronic resource]. – Access mode: http://www.nsc.ru/interval (date of address 28.09.2013).

7. Sharyy, S.P. Konechnomernyy interval'nyy analiz. – Novosibirsk, IVT SO RAN, 2013 S.P. Sharyy. Konechnomernyy interval'nyy analiz. – Novosibirsk, IVT SO RAN, 20132013. [Electronic resource]. – Access mode: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/Shary Book.pdf (date of address 28.09.2013).

8. Gutowski, M.W. Interval straight line fitting. [Electronic resource] / M.W Gutowski – Access mode: http://arXiv.org/ abs/math/ 0108163.

9. Gutowski, M.W. Prosta dostatecznie gruba. [Electronic resource] / M.W Gutowski – Access mode: http://pupil.ifpan.edu. pl/ ~postepy/ dodatki/prosta/prosta.pdf

10. Narin'yani, A.S. (1982). Non-determined models and operations with non-determined meaings. Preprint VTS SO AN SSSR, 400.

11. Narin'yani, A.S. (1986). Non-determiness in the system of kniwlage processing. Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika, 5. 3–28.

12. Schneider, J. (2013). Arithmetic of fuzzy numbers and intervals – a new perspective with examples [Electronic resource] / J.SCHNEIDER. – Access mode: arXiv: 1310.5604v1 [math.GM] 16 Oct 2013.

13. Boukezzoula, R. (2007). Inverse arithmetic operators for fuzzy intervals [Electronic resource] /R.Boukezzoula, S.Galichet, L.Foulloy. – Access mode:www.eusflat.org/...2007/... /GALICHET_ Sylvie_ (111).pdf.

14. Fortin, J. (2008). Gradual Numbers and their Application to Fuzzy Interval Analysis / Fortin J., Dubois D., Fargier H. // IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 16, 2, 388–402.

15. Lindblad, J. Fuzzy Sets and Fuzzy Techniques.Lecture 9. Fuzzy numbers and fuzzy arith-metics [Electronic resource] /J. Lindblad.- Access mode:http://www.cb.uu.se/~joakim/course/fuz-zy/vt07/lectures/L9_4.pdf

16. Lodwick, W. (2010). Introduction to Fuzzy and Possibilistic Optimization" /W.Lodwick, E. Untiedt// in Chapter 1: Fuzzy Optimization: Recent Developments and Applications, Weldon A. Lod-wick and Janusz Kacprzyk (Editors), Springer-Verlag, New York.

17. Lodwick, W.A. (2008). Fundamentals of Interval Analysis and Linkages to Fuzzy Set Theory. Handbook of granular computing / W. Pedrycz, A. Skowron, Vl. Kreinovich. John Wiley, Publishers, West Sussex, England, 55-79.

18. Aminifar, S.A. (2013). Uncertainty in Interval Type-2 Fuzzy Systems / S. Aminifar, A. Marzuki// Mathematical Problems in Engineering, 16.

19. Experimental Uncertainty Estimation and Statistics for Data Having Interval Uncertainty: Sandia Report: SAND2007-0939 / Sandia National Laboratories Albuquerque, New Mexico 87185 and Livermore, California 94550: Ferson S., Kreinovich V., Hajagos J., Oberkampf W. and Ginzburg L, 162.

20. Dutta, P. (2011). Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study / P.Dutta, H. Boruah, T. Ali // International Journal of Latest Trends in Computing, 2, 1, 99–108.

21. Khatab, A. (2010). Kronecker Algebra for series-parallel multi-state systems reliability evaluation / A. Khatab, D. Aitkadi, N. Regz // Evaluation and optimization of innovative production systems of goods and services: 8-th International Conference of Modeling and Simulation – MOSIM'10, Ham-mamet – Tunisia, May 10-12, 2010.

22. Molodtsov, D.A. (2004). Theory of soft scores. Moscow, Russia: Editorial URSS, 380.

23. Matsiyevskiy, V. (2007). Scores, multiscores, fuzy and soft scores without universalisms. Vestnik RGU im. I. Kanta, 10, 44–52.

24. Kang, U. (2012). GigaTensor: Scaling Tensor Analysis Up By 100 Times-Algorithms and Disco-veries / U.Kang, E.Papalexakis, A. Harpale, C. Faloutsos//18-th ACM SIGKDD international confe-rence on Knowledge discovery and data mining: Beijing, China – August 12 – 16, 2012; Proceedings of the 18-th ACM SIGKDD, ACM New York, NY, USA.

25. Wang, S. A Practical Guide to Randomized Matrix Computations with MATLAB Imple-mentations [Electronic resource] / S.Wang. – Access mode: arXiv: 1505.07570v6 [cs.MS]. – 57 pp.

26. Kofman, A. (1982). Introduction into the theory f fuzzy scores: Trans. from French. Moscow, Russia: Radio i svyaz', 432.

Ссылка на публикацию

APA *Minaev, Yurii, Minaeva, Julia, Filimonova, Oksana, & Filimonov, George. (2017). Tensor models of interval mathematics as a basis of the disability method of the management task under understanding conditions. Management of Development of Complex Systems, 31, 101 – 110.*

ГОСТ *Минаев Ю.Н. Тензорные модели интервальной математики в основе метода решения задач управления в условиях неопределенности [Текст] / Ю.Н. Минаев, Ю.И. Минаева, О.Ю. Филимонова, Г.А. Филимонов // Управление развитием сложных систем. – 2017. – № 31. – С. 101 – 110.*