УДК 517.929

І. А. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук, проф.

# METOD OF OPTIMIZATION THE LINEAR SYSTEM STOCHOSTIC DIFFERENTIOL EQUATIONS

***В роботі досліджується лінійне стохастичне диференціальне рівняння з марківськими збуреннями. За допомогою рівняння Белмана розв'язується задача оптимального керування з квадратичним критерієм якості.***

***We consider the linear stochastic differential equation with Markovian perturbations. Using Bellman equation solves the problem of optimal control with a quadratic quality criterion.***

**STATEMENT OF PROBLEM.** We consider the system of linear differential equations with variable coefficients:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t,\xi(t))X(t) + B(t,\xi(t))U(t), \tag{1}$$

where $\xi(t)$ — random Marcovian process taking finite number of variety $\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_q$ with probability

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \Theta_k\} \ (k = 1, \dots, q),$$

wich satisfied the following system of differential equantions [1]

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{S=1}^{q} \alpha_{ks}(t)p_s(t) \ (k = 1, \dots, q), \ \ \alpha_{ks}(t) \geq 0 \ \ (k \neq s), \sum_{k=1}^{q} \alpha_{ks}(t) = 0 \ (k, s = 1, \dots, q). \tag{2}$$

For describe the densities of discrete continuous random process we use the function

$$f(t, X, \xi) = \sum_{k=1}^{q} f_k(t, X)\delta(\xi - \Theta_k),$$

where function $f_k(t, X) \ (k = 1, 2, \dots, q)$ called the particular probability. Introduce the particular mathematical expectation of the function $g(t, X(t), \xi(t))$

$$\left\langle g\left(t, X(t), \xi(t)\right)\right\rangle_k = \int_{E_m} g(t, X, \Theta_k) f_k(t, X)dX,$$

$E_m$ — the space of variable X,

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^*, \ \ dX = dx_1 \, dx_2 \dots dx_m.$$

For mathematical expectation of the function $g(t, X(t), \xi(t))$, we receive

$$\left\langle g\left(t, X(t), \xi(t)\right)\right\rangle_k = \int_{E_m} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(t, X, \xi\right) f\left(t, X, \xi\right) d\xi \right) dx = \sum_{k=1}^{q} \int_{E_m} g\left(t, X, \Theta_k\right) f_k\left(t, X\right) dX = \sum_{k=1}^{q} \left\langle g\left(t, X, \xi(t)\right)\right\rangle_k.$$

Introduce denotion for particular moments of second ordinary

$$M_k(t) = \left\langle X(t), X^*(t)\right\rangle_k = \int_{E_m} XX^* f_k(t, X)dX$$

For matrix of second moments we find:

$$M(t) = \left\langle X(t), X^*(t)\right\rangle = \sum_{k=1}^{q} M_k(t).$$

We introduced for the optimal control

$$U(t) = S(t, \xi(t))X(t)$$

under which the value of a quadratic functional

$$I(t) = \left\langle \int_0^\infty \left( X^*(\tau)C\left(\tau, \xi(\tau)\right)X(\tau)\right) + U^*(\tau)D\left(\tau, \xi(\tau)\right)U(\tau)d\tau \right\rangle.$$

reaches its minimum.

**MAIN RESULTS**. Introduce for particular value of random matrix:

$$A(t, \Theta_k)A_{k,} \ B(t, \Theta_k) = B_k(t), \ C(t, \Theta_k) = C_k(t), \ D(t, \Theta_k) = D_k(t), \ S(t, \Theta_k) = S_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, g).$$

For particular moments of the second ordinary $M_k(t)$ we have system of linear differential equation [3, 4]

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \left(A_k(t) + S_k^*(t)B_k^*(t)\right) + \sum_{s=1}^{q}\sigma_{ks}(t)M_s(t) + M_k(t)\left[A_k^*(t) + S_k^*(t)B_n^*(t)\right] + \sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s(t) \quad (3)$$

In paper [6] we find necessary condition of optimization

$$\frac{DH}{DS_k} = 0 \quad (k = 1,\dots q)$$

where H — the function of Hamilton.

$$H = \sum_{k=1}^{q}\Psi_k \circ \left[(A_k(t) + B_k(t)S_k)M_k + M_k(A_k^*(t) + S_k^*B_k^*(t)\right] + \sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s\Big] + \sum_{k=1}^{q}(C_k(t) + S_k^* D_k^*((t)S_n)\circ M_k .$$

The symbol "$\circ$" — denote of scalar multiplication of matrix A and B equal dimension with elements $a_{ij}, b_{ij}$ $(i = 1,\dots,l; i = 1,\dots,m)$

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij}$$

**BASIS** property of scalar multiplication

1. $A \circ B = B \circ A = A^* \circ B^*$
2. $A \circ B = S_p(AB^*) = sp(BA^*)$
3. $AMB \circ S = A^* SB^* \circ M.$

Ibiden show, variation of matrix $M_k(t), \Psi_k(t)$ $(k = \overline{1,q})$ is define of the system of matrix differential equation:

$$\frac{dM_k}{dt} = \frac{DH}{D\Psi_k}, \frac{d\Psi_k}{dt} = -\frac{DH}{DM_k} \; (k = \overline{1,q}) \quad (4)$$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \left[A_k^*(t) - B_k(t)D_k^{-1}(t)B_k^*(t) + \Psi_k(t)\right] \times M_k(t) +$$
$$+ M_k(t)\left[A_k^*(t) - \Psi_k(t)B_k(t)D_k^{-1}(t) \times B_k^*(t)\right] + \sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s(t) \quad (5)$$

$$\frac{d\Psi_k(t)}{dt} = -A_k^*(t)\Psi_k - \Psi_k(t)A_k(t) - C_k(t) + \Psi_k^*(t)B_k(t)D_k^{-1}(t)B_k^*(t)\Psi_k(t) - \sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)\Psi_s(t) \quad (k = \overline{1,q}) \quad (6)$$

For synthesis' optimal control we search solution the for system with initial condition

$$\Psi_k(T) = 0 \quad (k = 1,\dots,q)$$

Analogous result may receive from Bellman's equations [2].
Introduce operator

$$\min\left\langle \int_t^{\infty} X^*(\tau)\left[C(\tau,\xi(\tau)) + S^*(\tau,\xi(\tau))D(\tau,\xi(\tau))S(\tau,\xi(\tau))\right]X(\tau)d\tau \right\rangle = \sum_{k=1}^{q}\Psi_k(t)\circ M_k(t). \quad (7)$$

For synthesis' optimal control we use Bellman stochastic equation

$$\min_{S(\tau)}\left\{\left\langle \frac{dv(t,X(t))}{dt} + X^*(t)\left[C(t,\xi(t)) + S^*(t,\xi(t))D^*(t,\xi(t))S(t,\xi(t))\right]X(t)\right\rangle\right\} = 0 \quad (8)$$

where derivation from operator $v(t, X(t))$ satisfied of the linear system equation

$$\frac{dX(t)}{dt} = (A(t,\xi(t)) + B(t,\xi(t))S(t,\xi(t))X(t)$$

From (7) discount (4), (5) we have

$$\min_{S_k}\sum_{k=1}^{q}\left\{\frac{d\Psi_k(t)}{dt}\circ M_k(t) + \Psi_k(t)\left[A_k(t) + B_k(t)S_k\right]M_k(t) + M_k(t)\left[A_k^*(t) + S_kB_k^*(t) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s(t)\right] + C_k(t)\circ M_k(t) + S_k^*D_k(t)S_k \circ M_k(t)\right\} = 0$$

After derivation the sum in formula (9) on matrix $S_k$, me have equality we receive

$$S_k = -D_k^{-1}(t)B_k^*(t)\Psi_k(t) \; (k = \overline{1,q})$$

Exception matrix $S_k$ from (9):

$$\sum_{k=1}^{q} M_k(t)\circ\left[\frac{d\Psi_k(t)}{dt}+C_k(t)+A_k^*(t)\Psi_k(t)+\Psi_k(t)A_k(t)+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{sk}\Psi_s(t)-\Psi_k(t)B_k(t)\times\right.$$
$$\left.\times D_k^{-1}(t)B_k^*(t)\Psi_k(t)\right]=0 \qquad (10)$$

For solution of the system of equation (10) for by anything variety $M_k(t)(k=\overline{1,q})$ enough observance the system of equation (5), (6).

**Conclusion:** the Bellman equation (10) let realize synthesis optimal control for system of equation (1) with functional $I(t)$

1. Artemjev V.M., Kozakov I.E. Direktory on theory automftic control. – Moscow.: "Nauka"; 1987. 2. Rojtenberg I.N. Automatic Control. – Moscow. – "Nauka"; 1978. 3. Valeev K.G. Split spectrum of matrixs – Kiev. – "Vusha shkola", 1986. 4. Tichonov V.I., Mironov N.A. Marcov process. – Moscow. – Sov. Radio. 1977. 5. Valeev K.G., Strigak O.L. Method of moments equation. – Kiev. AN USSR, 1986. 6. Valeev K.G., Jalladova I.A. Optimization of linear Stochastic equation. – Kiev. 1

Надійшла до редколегії 10.09.12

УДК 519.21

С. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Н. Тмєнова , канд. фіз.-мат. наук

## НОТАТКИ ПРО ДЕЯКУ ГРУ ПРОГНОЗУВАННЯ

***Розглянуто ігрову ситуацію двох осіб в задачі оцінки реалізації випадкової величини знизу. Знайдено стратегії гравців, що забезпечують ситуацію рівноваги за Нешем.***

***Two persons game based on random value evaluation from below problem is considered. For the game given Nash equilibrium strategies are found.***

В [1] була розглянута така гра. Нехай $n$ гравців вгадують значення випадкової величини, рівномірно розподіленої на інтервалі $[0;1]$. Гра ведеться за наступними правилами. Нехай гравці незалежно один від одного вибирають свої прогнози з інтервалу $[0;1]$. Гравець, чий прогноз найбільш близький до реалізації випадкової величини знизу, виграє одиницю, інші (тобто ті, які назвали менші, ніж він, значення, і ті, чиї прогнози перевищили реалізацію випадкової величини), не одержують нічого.

Розглянемо частинний випадок $n=2$. Легко показати, що така гра не має рівноваг в чистих стратегіях, оскільки функція найкращої відповіді має такий вигляд

$$BR(x)=\begin{cases} x+\varepsilon, & x<1/2 \\ 0, & x\ge 1/2 \end{cases},$$

і, таким чином, не існує такої пари $(x,y)$, що $y=BR(x), x=BR(y)$.

Будемо шукати рівноважні змішані стратегії гравців (однакові для обох гравців) у вигляді розподілу $G(x)$ на деякому інтервалі $[0;a]$, $a\le 1$,

$$G(x)=\chi(x<a)\int_0^x g(t)dt+\chi(x\ge a)\,.$$

Позначимо функції виграшу гравців відповідно через $H_1(x,y)$, $H_2(x,y)$. $H_1(x,G)$ буде означає виграш 1-го гравця, якщо він застосовує чисту стратегію $x$, а його супротивник – змішану стратегію $G(y)$.

Якщо $a\le x\le 1$, то, оскільки розподіл $G(y)$ зосереджений на інтервалі $[0;a]$, $a\le 1$, то вибраний прогноз буде більше, ніж прогноз супротивника, таким чином, перший гравець виграє, якщо його прогноз буде менший, ніж реалізація випадкової величини, тобто $H_1(x,G)=1-x$.

Якщо $x\ge a$, то згідно формулі повної ймовірності

$$H_1(x,G)=P(y<x<\xi)+P(x<\xi,y>\xi)=G(x)(1-x)+\int_x^a g(t)(t-x)dt\,.$$

Інтегрування частинами дає

$$\int_x^a g(t)(t-x)dt=-\int_x^a (t-x)d\,\bar G(t)=\int_x^a \bar G(t)dt\,,$$

і, таким чином,

$$H_1(x,G)=P(y<x<\xi)+P(x<\xi,y>\xi)=G(x)(1-x)+\int_x^a \bar G(t)dt\,.$$

За умовою рівноваги $H_1(x,G)$ буде однаковим для всіх $x$ таких, що $g(x)>0$, тобто $\dfrac{\partial H_1(x,G)}{\partial x}=0$, звідси $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$.