УДК 004.42:510.69

М. С. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
С. С. Шкільняк , д-р фіз.-мат. наук, доц.

СПЕЦІАЛЬНІ СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ЧИСТИХ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних предикатів. Введено розширення логіки спеціальними предикатами, які визначають наявність значення для змінних. На цій основі для таких логік побудовано числення секвенційного типу. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

Pure first-order composition-nominative logics of single-valued partial predicates are studied. Extended logics with special variable definedness predicates are introduced. On this basis sequent calculi for the introduced logics are constructed and their soundness and completeness are proved.

Вступ. Програмно-орієнтовані логічні формалізми, будовані на основі композиційно-номінативного підходу [1], названі композиційно-номінативними логіками (КНЛ). Такі логічні формалізми вивчались, зокрема, в [2]. Дослідження фундаментального поняття логічного слідування для КНЛ проведене в [3–5]. Було запропоновано різні формалізації логічного слідування за допомогою відношень логічного наслідку, досліджено властивості таких відношень в різних семантиках, зокрема, властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Різноманітність семантик та відношень логічного наслідку в КНЛ квазіарних предикатів індукує побудову для них низки різновидностей секвенційних числень. Для чистих першопорядкових КНЛ спектр таких числень побудовано в [5–7], секвенційні числення для КНЛ однозначних предикатів кванторно-еквацiйного рівня запропоновано в [8].

Метою даної роботи є побудова спеціальних секвенційних числень для чистих першопорядкових КНЛ однозначних предикатів. На відміну від [5–7], де секвенційні числення будуються на основі властивостей *X*–*Y*-означених відношень логічного наслідку, пропоновані числення базуються на ідеї введення спеціальних предикатів, які визначають наявність значення для предметних імен**.** Для побудованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [2–5]. Для полегшення читання нагадаємо основні поняття і визначення.

Основні поняття і визначення. *V*-іменною множиною (*V*-ІМ) над *A* називають довільну однозначну функцію вигляду $\delta : V \to A$. Тут *V* та *A* – множини предметних імен та предметних значень. Клас всіх *V*-ІМ над *A* позначаємо ${}^{V}\!A$. *V*-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для ІМ вводимо функцію $asn : {}^{V}\!A \to 2^V$ так: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Визначаємо $\delta \,\|X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$. Замість $\delta \,\|(V \backslash X)$ пишемо $\delta \,\|_{-X}$.

Операцію накладки вводимо так: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \,\|(V \setminus asn(\delta_2)))$.

Операцію реномінації $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n} : {}^{V}\!A \to {}^{V}\!A$ задаємо так: $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \,\|(V \backslash \{v_1,...,v_n\}))$.

Функцію вигляду $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$ називають *V*-квазіарним предикатом на *A*.

В роботі розглядаємо часткові однозначні предикати. Клас *V*-квазіарних предикатів на *A* позначаємо Pr^A.

Ім'я *x* строго неістотне для *V*-квазіарного предиката *P*, якщо $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \,\|_{-x})$ для довільних $d \in {}^{V}\!A$ та $a \in A$.

Областю істинності та областю хибності предиката $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$ назвемо множини

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d) = T\} \text{ та } \boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d) = F\}.$$

V-квазіарний предикат *P* (частково) істинний*,* якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Базовими композиціями чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) є пропозиційні зв'язки $\neg$ та $\vee$, реномінації $\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, квантори $\exists \boldsymbol{x}$. Через області істинності й хибності відповідних предикатів вони задаються так:

$$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P);\ \ \boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P);$$

$$\boldsymbol{T}(P \vee Q) = \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q);\ \ \boldsymbol{F}(P \vee Q) = \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q);$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{T}(P));\ \ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{F}(P));$$

$\boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A\}$; $\boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $a \in A\}$.

Семантичними моделями ЧКНЛ є композиційні системи квазіарних предикатів кванторного рівня $({}^{V}\!A, Pr^A, \boldsymbol{C})$, де $\boldsymbol{C}$ визначається базовими композиціями $\neg, \vee, \boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists \boldsymbol{x}$. Терми відповідної композиційної алгебри $(Pr^A, \boldsymbol{C})$ трактуємо як формули мови ЧКНЛ. Алфавіт мови ЧКНЛ: символи базових композицій, множина *Ps* предикатних символів (сигнатура мови), множина *V* предметних імен. Множина *Fr* формул мови ЧКНЛ задається індуктивно:

1) кожний $p \in Ps$ є формулою, такі формули атомарні;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

Позначаємо $nm(\Phi)$ множину всіх предметних імен із *V,* які фігурують у формулі Φ.

Відображення інтерпретації формул $\boldsymbol{J} : Fr \to Pr^A$ визначається за допомогою тотального однозначного відображення $\boldsymbol{I} : Ps \to Pr^A$, яке позначає символами *Ps* базові предикати.

1) $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p \in Ps$;

2) $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$, $\boldsymbol{J}(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi) = \boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Відображення $\boldsymbol{I} : Ps \to Pr$ прив'язує алгебру даних (A, Pr) до мови ЧКНЛ. Отримуємо алгебраїчну систему (АС) з доданою сигнатурою [2] вигляду $((A, Pr^A), \boldsymbol{I})$, яку позначаємо $(A, \boldsymbol{I})$. Така АС задає композиційну систему $({}^VA, Pr^A, \boldsymbol{C})$, тому АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову з алгебрами даних.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначаємо Φ_A.

Ім'я $x\in V$ строго неістотне для формули Φ, якщо для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ ім'я x строго неістотне для Φ_A.

Формула примітивна, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}p$, причому відсутні тотожні перейменування та $\bar{v}$ не містить строго неістотних для p імен.

Φ всюди істинна, або неспростовна (позн. $|= \Phi$), якщо Φ_A неспростовний для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Формула Φ – логічний наслідок формули Ψ (позн. $\Phi \,|=\, \Psi$), якщо $\boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Формули Φ та Ψ логічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim \Psi$), якщо $\Phi \,|=\, \Psi$ та $\Psi \,|=\, \Phi$.

Формули Φ та Ψ строго еквівалентні в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}\!\!\sim_{TF} \Psi$), якщо $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \boldsymbol{F}(\Psi_A)$.

Формули Φ та Ψ логічно строго еквівалентні (позн. $\Phi \sim_{TF} \Psi$), якщо $\Phi \;{}_{\boldsymbol{A}}\!\!\sim_{TF} \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Для кожного $p\in Ps$ множину синтетично строго неістотних предметних імен задамо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps\to 2^V$, яка продовжується [3] до $\nu : Fr\to 2^V$. Для семантичних моделей ЧКНЛ постулюється нескінченність множини $V_T = \bigcap_{p\in Ps} \nu(p)$ тотально строго неістотних імен.

Індикатори наявності значення для предметного імені. Для логіки квазіарних предикатів важливим є те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Це веде до того, що у загальному випадку логіки квазіарних предикатів стають невірними [3–6] деякі важливі закони класичної логіки. Тому при інтерпретаціях формул варто явно вказувати означені та неозначені предметні імена. Для цього запропоновано [9] спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z, тобто наявність значення для z.

Предикати εz – індикатори наявності в даному $d\in {}^VA$ значення для предметного імені $z\in V$ – визначаємо так:

$$\varepsilon z(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } d(z)\uparrow, \\ F, \text{ якщо } d(z)\downarrow. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\nu(\varepsilon z) = V\setminus\{z\}$. Дамо визначення предиката εz через його області істинності та хибності.

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in {}^VA \mid z\in asn(d)\}$; $\boldsymbol{T}(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in {}^VA \mid z\notin asn(d)\}$.

Теорема 1. *Справджуються наступні співвідношення*:

$$\boldsymbol{T}\,(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))\cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{T}\,(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \quad \textit{та} \quad \boldsymbol{F}\,(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))\cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{F}\,(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)).$$

Доведення. Нехай $d\in\boldsymbol{T}\,(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))\cap\ \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, тоді $d(y)\downarrow$ та $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)(d) = T$, звідки $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$ та $P(d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto d(y)) = T$. Отже, $P(d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a) = T$ для деякого $a\in A$, звідки $(\exists xP)(\mathrm{r}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(d)) = T$, тому $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)(d) = T$, що дає $d\in\boldsymbol{T}\,(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$. Таким чином, $\boldsymbol{T}\,(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))\cap\boldsymbol{F}\,(\varepsilon y)\subseteq\boldsymbol{T}\,(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$.

Нехай $d\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))\cap\boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, тоді $d(y)\downarrow$ та $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)(d) = F$. Із останнього маємо $(\exists xP)(d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})) = F$, тому $P(d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto b) = F$ для всіх $b\in A$. Згідно з $d(y)\downarrow$ маємо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, тоді $P(d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto d(y)) = F$, звідки $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)(d) = F$., що дає $d\in\boldsymbol{F}\,(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$. Отже, $\boldsymbol{F}\,(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))\cap\boldsymbol{F}\,(\varepsilon y)\subseteq\boldsymbol{F}\,(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$.

Як окремий випадок теореми 1 отримуємо: $\boldsymbol{T}\,(R_y^x(P))\cap\boldsymbol{F}\,(\varepsilon y)\subseteq\boldsymbol{T}\,(\exists xP)$ та $\boldsymbol{F}\,(\exists xP)\cap\boldsymbol{F}\,(\varepsilon y)\subseteq\boldsymbol{F}\,(R_y^x(P))$.

Далі в роботі будемо розглядати ЧКНЛ, сигнатура мови яких розширена множиною $\{\varepsilon x \mid x\in V\}$ символів предикатів $\varepsilon\boldsymbol{x}$, які визначають наявність значення для предметних імен. Такі розширені логіки природно називати ε-ЧКНЛ.

Мова ε-ЧКНЛ визначається так, як мова ЧКНЛ. При цьому усі $\varepsilon x\in Ps$, $\boldsymbol{J}(\varepsilon x) = \boldsymbol{I}(\varepsilon x) = \varepsilon\boldsymbol{x}$. Зауважимо, що ЧКНЛ із виділеними предикатами $\varepsilon\boldsymbol{x}$ можна трактувати як виділення *підрівня* ЧКНЛ із базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$, $\varepsilon\boldsymbol{x}$.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Нехай $\Gamma\subseteq Fr$ та $\Delta\subseteq Fr$ – множини формул.

Δ є логічним наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma\;{}_{\boldsymbol{A}}|\!=\Delta$), якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A)\cap\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$.

Δ є логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma\,|\!=\Delta$), якщо $\Gamma\;{}_{\boldsymbol{A}}|\!=\Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Теорема 2 (заміни еквівалентних). *Нехай* $\Phi\sim_{TF}\Psi$. *Тоді*: $\Phi,\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow\Psi,\Gamma\,|\!=\Delta$ *та* $\Gamma\,|\!=\Delta,\Phi\ \Leftrightarrow\ \Gamma\,|\!=\Delta,\Psi$.

Наведемо основні властивості відношення $|\!=$.

C) Якщо $\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing$, то $\Gamma\,|\!=\Delta$.

U) Нехай $\Gamma\subseteq\Lambda$ та $\Delta\subseteq\Sigma$, тоді $\Gamma\,|\!=\Delta\Rightarrow\Lambda\,|\!=\Sigma$.

$\neg$) $\neg\Phi,\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=\Delta,\Phi$; $\quad\Gamma\,|\!=\Delta,\neg\Phi\Leftrightarrow\Phi,\Gamma\,|\!=\Delta$.

$\vee$) $\Phi\vee\Psi,\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow\Phi,\Gamma\,|\!=\Delta$ та $\Psi,\Gamma\,|\!=\Delta$; $\quad\Gamma\,|\!=\Delta,\Phi\vee\Psi\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=\Delta,\Phi,\Psi$.

RT) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi),\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma\,|\!=\Delta$; $\quad\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

ΦN) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi),\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma\,|\!=\Delta$; $\quad\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ (тут умова $y\in\nu(\Phi)$).

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)),\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi),\Gamma\,|\!=\Delta$; $\quad\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$.

R$\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi),\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma\,|\!=\Delta$; $\quad\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=\Delta,\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

R$\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Gamma\,|\!=\Delta\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi),\Gamma\,|\!=\Delta$; $\quad\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=\Delta,\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

R∃R) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta$ $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ (тут умова $x \notin \{\bar{u}\}$).

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \models \Delta, \exists x\Phi$.

Розглянемо тепер властивості, пов'язані з елімінацією кванторів (зокрема, елімінації кванторів під реномінацією).

Теорема 3. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ *маємо*: $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi),\Gamma \models \Delta, \varepsilon z$.

Доводимо ⇒) Нехай $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta$, тоді $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)=\varnothing$. Згідно теореми 1 маємо $\boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)\subseteq \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)=\varnothing$. Отже, $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi),\Gamma \models \Delta, \varepsilon z$.

Доводимо ⇐) Нехай $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi),\Gamma \models \Delta, \varepsilon z$, звідси $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)=\varnothing$. Покажемо, що тоді $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)=\varnothing$, звідки отримаємо $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta$. Припустимо супротивне: $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)\cap$ $\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)=\varnothing$ та існує d таке, що $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Маємо $d\in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$, $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $d\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із умови $d\in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ маємо $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi_A)$, звідки $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$, тому $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із останнього отримуємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz маємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, що суперечить припущенню $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)=\varnothing$.

Теорема 4. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ *маємо*: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$.

Доводимо ⇒) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$, то згідно властивості U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$.

Доводимо ⇐) Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$, водночас $\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Із останнього маємо, що існує $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F_A}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$. Тоді $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$ та $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$. Із умови $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ маємо $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$, звідки для всіх $a\in A$ отримуємо $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Але $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ та z тотально строго неістотне, тому для всіх $a\in A$ маємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ та $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$ для всіх $a\in A$. Це суперечить $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$.

Теорема 5. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$ *маємо*: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо ⇒) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y$, то згідно властивості U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо ⇐) Згідно теореми 1 маємо $\boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)\subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)\subseteq$ $\subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)$. Отже, з умови $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)=\varnothing$ випливає $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)=\varnothing$, тобто $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y \Rightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y$.

Теорема 6. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$ *маємо*: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ *та* $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо ⇒) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$, то $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ та $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ згідно U.

Доводимо ⇐) Припустимо супротивне: $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$, проте $\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Тоді маємо $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\neq\varnothing$, звідки існує d таке, що $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$.

Можливі 2 випадки: $d(y)\uparrow$ та $d(y)\downarrow$. Якщо $d(y)\uparrow$, то $d\in \boldsymbol{T}(\varepsilon y)$, звідки $d\in \boldsymbol{T}(\varepsilon y)\cap \boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$, що суперечить умові $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Якщо $d(y)\downarrow$, то $d\in \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$; нехай $d(y)=a$. Із $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ тоді $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$. Звідси отримуємо $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto b\in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$ для всіх $b\in A$, зокрема, $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, тому $d\nabla \bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto d(y)\in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, звідки $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A)$. Отже, $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, що суперечить $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

На основі теорем 3–6 отримуємо наступні властивості елімінації кванторів.

$\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi),\Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi,\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi),\Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists Rf_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists f_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

Властивості $\exists f_{\dashv}$ та $\exists Rf_{\dashv}$ назвемо властивостями типу ∃f (∃-first).

$\exists$Rv$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists$v$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_{y}^{x}(\Phi), \varepsilon y$.

Властивості $\exists$v$_{\dashv}$ та $\exists$Rv$_{\dashv}$ назвемо властивостями типу $\exists$v ($\exists$-valued).

$\exists$Rd$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \ \Leftrightarrow\ \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists$d$_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \ \Leftrightarrow\ \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_{y}^{x}(\Phi), \varepsilon y$.

Властивості $\exists$d$_{\dashv}$ та $\exists$Rd$_{\dashv}$ назвемо властивостями типу $\exists$d ($\exists$-distributed).

Секвенційні числення чистих КНЛ першого порядку. Числення секвенційного типу для ЧКНЛ будуємо на основі властивостей відношення логічного наслідку для множин формул. *Секвенцією* називатимемо множину формул, специфікованих (відмічених) спеціальними символами $\vdash$ та $\dashv$, які не входять до алфавіту мови. Формули секвенції, відмічені символом $\vdash$, назвемо *T*-формулами, а формули, відмічені символом $\dashv$, – *F*-формулами Секвенції позначаємо як $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, або, не деталізуючи, у вигляді Σ. Секвенційне числення будується так, що $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означає, що $\Gamma \models \Delta$.

Базова умова замкненості: секвенція Ξ замкнена, якщо існує формула Φ така, що $\vdash\Phi\in\Xi$ та $\dashv\Phi\in\Xi$.

Введемо додаткову умову замкненості секвенції, яку назвемо *unv*-замкненістю (*unv* – скорочення *unvalued*). Вона базується на поняттях *unv*-змінних та *unv*-замкнених *R*-формул, тобто формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

Множиною *unv*-змінних секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ назвемо множину $Un = \{u\in V \mid \varepsilon(u)\in\Gamma\}$.

При інтерпретатаціях предметні імена (змінні) множини *Un* трактуються як неозначені.

Для *R*-формул введемо поняття *unv*-форми відносно заданої множині *unv*-змінних *Un*, або *Un*-*unv*-форми.

Нехай *R*-формула $R_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}\Phi$ така: $\{r_1,\ldots, r_k, s,\ldots, s_k, y_1,\ldots, y_n\}\subseteq Un$, $\{x_1,\ldots,x_n\}\cap Un=\varnothing$, $\{v_1,\ldots, v_m\}\cap Un=\varnothing$.

Un-*unv*-форма формули $R_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}\Phi$ – це вираз вигляду $R_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon,\ v_1,\ldots,v_m}^{x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots,u_m}\Phi$, де спеціальний символ ε позначає невизначене значення.

R-формули Φ та Ψ назвемо *unv-еквівалентними* відносно множини *unv*-змінних *Un*, або *Un-unv-еквівалентними*, якщо Φ та Ψ мають однакові *Un*-*unv*-форми.

Із цього визначення вмпливає: якщо *R*-формули Φ та Ψ *Un*-*unv*-еквівалентні, то для кожних моделі мови ***A*** та $d\in {}^{V}\!A$, для яких виконується умова $\varepsilon u_A(d) = T$ для всіх $u\in Un$, маємо $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$.

Секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ із множиною *unv*-змінних *Un unv-замкнена*, якщо існує пара *Un*-*unv*-еквівалентних *R*-формул Φ та Ψ таких, що $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi\in\Delta$.

Теорема 7. *Якщо секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv-замкнена*, *то* $\Gamma \models \Delta$.

Справді, нехай секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv*-замкнена. Це означає, що вона має вигляд $\{\vdash\varepsilon u\}_{u\in Un}, \vdash\Phi, \vdash\Sigma, \dashv\Upsilon, \dashv\Psi$, де *R*-формули Φ та Ψ *Un*-*unv*-еквівалентні. Зафіксуємо довільні модель мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $d\in {}^{V}\!A$. Можливі два випадки.

Нехай $\varepsilon u_A(d) = T$ для всіх $u\in Un$. Згідно *Un*-*unv*-еквівалентності *R*-формул Φ та Ψ маємо $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$ для кожного $d\in {}^{V}\!A$, тому неможливо $d\in \boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_A)$. Нехай $\varepsilon u_A(d) = F$ для деякої $u\in Un$, тоді неможливо $d\in \boldsymbol{T}(\{\varepsilon u_A\}_{u\in Un})$.

Отже, $\boldsymbol{T}(\{\varepsilon u_A\}_{u\in Un})\cap \boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap \boldsymbol{T}(\Sigma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Upsilon_A)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$, що дає $\{\varepsilon u\}_{u\in Un}, \Phi, \Sigma \models_{\boldsymbol{A}} \Upsilon, \Psi$, тобто $\Gamma \models_{\boldsymbol{A}} \Delta$. Звідси $\Gamma \models \Delta$.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення $\models$. Базові секвенційні форми записуємо у вигляді $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$ (Σ, Λ, Ω – секвенції).

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ.

Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції Σ.

На основі семантичних властивостей відношення $\models$ для множин формул вводимо такі базові секвенційні форми:

$\vdash$RT $\dfrac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma}$; $\dashv$RT $\dfrac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma}$;

$\vdash\Phi$N $\dfrac{\vdash R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\vdash R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A), \Sigma}$, де $y\in\nu(A)$; $\dashv\Phi$N $\dfrac{\dashv R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{\dashv R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A), \Sigma}$, де $y\in\nu(A)$;

$\vdash$R$\exists$R $\dfrac{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma}{\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA), \Sigma}$, де $x \notin \{\bar{u}\}$; $\dashv$R$\exists$R $\dfrac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA), \Sigma}{\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA), \Sigma}$, де $x \notin \{\bar{u}\}$.

$\vdash$R$\exists$p $\dfrac{\vdash \exists xA, \Sigma}{\vdash R_{y}^{x}(\exists xA), \Sigma}$; $\dashv$R$\exists$p $\dfrac{\dashv \exists xA, \Sigma}{\dashv R_{y}^{x}(\exists xA), \Sigma}$.

Секвенційні форми типів RT, ΦN, R$\exists$R, R$\exists$p назвемо *допоміжними*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

$\vdash$RR $\dfrac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A), \Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$; $\dashv$RR $\dfrac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A), \Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$;

$\vdash$R¬ $\dfrac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}$; $\qquad$ $\dashv$R¬ $\dfrac{\dashv \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}$;

$\vdash$R∨ $\dfrac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}$; $\qquad$ $\dashv$R∨ $\dfrac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}$;

$\vdash$¬ $\dfrac{\dashv A,\Sigma}{\vdash \neg A,\Sigma}$; $\qquad$ $\dashv$¬ $\dfrac{\vdash A,\Sigma}{\dashv \neg A,\Sigma}$;

$\vdash$∨ $\dfrac{\vdash A,\Sigma \quad \vdash B,\Sigma}{\vdash A\vee B,\Sigma}$; $\qquad$ $\dashv$∨ $\dfrac{\dashv A, \dashv B,\Sigma}{\dashv A\vee B,\Sigma}$;

Ми вводимо дві різновидності форм для елімінації кванторів: елімінації квантора під реномінацією (∃R-форми) та елімінації зовнішнього квантора (∃-форми).

$\vdash$∃ $\dfrac{\vdash R_z^x(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\vdash \exists xA,\Sigma}$, де $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, \exists xA)$; $\qquad$ $\vdash$∃R $\dfrac{\vdash R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA))$.

Секвенційні форми $\vdash$∃R та $\vdash$∃ будемо називати $\exists_T$-формами.

$\dashv$∃f $\dfrac{\dashv \exists xA,\ \dashv R_z^x(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\dashv \exists xA,\Sigma}$, де $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, \exists xA)$;

$\dashv$∃Rf $\dfrac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv \varepsilon z,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA))$;

Для $\dashv$∃f та $\dashv$∃Rf умова: Σ не містить спеціальних предикатних символів вигляду εz.

Така умова означає: при застосуванні $\dashv$∃f чи $\dashv$∃Rf до певної *F*-формули секвенції Ω на шляху від кореня до цієї Ω ще не було застосувань форм елімінації кванторів, це буде *першим* застосуванням форми елімінації.

Форми $\dashv$∃f та $\dashv$∃Rf назвемо формами типу ∃f (∃-first).

$\dashv$∃v $\dfrac{\dashv \exists xA,\ \dashv R_y^x(A),\ \dashv \varepsilon y,\Sigma}{\dashv \exists xA,\ \dashv \varepsilon y,\Sigma}$; $\qquad$ $\dashv$∃Rv $\dfrac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv \varepsilon y,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv \varepsilon y,\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$.

Форми $\dashv$∃v та $\dashv$∃Rv назвемо формами типу ∃v (∃-valued).

$\dashv$∃d $\dfrac{\vdash \varepsilon y,\ \dashv \exists xA,\Sigma \qquad \dashv \exists xA,\ \dashv R_y^x(A),\ \dashv \varepsilon y,\Sigma}{\dashv \exists xA,\Sigma}$; $\qquad$ $\dashv$∃Rd $\dfrac{\vdash \varepsilon y,\ \dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma \qquad \dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv \varepsilon y,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$.

Для $\dashv$∃d та $\dashv$∃Rd умова: εy не входить до складу Σ, водночас Σ містить принаймі один спеціальний ПС вигляду εz. Форми $\dashv$∃d та $\dashv$∃Rd назвемо формами типу ∃d (∃-distributed).

Секвенційні форми $\dashv$∃f, $\dashv$∃Rf, $\dashv$∃v, $\dashv$∃Rv, $\dashv$∃d, $\dashv$∃Rd будемо називати $\exists_F$-формами.

Секвенційні числення логік квазіарних предикатів із наведеними вище базовими секвенційними формами назвемо *QSC-численнями.*

Побудова секвенційного дерева. Опишемо процедуру побудови секвенційного дерева для заданої секвенції Σ. Вона придатна для скінченних та зліченних секвенцій.

Для загального випадку логіки квазіарних предикатів треба брати до уваги, що значення предиката *P*(*d*) може бути різним залежно від того, входить чи не входить до *d* компонента з певним предметним іменем. Тому при інтерпретаціях формул необхідно явно вказувати множини означених та неозначених імен. В процедурі побудови секвенційного дерева така особливість проявляється при формуванні прикладів для *F*-формул вигляду $\exists x\Phi$ та $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ за допомогою $\exists_F$-форм: приклади можуть відповідно мати тільки вигляд $R_y^x(\Phi)$ та $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$, де ім'я *y* – означене. Виділення означених та неозначених предметних імен ми робимо за допомогою спеціальних предикатних символів вигляду εy. Для секвенції Σ входження $\vdash\varepsilon y$ до Σ трактуємо як неозначеність *y*, а входження $\dashv\varepsilon y$ до Σ – як означеність *y*.

Для виведень скінченних секвенцій введемо поняття фінальної секвенцій.

Незамкнена вершина-секвенція Ω виведення (секвенційного дерева) секвенції Σ – *фінальна*, якщо до неї вже незастосовна жодна секвенційна форма, або якщо кожне застосування секвенційної форми до Ω не вводить нових формул, тобто формул, відмінних від формул секвенцій на шляху від Σ до Ω. Останнє означає стабілізацію на даному шляху, тобто ситуацію повторення незамкненої секвенції. Це, зокрема, можливо тоді, коли повторне застосування форм типу ∃v не додає нових прикладів.

Процедура побудови дерева для секвенції Σ починається з кореня дерева. Таку процедуру розіб'ємо на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул.

На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списку *T*-формул та списку *F*-формул. Якщо в секвенції недоступних *T*-формул чи *F*-формул немає (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку.

На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків (або єдина *T*-формула чи *F*-формула, якщо один зі списків порожній).

Перед побудовою дерева для Σ зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* "нових" тотально строго неістотних імен такий, що імена із *TN* не зустрічаються у формулах секвенції Σ.

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі k+1 перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, ми отримали замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією. Поява фінальної секвенції сигналізує про негативне завершення процедури побудови дерева та про наявність в ньому шляху (від кореня до даної фінальної секвенції), всі вершини якого незамкнені. Такий шлях назвемо незамкненим.

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ наступним чином.

(1) Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ.

(2) До кожної активної формули застосовуємо відповідну основну секвенційну форму (так, як це описано нижче).

В процесі застосування основних секвенційних форм усуваємо, у разі наявності, тотожні перейменування та пари імен реномінацій за неістотним чи квантифікованим верхнім іменем, застосовуючи належну кількість разів допоміжні форми типів RT, ΦN, R∃R, R∃p. Після застосування основної секвенційної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні. До таких формул на даному етапі секвенційні форми вже не застосовуються (це не стосується використання допоміжних форм типу RT, ΦN, R∃R, R∃p).

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному застосуванні такої форми беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне ім'я ***z*** як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини. Після цього до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну форму – одну з форм типу RR, R¬, R∨, ¬, ∨.

Далі застосовуємо $\exists_F$-форми. Це робимо таким чином.

Якщо в момент першого застосування $\exists_F$-форми серед доступних формул секвенції ще немає спеціальних ПС вигляду εy (це означає, що на цьому шляху ще не було застосувань форм елімінації квантора та виділення означених і неозначених імен), то застосовуємо відповідну форму типу ∃f. Після цього за можливості застосовуємо відповідні форми типу ∃v. Це робимо для всіх *y* таких, що спеціальні ПС вигляду εy є доступними *F*-формулами секвенції.

Далі застосовуємо (за можливості) 2-засновкові форми типу ∃d (необхідною умовою є наявність серед доступних формул секвенції хоч одного спеціального ПС вигляду $\varepsilon \boldsymbol{z}$, інакше виконується форма типу ∃f). Нехай в момент застосування певної форми типу ∃d маємо $\boldsymbol{\Sigma_0}$ як множину доступних формул, тоді цю форму застосовуємо для всіх імен $y \in nm(\boldsymbol{\Sigma_0})$ таких, що $\varepsilon y \notin \boldsymbol{\Sigma_0}$. Таке застосування по суті дає розподіл цих імен на означені та неозначені, це веде до добудови скінченного піддерева.

Після виконання кожної форми секвенції-вершини перевіряємо на замкненість, і якщо так, то відмічаємо цей факт. Замкнені секвенції є листами секвенційного дерева, при появі замкненої секвенції до неї вже незастосовна жодна форма, і процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Секвенції ми трактуємо як множини специфікованих формул, тому всі повтори формул у секвенціях усуваємо.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) Процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.

2) Процедуру завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево.

3) Процедура не завершується, маємо нескінченне секвенційне дерево. За лемою Кеніга [10] нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях.

У випадках 2) і 3) у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Коректність *QSC*-числень. Нехай секвенція Σ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево.

Із наведеної вище процедури побудови секвенційного дерева випливає, що для кожної його вершини $\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}$ справджується $\Lambda \models \mathrm{K}$.

Для листів дерева це випливає з визначень замкненої та *unv*-замкненої секвенцій.

Збереження секвенційними формами зазначеного вище відношення логічного наслідку (від засновків до висновків) виконується для допоміжних форм типу RT, ΦN, R∃R, R∃p та основних форм типу типу RR, R¬, R∨, ¬, ∨. Це випливає із відповідних властивостей типу RT, ΦN, R∃R, RR, R¬, R∨, ¬, ∨ для відношення $\models$.

Для $\vdash\exists$-форм та $\vdash\exists$R-форм збереження відповідних відношень логічного наслідку від засновку до висновку випливає з властивостей $\exists_{\vdash}$ та $\exists R_{\vdash}$. Для форм типу ∃f це випливає з властивостей $\exists f_{\dashv}$ та $\exists Rf_{\dashv}$, для форм типу ∃v – з властивостей $\exists v_{\dashv}$ та $\exists Rv_{\dashv}$, для форм типу ∃d – з властивостей $\exists d_{\dashv}$ та $\exists Rd_{\dashv}$.

Таким чином, для побудованого *QSC*-числення справджується.

Теорема 8 (коректності). *Нехай секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma \models \Delta$.

Повнота *QSC*-числень. Теорема повноти *QSC*-числень опирається на теорему про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху.

Теорема 9. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві*, ***H*** *– множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують* АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ *та* $\delta \in {}^{V}\!A$ *такі*, *що*:

1) $\vdash\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$; 2) $\dashv\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$.

Таку пару $(\boldsymbol{A}, \delta)$ назвемо *контрмоделлю* для секвенції Σ, для якої збудоване відповідне секвенційне дерево.

Множини $W = \{y \in nm(\boldsymbol{H}) \mid \dashv\varepsilon y \in \boldsymbol{H}\}$ та $Un = \{y \in nm(\boldsymbol{H}) \mid \vdash\varepsilon y \in \boldsymbol{H}\}$ назвемо відповідно множиною означених імен та множиною неозначених імен множини ***H***.

Доведення. Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується як базова умова замкненості, так і умова *unv*-замкненості. Тому для множини ***H*** гарантовано виконуються наступні умови:

НС) Для кожної примітивної формули Φ неможливо $\vdash\Phi \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv\Phi \in \boldsymbol{H}$;

НСU) Не існує пари примітивних *Un*-*unv*-еквівалентних формул $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} A$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{u}} A$ таких, що $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}} A \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv R_{\bar{y}}^{\bar{u}} A \in \boldsymbol{H}$.

Умови НС та НСU назвемо умовами коректності множини специфікованих формул ***H***.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої виконуються згідно з секвенційними формами *QSC*-числення. Звідси випливає, що для $\boldsymbol{H}$ виконуються наступні умови.

HRT) Якщо $\vdash R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HΦN) Якщо $\vdash R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∃R) Якщо $\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$; якщо $\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$ (тут $x\notin\{\bar u\}$).

HR∃p) Якщо $\vdash R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HRR) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR¬) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∨) Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬) Якщо $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H∨) Якщо $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

H∃) Якщо $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то для всіх $y\in W$ маємо $\dashv R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H∃R) Якщо $\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

Якщо $\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то для всіх $y\in W$ маємо $\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ (тут $x\notin\{\bar u\}$).

Множину специфікованих формул $\boldsymbol{H}$, для якої виконуються наведені вище умови, назвемо *модельною*, або *хінтікківською* множиною. Метод модельних (хінтікківських) множин широко використовується для доведення повноти різноманітних логічних систем (див., напр., [11]).

Доведемо наведені вище умови для модельної множини. Це очевидно майже для всіх цих умов, тому обмежимось для прикладу доведенням H∨ та H∃R.

Доводимо H∨. Нехай $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху $\wp$ до *T*-формули $\Phi\vee\Psi$ була застосована $\vdash\vee$-форма, яка дала *T*-формулу Φ або *T*-формулу Ψ, звідки $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$. Нехай $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху $\wp$ до *F*-формули $\Phi\vee\Psi$ була застосована $\dashv\vee$-форма, яка дала *F*-формули Φ та Ψ, звідки $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

Доводимо H∃R. Нехай $\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху $\wp$ до *T*-формули $R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$ була застосована $\vdash\exists$R-форма, яка дала приклад – *T*-формулу $R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)$. Тоді $\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, тому $y\in W$. Отже, для деякого $y\in W$ маємо $\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Нехай $\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$; тоді при кожній активізації цієї *F*-формули до відповідної вершини-секвенції додаються, згідно $\dashv\exists$Rf-форми (якщо це перше на шляху $\wp$ застосування форми елімінації), $\dashv\exists$Rv-форми чи $\dashv\exists$Rd-форми, її приклади – *F*-формули $R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)$ – для кожного *y* такого, що $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{\Sigma_0}$, де $\boldsymbol{\Sigma_0}$ – множина доступних формул вершини. Отже, якщо $\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх *y* таких, що $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, тобто для всіх $y\in W$.

Перейдемо тепер до побудови контрмоделі за модельною множиною $\boldsymbol{H}$.

Для множини $W=\{y\in nm(\boldsymbol{H})\,|\,\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$ візьмемо деяку множину *A* таку, що $|A| = |W|$. Фактично така *A* дублює множину усіх означених предметних імен, що фігурують у $\boldsymbol{H}$. Візьмемо деяку ін'єктивну $\delta\in{}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$.

Задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $r^{\bar v}_{\bar x}(\delta)$.

Якщо $\vdash\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y_A(\delta) = T$, що й означає $y\notin asn(\delta)$; якщо $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y_A(\delta) = F$, що й означає $y\in asn(\delta)$.

Якщо $\vdash p\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\delta) = T$; якщо $\dashv p\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\delta) = F$.

Якщо $\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(r^{\bar v}_{\bar x}(\delta)) = T$; якщо $\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(r^{\bar v}_{\bar x}(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів задаємо довільним чином, беручи до уваги обмеження щодо строго неістотності: для всіх $d, h\in{}^{V}\!A$ таких, що $d\|{-}\nu(p) = h\|{-}\nu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$. Це гарантує, що імена $y\in\nu(p)$ строго неістотні для p_A. Таким чином, значення базових предикатів визначені коректно.

Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення модельної множини $\boldsymbol{H}$.

Для атомарних формул і формул вигляду $R^{\bar v}_{\bar x}(p)$ твердження 1) та 2) теореми випливають із наведеного визначення значень базових предикатів. Доведемо для прикладу крок індукції для п. H∃R.

Нехай $\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H∃R тоді існує $y\in W$ таке, що $\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $(R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi))_A(\delta) = T$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar u\mapsto\delta(\bar v)\nabla x\mapsto\delta(y)) = T$. Проте $\delta(y)\downarrow$ згідно з $\delta\in{}^{W}\!A$ та $y\in W$, тому для $a=\delta(y)$ отримуємо $\Phi_A(\delta\nabla\bar u\mapsto\delta(\bar v)\nabla x\mapsto a) = T$, що дає $(\exists x\Phi)_A(r^{\bar u}_{\bar v}(\delta)) = T$, звідки $(R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))_A(\delta) = T$.

Нехай $\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H∃R для всіх $y\in W$ маємо $\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $(R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\Phi))_A(\delta) = F$ для всіх $y\in W$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar u\mapsto\delta(\bar v)\nabla x\mapsto\delta(y)) = F$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\delta\in{}^{W}\!A$, маємо $\delta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк δ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\Phi_A(\delta\nabla\bar u\mapsto\delta(\bar v)\nabla x\mapsto b) = F$ для всіх $b\in A$, тому для всіх $b\in A$ маємо $(\exists x\Phi)_A(r^{\bar u}_{\bar v}(\delta)) = F$, звідки $(R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))_A(\delta) = F$.

На основі теореми 9 отримуємо теорему повноти для *QSC*-числень.

Теорема 10 (повноти). *Нехай* $\Gamma \models \Delta$. *Тоді секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна.*

Доведення. Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна. Якщо $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна, то секвенційне дерево δ для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ незамкнене. Отже, в δ існує незамкнений шлях $\wp$. Нехай $\boldsymbol{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Така $\boldsymbol{H}$ – модельна. Згідно з теоремою 9 існує контрмодель ($\boldsymbol{A}$, δ), тобто *АС* $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $\delta \in {}^{V}\!A$ такі: $\vdash\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\dashv\text{Ш} \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \text{Ш}_A(\delta) = F$. Згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ тоді для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$ та для всіх $\text{Ш} \in \Delta$ маємо $\text{Ш}_A(\delta) = F$. Це суперечить $\Gamma \models \Delta$.

Висновки. В роботі досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних квазіарних предикатів. Запропоновано розширення логіки спеціальними 0-арними композиціями – предикатами-індикаторами, які визначають наявність значення для предметних імен. На цій основі для таких розширених логік побудовано числення секвенційного типу, для збудованих числень доведено теореми коректності та повноти. Побудову секвенційних числень на основі використання спеціальних предикатів-індикаторів планується продовжити для логік неоднозначних квазіарних предикатів.

1. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. – 1999, № 1. 2. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. 3. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010. № 1. 4. *Шкільняк С.С.* Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2011, № 4. 5. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Першопорядкові композиційно-номінативні логіки // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011, Вип. 4. 6. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и сист. анализ. – 2010. – № 6. 7. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2012, № 2–3. 8. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки кванторно-екваційного рівня // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: кібернетика. – 2011, Вип. 11. 9. *Nikitchenko M.*, *Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 0137. – Springer, 2012. 10. *Клини С.* Математическая логика.– М.; 1973. 11. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М., 1996.

Надійшла до редколегії 29.08.12

УДК 519.21

О. Прищепа , асп.

ГІСТЕРЕЗИСНІ СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ ІНТЕНСИВНІСТЮ ВХІДНОГО ПОТОКУ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ М/М/1 З ОДНІЄЮ СПРОБОЮ ПОВТОРУ

Досліджується стохастична система з одним приладом та однією спробою повтору, для якої розглянуто проблему оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій. Для процесу обслуговування вимог у такій системі досліджено стаціонарний режим, отримано рекурентні формули для стаціонарних імовірностей.

An one-channel stochastic system with one repeat attempt is examined in the paper. An optimal control problem of input rate for this system is considered. For service process of calls in the systems stationary regime is investigated and recurrent formulas for stationary probability are given.

Вступ. Серед стохастичних систем масового обслуговування особливе місце займають системи з повторними викликами, які мають широку сферу застосування. Зокрема, це комп'ютерні мережі (локальні та глобальні), системи керування посадкою повітряних суден, системи мобільного зв'язку. Принцип роботи систем масового обслуговування з повторними викликами наступний. Ззовні до системи надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів. Це означає, що через деякий час повторюється спроба зайняти вільний прилад та отримати обслуговування. Результати досліджень таких систем подано у роботах [2],[4]. В роботах [1],[3] проведено порівняльний аналіз класичних систем масового обслуговування та систем з повторними викликами. При дослідженні систем з повторними викликами покладають, що вимога може повторно звертатися до системи до тих пір, поки не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що число повторних спроб часто буває обмеженим. Зокрема, в роботах [5], [8], [9] розглянуто саме системи з обмеженим числом повторних спроб отримати обслуговування, дослідження яких є досить актуальним на даний час, особливо з точки зору оптимізації їх роботи.

В роботі, що пропонується, розглядається система типу $M/M/1$ з однією спробою повтору (рис.1).

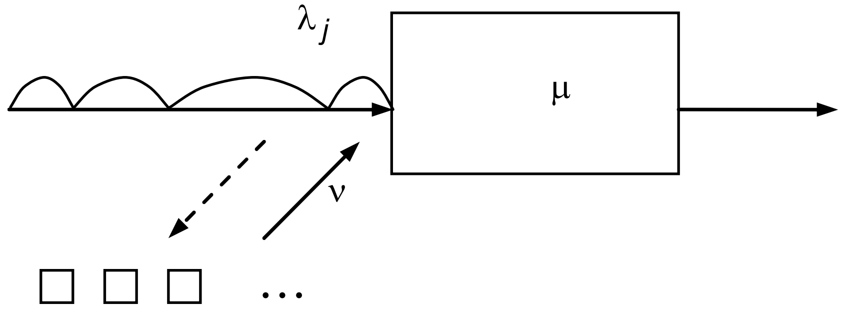

Рис. 1. Структура стохастичної системи з однією спробою повтору

Формально дану систему можна описати наступним чином (див., наприклад, [5], [9]). Ззовні до системи надходять вимоги, які за умови наявного вільного приладу обслуговуються. В іншому випадку формують джерела повторних викликів, звідки повторно можуть опитати систему лише один раз. Якщо при повторному зверненні вимоги, що утворила джерело повторних викликів, прилад є зайнятий, то вона залишає систему. Параметрами моделі є наступні: μ – інтенсивність обслуговування, ν – інтенсивність повторних опитувань, λ_j, $j = 0,1,\ldots$ – інтенсивність вхідного