УДК 004.42:510.69

О. С. Шкільняк, канд. фіз.мат.наук, асист.

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ МУЛЬТИМОДАЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК

Досліджуються першопорядкові композиційно-номінативні мультимодальні логіки. Для таких логік кванторного рівня запропоновано числення секвенційного типу. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

In this paper first-order composition-nominative multimodal logics are studied. For the defined logics of quantifier level we introduce sequent calculi. Soundness and completeness theorems are proved for these calculi.

Модальні логіки успішно використовуються для опису і побудови сучасних інформаційних і програмних систем. Апарат темпоральних логік ефективно застосовується для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. На базі таких логік збудовано низку систем та мов специфікації. Епістемічні логіки використовуються для опису інтелектуальних систем, баз даних і баз знань. Можливості традиційних модальних логік і композиційно-номінативних логік квазіарних часткових предикатів [1] поєднують композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [2]. Центральним для КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). На основі спеціального уточнення цього поняття збудовано та досліджено [3–5] нові класи КНМЛ. Враховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, дуже важливим класом КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС), які описують переходи від одного стану світу до іншого. Вони лежать в основі транзиційних КНМЛ, у межах яких природним чином можуть розглядатися традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні тощо.

ТМС – це об'єкт вигляду $((\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C), Fm, Jm)$. Тут $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу; $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на станах вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$, Pr – множина предикатів на даних станів світу; C – множина композицій на Pr; Fm – множина формул мови; Jm – відображення інтерпретації формул в станах світу.

Для КНМЛ номінативних рівнів $\boldsymbol{S}$ конкретизуємо як множину неокласичних [1] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$.

Тоді $Pr = \bigcup\limits_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ – множина предикатів усіх станів світу, $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$ – множина усіх базових даних світу.

Нові класи ТМС – мультимодальні транзиційні системи (ММС) – запропоновано в [5]. ММС – це ТМС із $\boldsymbol{R} = \{\rhd_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, у яких кожному $\rhd_i$ зіставлено відповідну $\mathbf{K}_i$.

Окремим випадком ММС є загальні ТМС, для них $\boldsymbol{R} = \{\rhd\}$ та маємо єдину базову модальну композицію $\Box$.

Метою даної статті є дослідження мультимодальних логік еквітонних предикатів кванторного рівня та побудова для них числень секвенційного типу. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

Невизначені в статті поняття будемо тлумачити в сенсі робіт [1, 4].

Мова та семантичні властивості мультимодальних логік. Опишемо мову мультимодальних логік (ММЛ) кванторного рівня. Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів; символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина $Ms = \{K_i \mid i \in I\}$ символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно:

FA) кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

FP) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формула;

FR) нехай Φ – формула; тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – формула;

F∃) нехай Φ – формула; тоді $\exists x\Phi$ – формула;

FM) нехай Φ – формула, $K_i \in Ms$; тоді $K_i\Phi$ – формула.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $Im : Ps \times S \to Pr$, при цьому $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Таке Im продовжимо до відображення інтерпретації формул на світах $Jm : Fm \times S \to Pr$. При цьому $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$.

IA) $Jm(p, \alpha) = Im(p, \alpha)$ для кожного $p \in Ps$;

IP) $Jm(\neg\Phi, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$; $Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$;

IR) $Jm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi, \alpha) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Jm(\Phi, \alpha))$;

I∃) $Jm(\exists x\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках;} \end{cases}$

IM) $Jm(K_i\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S \text{ таких, що } \alpha \rhd_i \delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta \in S:\ \alpha \rhd_i \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$

Якщо для стану α не існує такого β, що $\alpha \rhd_i \beta$, то $Jm(K_i\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^{V}A$.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, будемо позначати Φ_α.

Залежно від того, як визначити $\Phi_\delta(d)$ при умові $d \notin {}^{V}A_\delta$, виділено [5] ММС із сильною умовою визначеності на станах, або *St*-ММС (при умові $d \notin {}^{V}A_\delta$ вважаємо $\Phi_\delta(d)\uparrow$), та ММС із загальною умовою визначеності на станах, або *Gn*-ММС (при умові $d \notin {}^{V}A_\delta$ вважаємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$, де d_δ – скорочене позначення ІМ $[v \mapsto a \in d \mid a \in A_\delta]$). Для *Gn*-ММС предикати стану δ "відчувають" лише компоненти даних вигляду $v \mapsto a$ із $a \in A_\delta$, тому $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$ для всіх $d \in {}^{V}A$.

Модальні композиції *St*-ММС не зберігають еквітонність предикатів, але зберігають слабшу властивість – слабку еквітонність. Водночас [5] у випадку *Gn*-ММС композиції $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, зберігають еквітонність.

В даній роботі будемо досліджувати ММС із загальною умовою визначеності на станах.

Φ істинна в ММС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо предикат Φ_α є істинним для кожного $\alpha \in \boldsymbol{S}$.

Φ всюди істинна (позначаємо $\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх ММС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

ММС номінативних рівнів скорочено позначатимемо також як $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$.

Залежно від властивостей відношень $\vartriangleright_i$ можна визначати різні класи ММС. Розглянемо випадки, коли $\vartriangleright_i$ можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними. Якщо всі $\vartriangleright_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ *R*; якщо всі $\vartriangleright_i$ транзитивні, то пишемо *T*; якщо всі $\vartriangleright_i$ симетричні, то пишемо *S*.

Звідси, окрім загального, маємо такі чисті типи ММС:
R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Можливі істотно складніші, змішані типи ММС, коли різні відношення $\vartriangleright_i$ мають різні властивості.

Модальні композиції можна проносити [5] через реномінації: формули вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\mathrm{K}_i\Phi \leftrightarrow \mathrm{K}_i R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$ всюди істинні.

Розглянемо взаємодію в ММС модальних композицій та кванторів.

Для довільної ММС $\boldsymbol{M}$ маємо [5]: $\boldsymbol{M} \models \exists x\, \mathrm{K}_i \Phi \to \mathrm{K}_i \exists x\Phi$ та $\boldsymbol{M} \models \mathrm{K}_i \forall x\Phi \to \forall x\, \mathrm{K}_i \Phi$.

Звідси формули $\exists x \mathrm{K}_i \Phi \to \mathrm{K}_i \exists x\Phi$ та $\mathrm{K}_i \forall x\Phi \to \forall x\, \mathrm{K}_i \Phi$ всюди істинні.

Водночас формули $\forall x\, \mathrm{K}_i \Phi \to \mathrm{K}_i \forall x\Phi$ та $\mathrm{K}_i \exists x\Phi \to \exists x\, \mathrm{K}_i \Phi$ не є всюди істинними.

Для ММС номінативних рівнів введемо поняття логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Δ є логічним наслідком Γ в ММС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^V\!A$ із того, що $\Phi_\alpha(d) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$, випливає, що неможливо $Ш_\beta(d) = F$ для всіх $Ш^\beta \in \Delta$.

Δ є логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma \models \Delta$), якщо $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ для всіх ММС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

Відсутність логічного наслідку $\Gamma \models \Delta$ означає: існують ММС $\boldsymbol{M}$ та $d \in {}^V\!A$ такі, що $\Phi_\alpha(d) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ та $Ш_\beta(d) = F$ для всіх $Ш^\beta \in \Delta$.

Наведемо властивості відношення $\models$ на кванторному рівні. В першу чергу, це немодалізовані властивості, успадковані від композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models \Delta$.

U) Нехай $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Sigma$; нехай $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

$\neg$) $\neg\Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\alpha$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \neg\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

$\vee$) $\Phi \vee \Psi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $\Psi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi \vee \Psi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$.

ΦN) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ при $y \in \mu(\Phi)$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$ при $y \in \mu(\Phi)$.

RT) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$.

R$\neg$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$.

R$\vee$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^\alpha$.

RR) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi)^\alpha$.

R$\exists$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$ (при $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$).

R$\exists\exists$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \exists z\, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists z\, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi)^\alpha$ (при $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$).

$\exists$) $\exists x\Phi^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{y}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta$, $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{x}_{y}(\Phi)^\alpha, \exists x\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists x\Phi^\alpha$.

де *y* тотально неістотне, $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$;

Наведемо тепер властивості, пов'язані з модальними композиціями.

RK_i) $\Gamma, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathrm{K}_i\Phi)^\alpha \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \mathrm{K}_i R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathrm{K}_i\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$.

K_i) $\mathrm{K}_i\Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \vartriangleright_i \beta\} \cup \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\quad \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів β: $\alpha \vartriangleright_i \beta$.

Секвенційні числення мультимодальних логік еквітонних предикатів. Секвенційні числення композиційно-номінативних ММЛ будуємо на основі реляційної семантики таких логік.

Специфікацією стану називають [3] слово вигляду $\alpha|\!-$ чи $\alpha\!-\!|$, де α – *префікс стану світу*. В цьому префіксі вказуємо стан світу, в якому розглядається специфікована формула. Спеціальний символ $*$ вказує на довільний стан, пов'язаний із даним станом відношенням досяжності. Це уточнюється [3] залежно від виду модальної логіки. Стани світу іменуємо натуральними числами.

Секвенції збагачуємо збудованими на даний момент множиною $\boldsymbol{S}$ станів світу та множиною $\boldsymbol{R}$ відношень на $\boldsymbol{S}$. Секвенційні форми для числень номінативних рівнів повинні враховувати можливість зміни носіїв станів світу (форма $_{\vdash}\exists$, в окремих випадках форми $_{\vdash}$R$\exists\exists$, $_{\dashv}$R$\exists\exists$), тому для кожного із станів $\alpha \in \boldsymbol{S}$ вказуємо збудовану на даний момент множину його базових даних A_α. Збагачені секвенції будемо записувати у вигляді Σ // $\alpha\{A_\alpha\}$, $\beta\{A_\beta\}$, … // *M*, де Σ – множина специфікованих формул, *St* – збудована на даний момент множина імен станів, $\alpha\{A_\alpha\}$, $\beta\{A_\beta\}$, … – збудовані на даний момент стани із множинами їх базових даних, *M* – схема моделі світу, тобто збудоване на даний момент відношення досяжності, записане для імен станів. Скорочений запис збагаченої секвенції: Σ // *St* // *M*.

Секвенційні форми мусять зберігають $\models$ при переході від засновків до висновку та $\not\models$ при переході від висновку до засновків. Це гарантується відповідними властивостями відношення $\models$. Зауважимо, що при цьому із властивостей $\vee$ та K_i отримуємо: $\Phi \vee \Psi^\alpha, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ або $\Psi^\alpha, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\beta$ для деякого β: $\alpha \vartriangleright_i \beta$.

До базових секвенційних форм числень ММЛ кванторного рівня віднесемо форми $_{\vdash}\neg$, $_{\dashv}\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, $_{\vdash}$RT, $_{\dashv}$RT, $_{\vdash}$RR, $_{\dashv}$RR, $_{\vdash}$R$\neg$, $_{\dashv}$R$\neg$, $_{\vdash}$R$\vee$, $_{\dashv}$R$\vee$, $_{\vdash}\Phi$N, $_{\dashv}\Phi$N, $_{\vdash}$R$\exists$, $_{\dashv}$R$\exists$, $_{\dashv}$R$\exists\exists$, $_{\vdash}$R$\exists\exists$, $_{\vdash}\exists$, $_{\dashv}\exists$, які подібні до відповідних форм секвенційних числень логіки еквітонних предикатів [1]. Вони не змінюють схему моделі світу M, але форми ${}_{\vdash}\exists$ (в окремих випадках ${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\exists$ і ${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\exists$) змінюють стани. До цих форм додаємо базові форми для модальних операторів ${}_{\vdash}\mathrm{RK}_i$, ${}_{\dashv}\mathrm{RK}_i$, ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$, ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$, де $i\in I$. При цьому форми ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$ зазвичай не змінюють множини базових даних станів і схему моделі світу, форма ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$ для стану α вводить новий стан β такий, що $\alpha\rhd_I\beta$ та $A_\beta = A_\alpha$.

Наведемо базові секвенційні форми числень ММЛ еквітонних предикатів кванторного рівня.

$$_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}; \qquad _{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //M \qquad {}_{\alpha\vdash}B,\ \Sigma\ //\ St\ //M}{{}_{\alpha\vdash}A\vee B,\ \Sigma\ //\ St\ //M}; \qquad _{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}A,\ {}_{\alpha\dashv}B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}A\vee B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; \qquad _{\dashv}\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}\circ{}_{\bar y}^{\bar w}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{R}_{\bar y}^{\bar w}(\mathrm{A})),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; \qquad _{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}\circ{}_{\bar y}^{\bar w}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{R}_{\bar y}^{\bar w}(\mathrm{A})),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\neg\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\neg\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; \qquad _{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\neg\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\neg\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A})\vee\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; \qquad _{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A})\vee\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$_{\vdash}\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar u}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{z,\bar u}^{y,\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\in\mu(A); \qquad _{\dashv}\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar u}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{z,\bar u}^{y,\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\in\mu(A);$$

$$_{\vdash}\mathrm{RK}_i\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{K}_i A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\text{, де } i\in I; \qquad _{\dashv}\mathrm{RK}_i\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_i R_{\bar x}^{\bar v}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{K}_i A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\text{, де } i\in I;$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\exists y\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\notin\{\bar v,\bar x\}; \qquad _{\dashv}\mathrm{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists y\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{R}_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\notin\{\bar v,\bar x\};$$

$$_{\vdash}\mathrm{R}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\exists z R_{\bar x}^{\bar v}\circ{}_{z}^{y}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; \qquad _{\dashv}\mathrm{R}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists z R_{\bar x}^{\bar v}\circ{}_{z}^{y}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для форм ${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\exists$ та ${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\exists$ такі умови: $y\in\{\bar v,\bar x\}$, z тотально неістотне та $z\notin nm(R_{\bar x}^{\bar v}(A))$.

Таким чином, при умові $y\notin\{\bar v,\bar x\}$ використовуємо ${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists$ та ${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists$, якщо ж $y\in\{\bar v,\bar x\}$, то використовуємо ${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\exists$ та ${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\exists$.

$$_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R_{y}^{x}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\exists xA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}; \qquad _{\dashv}\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists xA,\ {}_{\alpha\dashv}R_{z}^{x}(A),\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\exists xA,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для ${}_{\vdash}\exists$ y тотально неістотне та $y\notin nm(\Sigma, A)$. При цьому до носія A_α стану α додається новий елемент y.

Наведемо тепер секвенційні форми для елімінації модальних операторів. Форми ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$ та ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$ записуються по-різному залежно від властивостей відношень досяжності $\rhd_i$, $i\in I$. Обмежимося для прикладу двома випадками.

1. *Загальний випадок.* Якщо на $\rhd_i$ не накладені додаткові умови, то маємо такі форми.

$$_{\vdash}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\alpha*\vdash}A,\ {}_{\beta_1\vdash}A,\ \ldots,{}_{\beta_n\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}$$

Тут ${}_{\alpha*\vdash}A$ – допоміжна специфікована формула, яка конкретизується в даній секвенції через специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}A$, ..., ${}_{\beta_n\vdash}A$ для всіх наявних в даний момент станів β_1, …, β_n таких, що $\alpha\rhd_i\beta_1$, ..., $\alpha\rhd_i\beta_n$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу ${}_{\beta\vdash}A$.

$$_{\dashv}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\beta\dashv}A,\ {}_{\beta\vdash}B_1,\ \ldots,{}_{\beta\vdash}B_m,\ \Sigma\ //\ St'\ //\ M\cup\{\alpha\rhd_i\beta\}}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //M}$$

Тут β – новий стан, B_1, …, B_m – усі формули, що фігурують в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\vdash}B_j$, породжених формулами ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_i B_j$ (якщо Σ містить такі формули). Останнє означає, що при появі нового стану β, досяжного із α, для допоміжних формул вигляду ${}_{\alpha*\vdash}B_j$ треба записати нові специфіковані формули ${}_{\beta\vdash}B_j$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha\rhd_i\beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$.

2. *Відношення $\rhd_i$ транзитивне та рефлексивне.* У цьому випадку маємо такі форми.

$$_{\vdash}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\alpha*\vdash}A,\ {}_{\alpha\vdash}A,\ {}_{\beta_1\vdash}A,\ \ldots,{}_{\beta_n\vdash}A,\ {}_{\beta_1\vdash}\mathrm{K}_i A,\ \ldots,{}_{\beta_n\vdash}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}$$

Допоміжна формула ${}_{\alpha*\vdash}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}A, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}A$ та ${}_{\beta_1\vdash}\mathrm{K}_iA, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}\mathrm{K}_iA$ для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\triangleright_i\beta_1, \ldots, \alpha\triangleright_i\beta_n$. Специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}\mathrm{K}_iA, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}\mathrm{K}_iA$ тут необхідні в силу транзитивності відношення $\triangleright_i$. Згідно рефлексивності відношення $\triangleright_i$ явно виділяємо ${}_{\alpha\vdash}A$.

$$ {}_{\dashv}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\beta\dashv}A,\ {}_{\beta\vdash}B_1,\ \ldots, {}_{\beta\vdash}B_m,\ {}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iB_1,\ \ldots, {}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iB_m,\ \Sigma\ //\ St'\ //\ M\cup\{\alpha\triangleright_i\beta\}}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M} $$

Тут β – новий стан світу, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\vdash}B_j$, породжених формулами ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iB_j$ (якщо Σ містить такі формули). Специфіковані формули ${}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iB_j$ необхідні в силу транзитивності відношення $\triangleright_i$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha\triangleright_i\beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$.

Зауважимо, що при введенні нового стану β такого, що $\alpha\triangleright_i\beta$, задаємо $A_\beta = A_\alpha$. Проте нові елементи даних стану можуть з'являтися (наприклад, за рахунок форм ${}_{\vdash}\exists$) як в A_α, так і в A_β, тому надалі можливе як $A_\alpha\subset A_\beta$, так і $A_\beta\subset A_\alpha$.

Процедура побудови секвенційного дерева в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень логік квазіарних предикатів [1], але побудова дерева ведеться паралельно із побудовою схеми моделей світу. При цьому схема моделей світу оновлюється при використанні ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форм, які додають нові стани. Така побудова розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Спочатку виконуємо ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форми, які додають нові стани, далі ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форми. Потім виконуємо всі ${}_{\vdash}\exists$-форми, після цього – всі $\mathbf{R}\exists\exists$-форми, далі – усі інші секвенційні форми. При цьому ${}_{\dashv}\exists$-форма до ${}_{\alpha\dashv}\exists xA$ застосовується багатократно – для усіх імен доступних формул секвенції ${}_{\alpha\dashv}\exists xA, \Sigma$ та її наступників.

Беручи до уваги наведені вище властивості відношення $\models$, дістаємо:

Теорема 1. *Нехай* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St'\ //\ M'}{{}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}$ *та* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St\ //\ M \quad {}_{\vdash}\mathrm{X}\,{}_{\dashv}\mathrm{Z}\ //\ St\ //\ M}{{}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}$ *– секвенційні форми. Тоді з умови* $\Lambda\models\mathrm{K}$ *випливає* $\Gamma\models\Delta$; *з умови* $\Lambda\models\mathrm{K}$ *та* $\mathrm{X}\models\mathrm{Z}$ *випливає* $\Gamma\models\Delta$.

Зрозуміло, що для цих секвенційних форм маємо: із $\Gamma\not\models\Delta$ випливає $\Lambda\not\models\mathrm{K}$; із $\Gamma\not\models\Delta$ випливає $\Lambda\not\models\mathrm{K}$ або $\mathrm{X}\not\models\mathrm{Z}$.

Коректність і повнота секвенційних числень мультимодальних логік еквітонних предикатів. Теорема коректності для секвенційних числень ММЛ кванторного рівня формулюється традиційним чином.

Теорема 2. *Нехай секвенція* ${}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma\models\Delta$.

Доведення аналогічне доведенню відповідної теореми секвенційних числень загальних ТМЛ [3]. Воно проводиться індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для секвенції ${}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta$.

Для доведення повноти секвенційних числень використаємо метод систем модельних множин [6].

Система модельних множин – це пара $(\Omega, \boldsymbol{R})$, де $\Omega = \{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}$, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень досяжності на $\boldsymbol{S}$.

Множина $\boldsymbol{H}_\alpha$ специфікованих формул із $W_\alpha = nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$ – модельна множина стану α, якщо виконуються такі умови.

MC) Для кожної формули Φ лише одна зі специфікованих формул ${}_{\alpha\vdash}\Phi$ чи ${}_{\alpha\dashv}\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$.

MN) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MT) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

M$\neg$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

M$\vee$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ або ${}_{\alpha\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MRR) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ{}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ{}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MR$\neg$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MR$\vee$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MR$\exists$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\vdash}\exists yR^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\dashv}\exists yR^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MR$\exists$S) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\vdash}\exists zR^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ{}^{y}_{z}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\dashv}\exists zR^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ{}^{y}_{z}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ (тут z тотально неістотне та $z\notin nm(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi))$).

MRK) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathrm{K}_i\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iR^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathrm{K}_i\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_iR^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ (тут $i\in I$).

M$\exists$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то існує $y\in W_\alpha$ таке: ${}_{\alpha\vdash}R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то для всіх $y\in W_\alpha$ маємо ${}_{\alpha\dashv}R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MK) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_i\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх $\beta\in\boldsymbol{S}$: $\alpha\triangleright_i\beta$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_i\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого $\beta\in\boldsymbol{S}$: $\alpha\triangleright_i\beta$ (тут $i\in I$).

Процедура побудови секвенційного дерева може завершуватися або не завершуватися. Якщо процедура завершена позитивно, то маємо замкнене дерево. Якщо процедура завершена негативно або не завершується, то маємо скінченне чи нескінченне незамкнене дерево. Тоді в дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Теорема 3. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях в секвенційному дереві,* $\boldsymbol{H}_\alpha$ *– множина всіх специфікованих* ${}_{\alpha\vdash}$ *чи* ${}_{\alpha\dashv}$ *формул секвенцій шляху* $\wp$, *де* $\alpha\in\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$ *– множина відношень досяжності на* $\boldsymbol{S}$. *Тоді* $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}} = (\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}, \boldsymbol{R})$ *– система модельних множин.*

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно таких форм відповідають пунктам визначення системи модельних множин. Допоміжні специфіковані формули (їхній префікс містить $*$) для модельних множин не беремо до уваги. Кожна непримітивна формула на шляху

$\wp$ рано чи пізно буде розкладена згідно відповідної секвенційної форми. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконується пункт МС визначення системи модельних множин.

Теорема 4. *Нехай* $\mathbf{H}_{M}$ *– система модельних множин*, $W = nm(\mathbf{H}_{M})$. *Тоді існують ММС* $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$ *з* $|A| = |W|$ *та ін'єктивна* $\delta\in{}^{V}\!A$ *з* $im(\delta) = W$ *такі:* 1) ${}_{\alpha|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$; 2) ${}_{\alpha-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$.

Доведення теореми ведемо індукцією за складністю формули згідно побудови системи модельних множин.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деяку ін'єктивну $\delta\in{}^{V}\!A$ з $im(\delta) = W$. Така δ є бієкцією W на A. Позначивши $W_\alpha = nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$, маємо $A_\alpha = \delta(W_\alpha)$. Тоді δ_α є бієкцією W_α на A_α. Множини A та A_α продубльовують W та W_α.

Зауважимо, що $\Phi_\alpha(\delta) = \Phi_\alpha(\delta_\alpha)$, адже ми розглядаємо ММС із загальною умовою визначеності на станах.

Спочатку задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)$.

Якщо ${}_{\alpha|-}p\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то визначимо $p_\alpha(\delta) = T$; якщо ${}_{\alpha-|}p\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то визначимо $p_\alpha(\delta) = F$.

Якщо ${}_{\alpha|-}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то визначимо $p_\alpha(\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)) = T$; якщо ${}_{\alpha-|}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то визначимо $p_\alpha(\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках (достатньо розглядати $d\in A_\alpha^{W_\alpha}$) значення $p_\alpha(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи еквітонність і обмеження стосовно неістотності імен: для всіх d, $h\in A_\alpha^{W_\alpha}$ таких, що $d||\text{-}\mu(p) = h||\text{-}\mu(p)$, маємо $p_\alpha(d) = p_\alpha(h)$.

Задані таким чином значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю, враховуючи умови неістотності імен, на відповідні $h\in{}^{W}\!A$. Зрозуміло, що значення базових предикатів задані однозначно, причому враховано неістотність для p_α імен $y\in\mu(p)$. Отже, значення базових предикатів визначені коректно.

Для елементарних формул (вигляду $R^{\bar v}_{\bar x}(p)$ чи атомарних) твердження 1) та 2) теореми випливають з визначення значень базових предикатів. При цьому предикати вигляду p_α та $(R^{\bar v}_{\bar x}(p))_\alpha$ еквітонні та тотальні на відповідних $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Крок індукції для тверджень 1) та 2) доводиться стандартним чином (доведення аналогічної теореми для загальних ТМЛ див. [3]). Наведемо тут доведення для пунктів М$\exists$ та МК.

Нехай ${}_{\alpha|-}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ існує $y\in W_\alpha$ таке, що ${}_{\alpha|-}R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R^{x}_{y}(\Phi))_\alpha(\delta) = T$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto\delta(y)) = T$. Але $\delta(y)\in A_\alpha$ згідно $y\in W_\alpha$, тому для $a = \delta(y)\in A_\alpha$ маємо $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto a) = T$, звідки $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = T$.

Нехай ${}_{\alpha-|}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ тоді ${}_{\alpha-|}R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ для всіх $y\in W_\alpha$. За припущенням індукції $(R^{x}_{y}(\Phi))_\alpha(\delta) = F$ для всіх $y\in W_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto\delta(y)) = F$ для всіх $y\in W_\alpha$. Проте кожне $b\in A_\alpha$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y\in W_\alpha$, адже δ визначає бієкцію $\delta_\alpha : W_\alpha\to A_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta\nabla x\mapsto b) = F$ для всіх $b\in A_\alpha$, звідки $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = F$.

Нехай ${}_{\alpha|-}\mathrm{K}_i\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, де $\mathrm{K}_i\in Ms$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ маємо ${}_{\beta|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх β таких, що $\alpha\rhd_i\beta$. За припущенням індукції тоді $\Phi_\beta(\delta) = T$ для всіх β таких, що $\alpha\rhd_i\beta$. За визначенням K_i отримуємо $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(\delta) = T$.

Нехай ${}_{\alpha-|}\mathrm{K}_i\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, де $\mathrm{K}_i\in Ms$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ маємо ${}_{\beta-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого стану β такого, що $\alpha\rhd_i\beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta) = F$. Звідси за визначенням K_i маємо $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(\delta) = F$.

Зауважимо, що з побудови $\mathbf{H}_{M}$ випливає: якщо предикат (предикати), який є значенням простішої формули (права частина відповідних пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$, то предикат, який є значенням формули, утвореної відповідною композицією (ліва частина пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), теж еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$. Це гарантує еквітонність усіх предикатів Φ_α, якщо такими є базові предикати на станах.

Таким чином, отримуємо теорему повноти секвенційних числень ММЛ еквітонних предикатів кванторного рівня.

Теорема 5. *Нехай* $\Gamma\,|\!=\Delta$. *Тоді секвенція* ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ *вивідна.*

Припустимо супротивне: $\Gamma\,|\!=\Delta$ (тобто $\Gamma\,|\!=_{M}\Delta$ для кожної узгодженої ММС $\boldsymbol{M}$) і ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma = {}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Згідно теореми 3, $\mathbf{H}_{M} = (\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}, \boldsymbol{R})$ – система модельних множин (тут $\boldsymbol{H}_\alpha$ – множина всіх специфікованих ${}_{\alpha|-}$ чи ${}_{\alpha-|}$ формул секвенцій цього шляху, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$). Згідно теореми 4 існують *ММС* $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$ та $\delta\in{}^{V}\!A$ такі: ${}_{\alpha|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$ та ${}_{\alpha-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$. Зокрема, це вірно для формул секвенції ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$. Тому для всіх $\Phi^\alpha\in\Gamma$ маємо $\Phi_\alpha(\delta) = T$ та для всіх $Ш^\beta\in\Delta$ маємо $Ш_\beta(\delta) = F$. Це заперечує $\Gamma\,|\!=_{M}\Delta$. Отже, припущення про невивідність ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невірне, що й доводить теорему.

Висновки. В роботі досліджено першопорядкові композиційно-номінативні мультимодальні логіки кванторного рівня. Наведено основні семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості відношення логічного наслідку для множин формул. На цій основі запропоновано числення секвенційного типу для мультимодальних логік еквітонних предикатів кванторного рівня. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти. В наступних роботах планується продовжити дослідження першопорядкових композиційно-номінативних мультимодальних логік на функціональних рівнях.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с. 2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки // Пробл. программирования. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33. 3. *Шкільняк О.С.* Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення. – Наукові записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2008. – т. 86. – С. 25–34. 4. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23. 5. *Шкільняк О.С. Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки епістемічного типу. – Наукові записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2011. – т. 125. – С. 4–7. 6. Семантика модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981. – 494 с.

Надійшла до редколегії 26.08.11