Exception matrix S_k from (9):

$$\sum_{k=1}^{q} M_k(t) \circ \left[\frac{d\Psi_k(t)}{dt} + C_k(t) + A_k^*(t)\Psi_k(t) + \Psi_k(t)A_k(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{sk}\Psi_s(t) - \Psi_k(t)B_k(t) \times \right. \\ \left. \times D_k^{-1}(t)B_k^*(t)\Psi_k(t) \right] = 0 \tag{10}$$

For solution of the system of equation (10) for by anything variety $M_k(t)(k = \overline{1,q})$ enough observance the system of equation (5), (6).

Conclusion: the Bellman equation (10) let realize synthesis optimal control for system of equation (1) with functional $I(t)$

1. Artemjev V.M., Kozakov I.E. Direktory on theory automftic control. – Moscow.: "Nauka"; 1987. 2. Rojtenberg I.N. Automatic Control. – Moscow. – "Nauka"; 1978. 3. Valeev K.G. Split spectrum of matrixs – Kiev. – "Vusha shkola", 1986. 4. Tichonov V.I., Mironov N.A. Marcov process. – Moscow. – Sov. Radio. 1977. 5. Valeev K.G., Strigak O.L. Method of moments equation. – Kiev. AN USSR, 1986. 6. Valeev K.G., Jalladova I.A. Optimization of linear Stochastic equation. – Kiev. 1

Надійшла до редколегії 10.09.12

УДК 519.21

С. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Н. Тмєнова , канд. фіз.-мат. наук

НОТАТКИ ПРО ДЕЯКУ ГРУ ПРОГНОЗУВАННЯ

Розглянуто ігрову ситуацію двох осіб в задачі оцінки реалізації випадкової величини знизу. Знайдено стратегії гравців, що забезпечують ситуацію рівноваги за Нешем.

Two persons game based on random value evaluation from below problem is considered. For the game given Nash equilibrium strategies are found.

В [1] була розглянута така гра. Нехай n гравців вгадують значення випадкової величини, рівномірно розподіленої на інтервалі $[0;1]$. Гра ведеться за наступними правилами. Нехай гравці незалежно один від одного вибирають свої прогнози з інтервалу $[0;1]$. Гравець, чий прогноз найбільш близький до реалізації випадкової величини знизу, виграє одиницю, інші (тобто ті, які назвали менші, ніж він, значення, і ті, чиї прогнози перевищили реалізацію випадкової величини), не одержують нічого.

Розглянемо частинний випадок $n = 2$. Легко показати, що така гра не має рівноваг в чистих стратегіях, оскільки функція найкращої відповіді має такий вигляд

$$BR(x) = \begin{cases} x + \varepsilon, & x < 1/2 \\ 0, & x \ge 1/2 \end{cases},$$

і, таким чином, не існує такої пари (x, y), що $y = BR(x), x = BR(y)$.

Будемо шукати рівноважні змішані стратегії гравців (однакові для обох гравців) у вигляді розподілу $G(x)$ на деякому інтервалі $[0;a]$, $a \le 1$,

$$G(x) = \chi(x < a)\int_0^x g(t)dt + \chi(x \ge a).$$

Позначимо функції виграшу гравців відповідно через $H_1(x,y)$, $H_2(x,y)$. $H_1(x,G)$ буде означає виграш 1-го гравця, якщо він застосовує чисту стратегію x, а його супротивник – змішану стратегію $G(y)$.

Якщо $a \le x \le 1$, то, оскільки розподіл $G(y)$ зосереджений на інтервалі $[0;a]$, $a \le 1$, то вибраний прогноз буде більше, ніж прогноз супротивника, таким чином, перший гравець виграє, якщо його прогноз буде менший, ніж реалізація випадкової величини, тобто $H_1(x,G) = 1 - x$.

Якщо $x \ge a$, то згідно формулі повної ймовірності

$$H_1(x,G) = P(y < x < \xi) + P(x < \xi, y > \xi) = G(x)(1-x) + \int_x^a g(t)(t-x)dt.$$

Інтегрування частинами дає

$$\int_x^a g(t)(t-x)dt = -\int_x^a (t-x)d\,\bar{G}(t) = \int_x^a \bar{G}(t)dt,$$

і, таким чином,

$$H_1(x,G) = P(y < x < \xi) + P(x < \xi, y > \xi) = G(x)(1-x) + \int_x^a \bar{G}(t)dt.$$

За умовою рівноваги $H_1(x,G)$ буде однаковим для всіх x таких, що $g(x) > 0$, тобто $\frac{\partial H_1(x,G)}{\partial x} = 0$, звідси $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

З умови нормування $\int_0^a \frac{1}{1-x}dx = 1$ знаходимо, що $a = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$.

Таким чином $G(x) = \begin{cases} -\ln(1-x), \ x \le 1-1/e \\ 1, \ x > 1-1/e \end{cases}$, а значення гри дорівнює $1 - a = \frac{1}{e} \approx 0.368$.

При корпоративній поведінці гравців оптимальна стратегія очевидна – один з гравців вибирає нуль і обов'язково одержує одиничний виграш. Ціна анархії (тобто відношення сумарного виграшу в ігровій ситуації до сумарного виграшу при корпоративній поведінці) складає $\frac{1/2}{1/e} = \frac{e}{2}$.

Розглянемо узагальнення даної гри. Нехай тепер спостережувана випадкова величина ξ має заданий розподіл F (накладемо обмеження, що ξ – невід'ємна випадкова величина, яка має щільність). Як і у попередньому (частинному) випадку, будемо шукати рівноважні стратегії гравців у вигляді розподілу $G(x)$ на деякому інтервалі $[0;a]$. Тоді очікуваний виграш першого гравця, що застосовує чисту стратегію, за умови, що його суперник застосовує змішану стратегію з функцією розподілу $G(y)$, набуває вигляду

$$H_1(x,G) = P(x < \xi < y) + P(y < x < \xi) = \int_{t=x}^{a} f(t)\bar{G}(t)dt + G(x)\bar{F}(x).$$

З умови рівноваги маємо

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = -f(x)\bar{G}(x) + G'(x)\bar{F}(x) - G(x)f(x) = G'(x)\bar{F}(x) - f(x) = 0.$$

Звідси $G'(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$, отже $G(x) = -\ln\left(\bar{F}(x)\right)$.

З умови нормування $G(a) = 1$ знаходимо, що a є коренем рівняння $\bar{F}(a) = e^{-1}$. Таким чином,

$$G(x) = \begin{cases} -\ln\left(\bar{F}(x)\right), \ 0 \le x \le a \\ 1, \ x > a \end{cases},$$

і значення гри дорівнює e^{-1} незалежно від вигляду функції розподілу.

Зокрема, якщо F – показниковий розподіл з параметром 1, то шуканий рівноважний розподіл $G(x)$ буде рівномірним на інтервалі $[0;1]$.

Розглянемо модифікацію вихідної гри. Нехай гравцям виплачується виграш у випадку, якщо реалізація випадкової величини виявиться меншою обох прогнозів, і, таким чином, дана гра стає грою з фіксованою сумою.

Тоді очікуваний виграш першого гравця дорівнює

$$H_1(x,G) = P(x < \xi < y) + P(y < x < \xi) + \frac{1}{2}\left[P(\xi < x < y) + P(\xi < y < x)\right] =$$

$$= \int_{t=x}^{a} f(t)\bar{G}(t)dt + G(x)\bar{F}(x) + \frac{1}{2}\left[F(x)\bar{G}(x) + \int_0^x g(t)F(t)dt\right].$$

В даному випадку умова рівноваги $\frac{\partial H_1}{\partial x} = 0$ призводить до диференціального рівняння першого порядку відносно функції розподілу шуканої рівноваги

$$\bar{G}'(x) + \frac{1}{2}\frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)}\bar{G}(x) = \frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Частинний розв'язок рівняння, що задовольняю початковій умові $\bar{G}(0) = 1$ має вигляд $\bar{G}(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{\bar{F}(x)}}$, таким чином

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\bar{F}(x)}} - 1, \ 0 \le x \le a \\ 1, \ x > a \end{cases},$$ де a є коренем рівняння $F(a) = \frac{3}{4}$.

Розглянемо ще одну модифікацію даної гри, яку назвемо частковою кооперацією. Нехай кожен з гравців, що зробив кращий прогноз, ніж його суперник, ділиться виграшем з суперником, при цьому виплачує йому суму $\frac{\alpha}{2}$ і залишає собі $1 - \frac{\alpha}{2}$, де $\alpha \in [0;1]$. Якщо реалізація випадкової величини виявилася меншою прогнозів обох гравців, то вони не одержують нічого. При $\alpha = 0$ це звичайна некооперативна гра, що розглянута вище. При $\alpha = 1$ це кооперативна гра, в якій кожному з гравців байдуже, хто зробить точніший прогноз – він або інший гравець. Як відмічалося вище, оптимальні стратегії гравців в цьому випадку тривіальні – вибирати нульовий прогноз з ймовірністю 1. При проміжних значеннях α виникає компромісна ситуація, в якій з одного боку кожний з гравців прагне зробити точніший прогноз, ніж суперник (в цьому випадку він одержує більшу винагороду), з другого боку у гравців є загальна мета – уникнути несприятливого результату, при якому вони не одержують нічого.

Тоді

$$H_1(x,G) = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[P\left(x<\xi<y\right)+P\left(y<x<\xi\right)\right]+\frac{\alpha}{2}\left[P\left(y<\xi<x\right)+P\left(y<x<\xi\right)\right] =$$

$$= \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\int\limits_{t=x}^{a} f(t)\bar{G}(t)dt + G(x)\bar{F}(x)\right] + \frac{\alpha}{2}\left[\int\limits_{0}^{x} g(t)\left(F(x)-F(t)\right)dt + \int\limits_{t=x}^{a} g(t)\bar{F}(t)dt\right].$$

Враховуючи, що $F(x)-F(t)=\bar{F}(t)-\bar{F}(x)$, другий доданок можна представити у вигляді $\frac{\alpha}{2}\left[\int\limits_{0}^{a}\bar{F}(t)g(t)dt-\bar{F}(x)G(x)\right]$, і таким чином умова рівноваги $\frac{\partial H_1(x,G)}{\partial x}=0$ набуває вигляду

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(G'(x)\bar{F}(x)-f(x)\right)+\frac{\alpha}{2}\left(f(x)G(x)-\bar{F}(x)G'(x)\right)=0,$$

що призводить до рівняння

$$G'(x)+\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\frac{f(x)}{\bar{F}(x)}G(x)=\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}\frac{f(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Звідси

$$G(x)=\frac{2-\alpha}{\alpha}\left(1-\bar{F}(x)^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}}\right).$$

Верхня границя a розподілу $G(x)$ знаходиться з умови $G(a)=1$, звідси $\bar{F}(a)=\left(\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}$.

Помітимо також, що $\frac{\partial G(x)}{\partial\alpha}>0$ для всіх значень, отже, знайдена параметрична родина рівноважних розподілів стохастично монотонно зменшується із зростанням параметра α.

1. В.В.Мазалов. Математическая теория игр и приложения. Изд-во "Лань", СПБ, 2010, стр. 115–121.

Надійшла до редколегії 17.09.12

УДК 681.3

Д. А. Єфімов, д-р мед. наук, С. І. Кіфоренко, д-р біол. наук,
М. В. Лавренюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

КОМП'ЮТЕРНА ПІДТРИМКА ДІЄТОТЕРАПІЇ ПРИ ДІАБЕТІ

Описується інформаційна технологія синтезу системи підтримки прийняття рішень у діабетології при виборі дієти, адекватної енерговитратам. Інформаційне ядро системи становлять спеціалізовані бази даних по продуктах харчування, типам і видам активності. Розроблене програмне забезпечення реалізує системи керування базами, обробляє інформаційні масиви, забезпечує якісну доступність, візуалізацію, зручний інтерфейс користувача. Це сприяє поліпшенню якості медичних послуг у лікувальних установах діабетологічного профілю.

Information technology of synthesis of decision support system in diabetology at choosing the diet according to energy consumption is described. Information kernel of system consists of specialized databases of food products and activities. The developed software implements database control system, processes information arrays and provides qualitative accessibility, visualization, and user-friendly interface. It promotes the improvement of health services quality in medical institutions of diabetologic specialization.

Вступ. Сучасний етап розвитку характеризується стрімким розповсюдженням нових інтелектуальних інформаційних технологій та їх впровадженням у повсякденне життя. Ці технології особливо актуальні в медицині, у тому числі й у діабетології, оскільки лікування хворих на діабет – це складний тривалий процес, що включає в себе комплекс заходів, який охоплює різні види життєдіяльності пацієнта й способи коригуючих впливів на його стан здоров'я.

Надзвичайна поширеність цукрового діабету прийняла, за оцінками ВОЗ, характер неінфекційної епідемії. Посилюючими факторами при цьому є різке зменшення фізичної активності й ожиріння. Все це ставить у розряд першочергових проблему розробки ефективного інструментарію для індивідуальної оперативної оцінки раціональних коригуючих впливів, доступного для використання пацієнтами з мінімальним рівнем спеціальних знань. В основі багатьох хронічних хвороб, у тому числі й діабету, – неузгоджене з активністю незбалансоване харчування. Тому стратегічним напрямком у боротьбі з катастрофічним ростом хронічних хвороб, за рекомендацією ВОЗ, є здорове харчування, як "превентивний фактор" [1,2].

В основі системи лікування разом із цукрознижуючою терапією й рекомендаціями щодо фізичних навантажень особливе місце займає дієта з дозованим вмістом вуглеводних компонентів. При діабеті збалансована дієта – це не фон для лікування, як при інших захворюваннях, а один з основних лікувальних засобів. Відзначимо, що це важливо для діабету 1-го типу, при якому необхідно знати кількість прийнятих з їжею вуглеводів і також еквівалентну кількість