Теорема 10 (повноти). *Нехай* $\Gamma \models \Delta$. *Тоді секвенція* $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ *вивідна.*

Доведення. Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна, то секвенційне дерево δ для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ незамкнене. Отже, в δ існує незамкнений шлях $\wp$. Нехай $\boldsymbol{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Така $\boldsymbol{H}$ – модельна. Згідно з теоремою 9 існує контрмодель ($\boldsymbol{A}$, δ), тобто *АС* $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $\delta \in {}^{V}A$ такі: $_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $_{\dashv}Ш \in \boldsymbol{H} \Rightarrow Ш_A(\delta) = F$. Згідно з $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ тоді для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$ та для всіх $Ш \in \Delta$ маємо $Ш_A(\delta) = F$. Це суперечить $\Gamma \models \Delta$.

Висновки. В роботі досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних квазіарних предикатів. Запропоновано розширення логіки спеціальними 0-арними композиціями – предикатами-індикаторами, які визначають наявність значення для предметних імен. На цій основі для таких розширених логік побудовано числення секвенційного типу, для збудованих числень доведено теореми коректності та повноти. Побудову секвенційних числень на основі використання спеціальних предикатів-індикаторів планується продовжити для логік неоднозначних квазіарних предикатів.

1. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. – 1999, № 1. 2. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. 3. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010. № 1. 4. *Шкільняк С.С.* Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2011, № 4. 5. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Першопорядкові композиційно-номінативні логіки // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011, Вип. 4. 6. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и сист. анализ. – 2010. – № 6. 7. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2012, № 2–3. 8. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки кванторно-екваційного рівня // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: кібернетика. – 2011, Вип. 11. 9. *Nikitchenko M.*, *Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 0137. – Springer, 2012. 10. *Клини С.* Математическая логика.– М.; 1973. 11. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М., 1996.

Надійшла до редколегії 29.08.12

УДК 519.21

О. Прищепа , асп.

ГІСТЕРЕЗИСНІ СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ ІНТЕНСИВНІСТЮ ВХІДНОГО ПОТОКУ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ M/M/1 З ОДНІЄЮ СПРОБОЮ ПОВТОРУ

Досліджується стохастична система з одним приладом та однією спробою повтору, для якої розглянуто проблему оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій. Для процесу обслуговування вимог у такій системі досліджено стаціонарний режим, отримано рекурентні формули для стаціонарних імовірностей.

An one-channel stochastic system with one repeat attempt is examined in the paper. An optimal control problem of input rate for this system is considered. For service process of calls in the systems stationary regime is investigated and recurrent formulas for stationary probability are given.

Вступ. Серед стохастичних систем масового обслуговування особливе місце займають системи з повторними викликами, які мають широку сферу застосування. Зокрема, це комп'ютерні мережі (локальні та глобальні), системи керування посадкою повітряних суден, системи мобільного зв'язку. Принцип роботи систем масового обслуговування з повторними викликами наступний. Ззовні до системи надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів. Це означає, що через деякий час повторюється спроба зайняти вільний прилад та отримати обслуговування. Результати досліджень таких систем подано у роботах [2],[4]. В роботах [1],[3] проведено порівняльний аналіз класичних систем масового обслуговування та систем з повторними викликами. При дослідженні систем з повторними викликами покладають, що вимога може повторно звертатися до системи до тих пір, поки не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що число повторних спроб часто буває обмеженим. Зокрема, в роботах [5], [8], [9] розглянуто саме системи з обмеженим числом повторних спроб отримати обслуговування, дослідження яких є досить актуальним на даний час, особливо з точки зору оптимізації їх роботи.

В роботі, що пропонується, розглядається система типу $M/M/1$ з однією спробою повтору (рис.1).

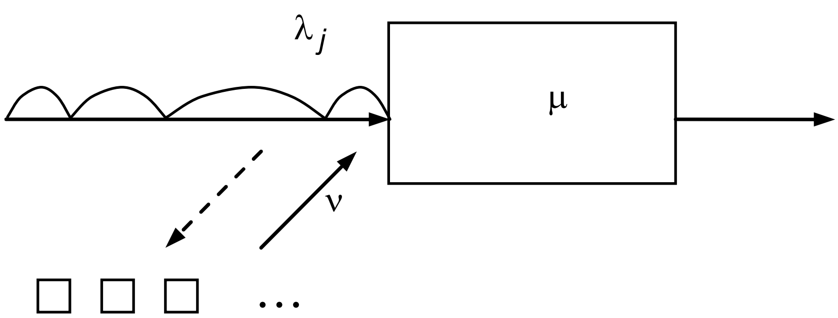

Рис. 1. Структура стохастичної системи з однією спробою повтору

Формально дану систему можна описати наступним чином (див., наприклад, [5], [9]). Ззовні до системи надходять вимоги, які за умови наявного вільного приладу обслуговуються. В іншому випадку формують джерела повторних викликів, звідки повторно можуть опитати систему лише один раз. Якщо при повторному зверненні вимоги, що утворила джерело повторних викликів, прилад є зайнятий, то вона залишає систему. Параметрами моделі є наступні: μ – інтенсивність обслуговування, ν – інтенсивність повторних опитувань, λ_j, $j = 0,1,\ldots$ – інтенсивність вхідного потоку, що залежить від числа джерел повторних викликів. Враховуючи змінний характер інтенсивності надходження вимог, в даній роботі розглядається проблема оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій. Оптимізація роботи даної системи в класі порогових стратегій була розглянута в роботі [9].

Процес керування інтенсивністю вхідного потоку на основі гістерезисної стратегії можна описати наступним чином. Фіксуються два невід'ємних цілих числа H_1 та H_2, які називаються порогами, $H_1 \le H_2$. Якщо в деякий момент часу кількість повторних викликів в системі не перевищує H_1, то вона функціонує в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_1. Якщо кількість повторних викликів більша за H_2, то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку . Якщо кількість повторних викликів лежить у проміжку $\left(H_1, H_2\right]$, то система зберігає той режим, в якому вона функціонувала в попередній момент часу.

Стан системи в будь-який момент часу t при фіксованій стратегії $\left(H_1, H_2\right]$ може бути описаний тривимірним процесом $Q(t,H_1,H_2) = \left(Q_1(t,H_1,H_2), Q_2(t,H_1,H_2), R(t,H_1,H_2)\right)$, де $Q_1(t,H_1,H_2)$ – кількість зайнятих приладів, $Q_2(t,H_1,H_2)$ – кількість джерел повторних викликів, $R(t,H_1,H_2)$ – режим роботи системи. Якщо $R(t,H_1,H_2) = 1$, то система працює в першому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_1. Якщо $R(t,H_1,H_2) = 2$, то система працює в другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_2. Процес $Q(t,H_1,H_2)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S = S^1 \cup S^2$, $S^1 = \left\{i = \left(i_1, i_2, 1\right) : i_1 = 0,1;\ i_2 = 0,\ldots,H_2\right\}$, $S^2 = \left\{i = \left(i_1, i_2, 2\right) : i_1 = 0,1;\ i_2 = H_1+1,\ldots\right\}$, $S^1 \cap S^2 = \varnothing$.

Для заданих параметрів $\mu, \nu, h_1, h_2 > 0$ інфінітезимальні характеристики $b_{(i,j,r)(i',j',r')}$, $\left(i,j,r\right), \left(i',j',r'\right) \in S$ визначаються наступним чином:

якщо $\left[\left(i=0\right) \wedge \left(j \in \{0,\ldots,H_2\}\right) \wedge \left(r=1\right)\right] \vee \left[\left(i=0\right) \wedge \left(j \in \{H_1+2,\ldots\}\right) \wedge \left(r=2\right)\right]$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_r, & \textit{при } (i',j',r') = (i+1,j,r); \\ j\ \nu, & \textit{при } (i',j',r') = (i+1,j-1,r); \\ -(h_r + j\ \nu), & \textit{при } (i',j',r') = (i,j,r); \\ 0, & \textit{в іншому випадку}; \end{cases}$$

якщо $\left[\left(i=1\right) \wedge \left(j \in \{0,\ldots,H_2-1\}\right) \wedge \left(r=1\right)\right] \vee \left[\left(i=1\right) \wedge \left(j \in \{H_1+2,\ldots\}\right) \wedge \left(r=2\right)\right]$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_r, & \text{при } (i',j',r') = (i,j+1,r); \\ j\nu, & \text{при } (i',j',r') = (i,j-1,r); \\ \mu, & \text{при } (i',j',r') = (i-1,j,r); \\ -(h_r + j\ \nu + \mu), & \text{при } (i',j',r') = (i,j,r); \\ 0, & \text{в іншому випадку}; \end{cases}$$

якщо $(i,j,r) = \left(1, H_2, 1\right)$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_1, & \text{при } (i',j',r') = (1,H_2+1,2); \\ H_2\ \nu, & \text{при } (i',j',r') = (1,H_2-1,1); \\ \mu, & \text{при } (i',j',r') = (0,H_2,1); \\ -(h_1 + H_2\ \nu + \mu), & \text{при } (i',j',r') = (i,j,r); \\ 0, & \text{в іншому випадку}; \end{cases}$$

якщо $(i,j,r) = \left(0, H_1+1, 2\right)$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_2, & \text{при } (i',j',r') = (1,H_1+1,2); \\ (H_1+1)\ \nu, & \text{при } (i',j',r') = (1,H_1,1); \\ -(h_2 + (H_1+1)\ \nu), & \text{при } (i',j',r') = (i,j,r); \\ 0, & \text{в іншому випадку}; \end{cases}$$

якщо $(i,j,r) = \left(1, H_1+1, 2\right)$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_2, & \text{при } (i',j',r') = (1,H_1+2,2); \\ (H_1+1)\ \nu, & \text{при } (i',j',r') = (1,H_1,1); \\ \mu, & \text{при } (i',j',r') = (0,H_1+1,2); \\ -(h_2 + (H_1+1)\ \nu + \mu), & \text{при } (i',j',r') = (i,j,r); \\ 0, & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Графічно процес зміни станів ланцюга Маркова $Q(t,H_1,H_2)$ можна представити за допомогою діаграми переходів, яку подано на рис. 2.

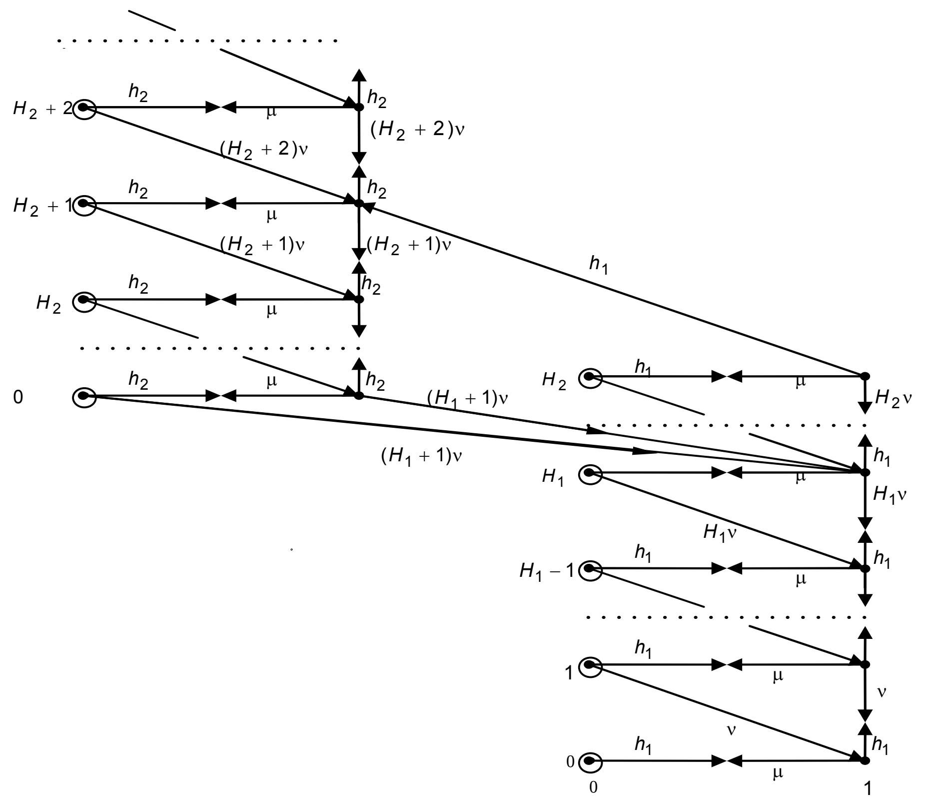

Рис. 2. Діаграма переходів ланцюга Маркова $Q(t,H_1,H_2)$

Позначимо $\pi_{0j}^{(r)}(H_1,H_2)$, $\pi_{1j}^{(r)}(H_1,H_2)$, $r=1,2$, $j=0,1,...$ стаціонарні ймовірності системи. У подальшому для скорочення викладок будемо використовувати позначення $\pi_{0j}^{(r)}$, $\pi_{1j}^{(r)}$, опускаючи індекси (H_1,H_2).

Головна мета роботи – вивчення умов існування стаціонарного режиму для $Q(t,H_1,H_2)$ та побудова розрахункових формул для стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij}^{(r)}$, $(i,j,r)\in S$.

Теорема 1. Якщо параметри моделі типу $M/M/1$ з однією спробою повтору та керованою інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій є невироджені $h_1,h_2,\mu,\nu>0$, то для процесу обслуговування $Q(t,H_1,H_2)$, $t\ge 0$ існує стаціонарний режим і стаціонарні ймовірності можна подати у вигляді:

$$\pi_{00}^{(1)}=\frac{\mu}{h_1}\pi_{10}^{(1)},\ \pi_{0j}^{(1)}=\frac{\mu\alpha_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)}}{h_1+j\nu},\ \pi_{1j}^{(1)}=\alpha_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)},\ j=1,...,H_1,$$

$$\pi_{0j}^{(1)}=\frac{\mu}{h_1+j\nu}\left[\alpha_j^{(1)}-\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right]\pi_{10}^{(1)},\ \pi_{1j}^{(1)}=\left[\alpha_j^{(1)}-\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right]\pi_{10}^{(1)},\ j=H_1+1,...,H_2,$$

$$\pi_{0H_1+1}^{(2)}=\frac{h_1\mu\alpha_{H_2}^{(1)}}{(H_1+1)(\mu+h_2+(H_1+1)\nu)(\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)})}\pi_{10}^{(1)},$$

$$\pi_{1H_1+1}^{(2)}=\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}(h_2+(H_1+1)\nu)}{(H_1+1)(\mu+h_2+(H_1+1)\nu)(\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)})}\pi_{10}^{(1)},$$

$$\pi_{0j}^{(2)}=\frac{\mu h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(2)}}{(h_2+j\nu)(\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)})}\pi_{10}^{(1)},\ \pi_{1j}^{(2)}=\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(2)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\pi_{10}^{(1)},\ j=H_1+2,...,H_2+1,$$

$$\pi_{0j}^{(2)}=\frac{\mu\alpha_j^{(2)}h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{(h_2+j\nu)\alpha_{H_2+1}^{(2)}\left(\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}^{(1)},\ \pi_{1j}^{(2)}=\frac{\alpha_j^{(2)}h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1}^{(2)}\left(\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}^{(1)},\ j=H_2+2,...,$$

де
$$\pi_{10}^{(1)}=\left[\frac{\mu+h_1}{h_1}+\sum_{j=1}^{H_1}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\alpha_j^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{H_2}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\left(\alpha_j^{(1)}-\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\left(\frac{1}{H_1+1}+\sum_{j=H_1+2}^{H_2+1}\frac{\beta_{j,H_1+1}^{(2)}\left(h_2+\mu+j\nu\right)}{h_2+j\nu}+\sum_{j=H_2+2}^{\infty}\frac{\left(h_2+\mu+j\nu\right)\alpha_j^{(2)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1,}^{(2)}\left(h_2+j\nu\right)}\right)\right]^{-1},$$
$$\alpha_j^{(r)}=\frac{h_r^j}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{h_r+(j-k)\nu}{h_r+\mu+(j-k)\nu},\ r=1,2,$$
$$\beta_{jm}^{(r)}=\sum_{i=0}^{j-m}\frac{(j-i-1)!h_r^i}{j!\nu^i}\prod_{k=0}^{i}\frac{h_r+(j-k)\nu}{h_r+\mu+(j-k)\nu},\ r=1,2.$$

Доведення. Для того, щоб довести існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування $Q(t,H_1,H_2)$, $t\ge 0$ застосуємо теорему Твіді [4]. Розглянемо
$$\phi(i,j,r)=ai+j+r\ ,\ (i,j,r)\in S$$
в якості тест-функцій Ляпунова, де параметр a буде визначено пізніше.

Якщо показати, що параметр a можна вибрати так, щоб середній перенос для цих функцій, який визначається формулою
$$y_{ijr}=\sum_{(i',j',r')\ne(i,j,r)}b_{(i,j,r)(i',j',r')}\left(\phi(i',j',r')-\phi(i,j,r)\right),$$
буде рівномірно менше нуля відносно j, за винятком, можливо скінченної кількості точок (i,j,r), то виконуються умови теореми Твіді.

Таким чином, якщо врахувати вигляд інфінітезимальних характеристик ланцюга Маркова $Q(t,H_1,H_2)$, то достатньо обмежитись випадками 1) при $i=0$, $j=H_1+2,\dots$, $r=2$ та 2) при $i=1$, $j=H_1+2,\dots$, $r=2$, оскільки в інших випадках число точок (i,j,r) є скінченним.

Для даних випадків середній перенос визначається наступним чином:
$$y_{ijr}=\begin{cases}ah_2+j\nu(a-1), \text{при } i=0\ ,\ j=H_1+2,\dots\ ,\ r=2;\\ h_2-j\nu-a\mu, \quad \text{при } i=1\ ,\ j=H_1+2,\dots\ ,\ r=2.\end{cases}$$

Отже, $y_{0j2}=ah_2+j\nu(a-1)<0$ для $a<\dfrac{j\nu}{h_2+j\nu}$ та $y_{1j2}=h_2-j\nu-a\mu<0$ для $a>\dfrac{h_2-j\nu}{\mu}$.

Таким чином, для будь-яких $h_1,h_2,\mu,\nu>0$ можна вказати таке $a<1$, при якому будуть виконуватись умови теореми Твіді для тест-функцій, що розглядаються. Отже, процес обслуговування $Q(t,H_1,H_2)$ є регулярним, ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним розподілом.

Для пошуку стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij}^{(r)}$, $r=1,2$ використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі ([10], стор. 49). Для кожного $j=0,1,\dots,H_2$ побудуємо розбиття фазового простору $S=S_{0j}^{(1)}\cup\bar{S}_{0j}^{(1)}$, де $S_{0j}^{(1)}=\{(0,j,1)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_{0j}^{(1)}$, знаходимо
$$\left(h_1+j\nu\right)\pi_{0j}^{(1)}=\mu\pi_{1j}^{(1)},\ j=0,1,\dots,H_2. \tag{1}$$

Для кожного $j=H_1+1,\dots$ побудуємо розбиття фазового простору $S=S_{0j}^{(2)}\cup\bar{S}_{0j}^{(2)}$, де $S_{0j}^{(2)}=\{(0,j,2)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_{0j}^{(2)}$, знаходимо
$$\left(h_2+j\nu\right)\pi_{0j}^{(2)}=\mu\pi_{1j}^{(2)},\ j=H_1+1,\dots \tag{2}$$

Тепер для $j=0,1,\dots,H_2$ побудуємо розбиття фазового простору $S=S_j^{(1)}\cup\bar{S}_j^{(1)}$, $S_j^{(1)}=\{(i,m,1):m\le j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}$, отримаємо наступну систему рівнянь
$$j\nu\pi_{0j}^{(1)}+j\nu\pi_{1j}^{(1)}=h_1\pi_{1j-1}^{(1)},\ j=1,\dots,H_1, \tag{3}$$
$$j\nu\pi_{0j}^{(1)}+j\nu\pi_{1j}^{(1)}+(H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)}+(H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}=h_1\pi_{1j-1}^{(1)},\ j=H_1+1,\dots,H_2, \tag{4}$$
$$(H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)}+(H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}=h_1\pi_{1H_2}^{(1)}, \tag{5}$$

Для $j = H_1 + 1,...$ побудуємо розбиття фазового простору $S = S_j^{(2)} \cup \bar{S}_j^{(2)}$, де $S_j^{(2)} = \{(i,m,2): H_1 + 1 \le m \le j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}$, отримаємо наступну систему рівнянь

$$j\nu\pi_{0j}^{(2)} + j\nu\pi_{1j}^{(2)} = h_2\pi_{1j-1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)},\ j = H_1+2,...,H_2+1, \tag{6}$$

$$j\nu\pi_{0j}^{(2)} + j\nu\pi_{1j}^{(2)} + h_1\pi_{1H_2}^{(1)} = h_2\pi_{1j-1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)},\ j = H_2+2,... \tag{7}$$

Використовуючи рівняння (1), подамо $\pi_{0j}^{(1)}$ через $\pi_{1j}^{(1)}$:

$$\pi_{0j}^{(1)} = \frac{\mu}{h_1 + j\nu}\pi_{1j}^{(1)},\ j = 1,...,H_1,$$

Дане подання підставляємо у (3). Отримаємо рекурентне співвідношення для $\pi_{1j}^{(1)}$, що визначається через $\pi_{10}^{(1)}$:

$$\pi_{1j}^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)},\ j = 1,...,H_1, \tag{8}$$

де $\alpha_j^{(1)} = \frac{h_1^j}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{h_1 + (j-k)\nu}{h_1 + \mu + (j-k)\nu}$.

Враховуючи рівняння (1), (2), підставляємо результат (8) у рівняння (4), отримаємо рекурентне співвідношення для $\pi_{1j}^{(1)}$, $j = H_1+1,...,H_2$, яке виражається через $\pi_{10}^{(1)}$ та $\pi_{1H_1+1}^{(2)}$,

$$\pi_{1j}^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)} - \frac{(H_1+1)(h_2 + \mu + (H_1+1)\nu)}{h_2 + (H_1+1)\nu}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}\pi_{1H_1+1}^{(2)},\ j = H_1+1,...,H_2, \tag{9}$$

де $\beta_{jm}^{(1)} = \sum_{i=0}^{j-m}\frac{(j-i-1)!h_1^i}{j!\nu^i}\prod_{k=0}^{i}\frac{h_1 + (j-k)\nu}{h_1 + \mu + (j-k)\nu}$.

Щоб отримати $\pi_{1H_2}^{(1)}$, в рекурентному співвідношенні (9) покладемо $j = H_2$. Підставляючи в рівняння (5) значення $\pi_{1H_2}^{(1)}$, знайдемо представлення для $\pi_{1H_1+1}^{(2)}$:

$$\pi_{1H_1+1}^{(2)} = \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}(h_2 + (H_1+1)\nu)}{(H_1+1)(\mu + h_2 + (H_1+1)\nu)(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)})}\pi_{10}^{(1)}. \tag{10}$$

Враховуючи (9), (10), можемо подати в рекурентній формі ймовірності $\pi_{1j}^{(1)}$, $j = H_1+1,...,H_2$ через $\pi_{10}^{(1)}$:

$$\pi_{1j}^{(1)} = \left[\alpha_j^{(1)} - \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right]\pi_{10}^{(1)},\ j = H_1+1,...,H_2. \tag{11}$$

Використовуючи рівняння (2), (6), (10), маємо також рекурентні співвідношення для $\pi_{1j}^{(2)}$, $j = H_1+2,...,H_2+1$:

$$\pi_{1j}^{(2)} = \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(2)}}{\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\pi_{10}^{(1)}, \tag{12}$$

де $\beta_{jm}^{(2)} = \sum_{i=0}^{j-m}\frac{(j-i-1)!h_2^i}{j!\nu^i}\prod_{k=0}^{i}\frac{h_2 + (j-k)\nu}{h_2 + \mu + (j-k)\nu}$.

У свою чергу можна отримати рекурентне співвідношення для $\pi_{1j}^{(2)}$, $j = H_2+2,...$, якщо скористатися рівнянням (7) та врахувати результат (12) при $j = H_2+1$:

$$\pi_{1j}^{(2)} = \frac{\alpha_j^{(2)}h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1}^{(2)}\left(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}^{(1)},$$

де $\alpha_j^{(2)} = \frac{h_2^j}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{h_2 + (j-k)\nu}{h_2 + \mu + (j-k)\nu}$.

Використовуючи рівняння (1), (2) можна отримати стаціонарні ймовірності $\pi_{0j}^{(1)}$, $j = 0,...,H_2$ та $\pi_{0j}^{(2)}$, $j = H_1+1,...$.

Вираз для $\pi_{10}^{(1)}$ знаходимо з умови нормування: $\sum_{j=0}^{H_2}\left(\pi_{0j}^{(1)}+\pi_{1j}^{(1)}\right)+\sum_{j=H_1+1}^{\infty}\left(\pi_{0j}^{(2)}+\pi_{1j}^{(2)}\right)=1$.

Таким чином,

$$\pi_{10}^{(1)}=\left[\frac{\mu+h_1}{h_1}+\sum_{j=1}^{H_1}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\alpha_j^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{H_2}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\left(\alpha_j^{(1)}-\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\left(\frac{1}{H_1+1}+\sum_{j=H_1+2}^{H_2+1}\frac{\beta_{j,H_1+1}^{(2)}\left(h_2+\mu+j\nu\right)}{h_2+j\nu}+\sum_{j=H_2+2}^{\infty}\frac{\left(h_2+\mu+j\nu\right)\alpha_j^{(2)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1,}^{(2)}\left(h_2+j\nu\right)}\right)\right]^{-1}.$$

Теорему доведено.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в даній моделі дає можливість ставити і розв'язувати для неї оптимізаційні задачі.

В роботі розглядається оптимізаційна задача

$$C_1S_1(H_1,H_2)-C_2S_2(H_1,H_2)-C_3S_3(H_1,H_2)\to\max \tag{13}$$

$$H_1,H_2\in\{0,1,...\},\ H_1\le H_2,$$

де $\lim_{t\to\infty}t^{-1}S_i(t,H_1,H_2)=S_i(H_1,H_2)$ ($i=\overline{1,3}$); $S_1(t,H_1,H_2)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t в першому та другому режимах; $S_2(t,H_1,H_2)$ – число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t,H_1,H_2)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику в першому та другому режимах; C_2 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

В умовах існування стаціонарного режиму функціонали $S_i(H_1,H_2)=\lim_{t\to\infty}t^{-1}S_i(t,H_1,H_2)$, $i=\overline{1,3}$ існують і можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$S_1(H_1,H_2)=\sum_{j=0}^{H_2}\mu\pi_{1j}^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{\infty}\mu\pi_{1j}^{(2)},$$

$$S_2(H_1,H_2)=\sum_{j=0}^{H_2}h_1\pi_{1j}^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{\infty}h_2\pi_{1j}^{(2)},$$

$$S_3(H_1,H_2)=h_1\pi_{1H_2}^{(1)}+\left(H_1+1\right)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)}+\left(H_1+1\right)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}.$$

Розв'язком задачі (13) є такі пороги H_1,H_2, які максимізують середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [6], [7], [9].

В якості прикладу розглянемо задачу оптимізації системи масового обслуговування з наступними характеристиками: $h_1=8$, $h_2=1$, $\mu=1$, $\nu=5$. Вартісні коефіцієнти функціоналу якості: $C_1=1000$, $C_2=23$, $C_3=3$. На рис. 3 представлено графік залежності функціоналу якості від гістерезисної стратегії H_1,H_2. Максимальний прибуток 907,96 досягається при $H_1=1$, $H_2=7$.

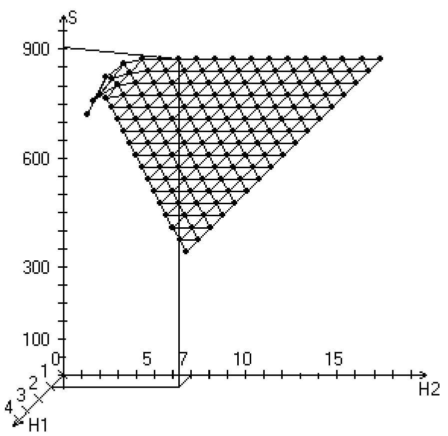

Рис. 3. Залежність прибутку від порогів

1. Anisimov V.V. and Artalejo J.R. Approximation of multiserver retrial queues by means of generalized truncated models. Top (2002), vol. 10, Num.1 (2002), pp. 51–66. 2. ArtalejoJ.R., Gymez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. – Springer, 2008, 318 p. 3. Artalejo J.R. and Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. Revista matemґatica complutense (2002) vol. XV, num. 1, pp.101–129. 4. Falin G. I. and Templeton J. G. C.Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p. 5. Shin Y.W., Moon D.H. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations. In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08), Lijiang, China; October 31-November 3, 2008, pp. 237–247. 6. Дудин А.Н., Клименок В.И. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети. // Автоматика и вычислительная техника. – 1991. – № 2. – С. 25–31. 7. Клименок В.И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами. // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 1.– С. 25–30. 8. Лебєдєв Є.О., Прищепа О.В. Стохастичні системи із повторними викликами та нетерплячими вимогами. Вісник Київського університету. Серія фіз.–мат.науки –Вип. 2, 2007. – С.169–173. 9. Лебєдєв Є.О., Прищепа О.В. Системи з повторними викликами, нетерплячими вимогами та керованим вхідним потоком.// Журнал Обчислювальної та прикладної математики, Вип. 2(95), 2007. – С. 59–64. 10. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. - М.: Мир, 1993. – 336 с.

Надійшла до редколегії 17.10.11

УДК 517.929

Т. И. Шакотько , инж., Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, проф.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ ВОЛЬТЕРРА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрено математические модели динамики популяции, которые описаны двумя дифференциальными уравнениями с квадратичной правой частью. Вычислены точки спокойствия, определен их тип. Введено запаздывание. Показано, что стационарное состояние равновесия неустойчивое. Приведены результаты численного моделирования.

The mathematical models of the population dynamics are considered wich are described by two differential equations with quadratic right side. Calculated stationary points and specified their type. We get the delay. The stationary state of equilibrium position is unstable are shown. The results of numerical modeling are shown.

Введение. Рассмотрим математическую модель популяции, предложенную В.Вольтерра [1–3]. Она представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздыванием с квадратичной правой частью. Построим фазовые портреты систем без запаздывание. Далее рассмотрим влияние запаздывания [4–6]. Учитывая специфику уравнений с последействием, построение фазового портрета системы с запаздыванием вызывает затруднение. Поэтому фазовый портрет системы с запаздыванием строится в предположении, что начальные условия для решений системы с запаздыванием представляют собой постоянные значения ("система с замороженными начальными условиями").

1. Построение фазового портрета системы. Построение фазового портрета нелинейной системы на плоскости будет проводиться следующим образом.

- Находятся особые точки.
- Строятся фазовые портреты каждой из особых точек в отдельности.
- Находятся периодические решения (циклы) и строятся их фазовые портреты.
- Производится "сшивание" отдельных фазовых портретов в фазовый портрет системы в целом.

Следует отметить, если для нахождения особых точек требуется решать системы нелинейных (квадратичных) уравнений, то конструктивные алгоритмы нахождения периодических траекторий отсутствуют. Фазовый портрет в окрестности особой точки $O_0(x_0,y_0)$ строится методом линеаризации. Пусть исходная нелинейная система имеет вид

$$\dot{x} = P(x,y), \ \dot{y} = Q(x,y).$$

Нелинейные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в окрестности особой точки $O_0(x_0,y_0)$ раскладывают в ряд с точностью линейного приближения

$$\dot{x} = P(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + R_1(x,y)$$

$$\dot{y} = Q(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + R_2(x,y).$$

Поскольку $O_0(x_0,y_0)$ особая точка, то $P(x_0,y_0)=0$ и $Q(x_0,y_0)=0$. Обозначив

$$\left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = a_0, \ \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = b_0, \ \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = c_0, \ \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = d_0$$

и отбросив нелинейные члены, получаем систему, линейного приближения в точке $O_0(x_0,y_0)$

$$\dot{x} = a_0(x-x_0) + b_0(y-y_0), \ \dot{y} = c_0(x-x_0) + d_0(y-y_0), \tag{1.1}$$

или

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_0 z(t), \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Если собственные числа линеаризованной системы имеют ненулевые действительные части, то в достаточно малой окрестности положения равновесия $O(x_0,y_0)$ фазовый портрет линеаризованной системы топологически эквивалентен фазовому портрету исходной нелинейной системы [7].