УДК 519.21

Г. Лівінська, асист.

АПРОКСИМАТИВНИЙ ГАУССІВСЬКИЙ ПРОЦЕС ДЛЯ МЕРЕЖ ТИПУ $[M_t \mid M \mid \infty]^r$ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Стаття присвячена дослідженню багатоканальних стохастичних мереж, на кожен вузол якої ззовні надходить пуассонівський потік вимог з інтенсивністю, яка є змінною функцією часу. У перевантаженому режимі функціонування розвинуто апроксимативний метод дослідження процесу обслуговування. Граничний процес представлено у вигляді багатовимірної дифузії.

The paper is devoted to the investigation of multichannel stochastic networks. From the outside on each node of the network a Poisson input flow of calls arrives. And its rate is a varying function of time. At overloaded regime an approximate method of studying of the service process is developed. The limit process is represented as a multidimensional diffusion.

1. Вступ. Основна математична модель, яка вивчається у роботі, представляє собою мережу масового обслуговування, що складається з "r" вузлів обслуговування. Ззовні на i-тий вузол мережі надходить неоднорідний пуассонівський потік вимог $\nu_i(t)$ з інтенсивністю $\lambda(t)$, $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)du$ – ведуча функція пуассонівського потоку. Кожен из "r" вузлів функціонує як багатоканальна стохастична система. При надходженні вимоги в таку систему одразу починається її обслуговування. Час обслуговування в i-ому вузлі показниково розподілений з параметром μ_i, $i=1,2,...r$. Після завершення обслуговування в i-ому вузлі вимога з імовірністю p_{ij} надходить для обслуговування в j-ий вузол та з імовірністю $p_{ir+1}=1-\sum_{j=1}^{r} p_{ij}$ залишає мережу, $P=\|p_{ij}\|_1^r$ – матриця маршрутизації мережі. Додатковий вузол з номером "$r+1$" інтерпретується як "вихід" з мережі.

Згідно системі позначень, яка прийнята в теорії стохастичних мереж, описану вище модель будемо позначати символом $[M_t \mid M \mid \infty]^r$.

Процесом обслуговування вимог в мережі типу $[M_t \mid M \mid \infty]^r$ будемо називати r-вимірний процес $Q'(t)=(Q_1(t),...,Q_r(t))$, де $Q_i(t)$, $i=1,2,...r$ – кількість вимог в i-ому вузлі в момент часу t. Наша головна мета – вивчити асимптотичну поведінку процесу $Q(t)$, $t\ge 0$, при умові великого навантаження.

2. Асимптотична поведінка процесу обслуговування при умові великого навантаження. Перевантажений режим обумовлюється наступною поведінкою параметрів мережі.

Умова 1. Вхідний потік залежить від "n" (номера серії) таким чином, що на будь-якому скінченному інтервалі $[0,T]$

$$n^{-1}\Lambda_i^{(n)}(nt) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} \Lambda_i^{(0)}(t)\in C[0,T], \qquad i=1,2,...r, \tag{1}$$

де $C[0,T]$ – простір неперервних функцій, заданих на відрізку $[0,T]$, символ $\overset{U}{\Rightarrow}$ означає збіжність в рівномірній топології.

Розглянемо два важливих для застосувань випадки, коли умова 1) виконується. У зв'язку з цим тимчасово будемо вважати, що пуассонівський потік $\nu_i(t)$ регулярний: $\Lambda_i(t)=\int_0^t \lambda_i(u)du$, де $\lambda_i(u)$ – миттєве значення параметра (див., наприклад, [1], стор. 100). Такий потік природньо називати пуассонівським потоком зі змінним параметром.

1) Якщо для регулярного потоку

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_i(t)=\lambda_i>0,$$

то Умова 1 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t)=\lambda_i t$.

Це випливає з оцінки

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \lambda_i(u)du-\lambda_i\right| \le \frac{1}{t}\int_{\varepsilon t}^t \left|\lambda_i(u)-\lambda_i\right|du+\frac{1}{t}\int_0^{\varepsilon t}\left|\lambda_i(u)-\lambda_i\right|du \le \le (1-\varepsilon)\delta(\varepsilon t)+(\lambda_i^*+\lambda_i)\varepsilon,$$

де $\varepsilon\in(0,1)$, $\sup_{u\ge 0}\lambda_i(u)=\lambda_i^*$, $\delta(t')\to 0$ при $t'\to\infty$.

2) Нехай тепер $\lambda_i(t)$ періодична з періодом T_i функція:

$$\lambda_i(nT_i+t)=\lambda_i(t) \text{ для } n=1,2,... \text{ і } 0\le t<T_i.$$

Тоді Умова 1 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t)=\left(\int_0^{T_i}\lambda_i(u)du\right)t$. Дійсно

$$\frac{\Lambda_i(t)}{t}=\frac{\int_0^t \lambda_i(u)du}{t}=\frac{[t]_{T_i}\int_0^{T_i}\lambda_i(u)du+\int_0^{\{t\}_{T_i}}\lambda_i(u)du}{[t]_{T_i}+\{t\}_{T_i}}\underset{t\to\infty}{\to}\lambda_i,$$

де $[t]_{T_i}=\max\{n\in Z_+ : nT_i\le t\}$, $\{t\}_{T_i}=t-[t]_{T_i}$, Z_+ – множина цілих невід'ємних чисел.

Умова 2. Інтенсивності обслуговування у кожному вузлі залежать від "n" (номера серії) таким чином, що

$$\lim_{n\to\infty} n\mu_i(n)=\mu_i>0, \quad i=1,2,...,r.$$

Разом умови 1 та 2 означають, що $[M_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$ - мережа функціонує у перевантаженому режимі.

В контексті умов 1, 2 розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t)=n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt)-q^{(n)}(nt)), \qquad t\ge 0,$$

де $q^{(n)\prime}(nt)=(q_1^{(n)}(nt),...,q_r^{(n)}(nt))$, $q_j^{(n)}(nt)=\sum_{i=1}^{r}\int_0^{nt} d\Lambda_i^{(n)}(u)p_{ij}^{(n)}(nt-u)$, $j=1,...,r$, $p_{ij}^{(n)}(\tau)$ – елементи матриці $P^{(n)}(\tau)=\left\|p_{ij}^{(n)}(\tau)\right\|_1^r=\exp\{\Delta(\mu^{(n)})(P-I)\tau\}$, $\mu^{(n)\prime}=(\mu_1^{(n)},...,\mu_r^{(n)})$, $\Delta(x)=\left\|\delta_{ij}x_i\right\|_1^r$ - діагональна матриця з вектором $x'=(x_1,...,x_r)$ на головній діагоналі, $I=\left\|\delta_{ij}\right\|_1^r$ – одинична матриця.

Для того, щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n\ge 1$, при $n\to\infty$, ми введемо два незалежних гауссівських процеси $\xi^{(i)\prime}(t)=(\xi_1^{(i)}(t),...,\xi_r^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями $E\xi^{(1)}(t)=0$ та кореляційними матрицями

$$R^{(1)}(t)=E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)\prime}(t)=\int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau),$$

$$R^{(1)}(s,t)=E\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(s)E\xi^{(1)\prime}(t)=R^{(1)}(s)P(t-s), \quad s<t,$$

де $\Lambda^{(0)\prime}(t)=(\Lambda_1^{(0)}(t),...,\Lambda_r^{(0)}(t))$, $P(\tau)=\exp\{\Delta(\mu)(P-I)\tau\}$.

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$

$$E\xi^{(2)}(t)=0,$$

$$R^{(2)}(t)=\int_0^t[\Delta[(d\Lambda^{(0)}(\tau))'P(t-\tau)]-P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)],$$

$$R^{(2)}(s,t)=R^{(2)}(s)P(t-s), \quad s<t.$$

У наступній теоремі побудовано апроксимативний процес для процесу обслуговування при перевантаженому режимі роботи мережі.

Теорема 1. Нехай для $[M_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$ - мережі виконуються Умови 1, 2 . У початковий момент часу $t=0$ мережа порожня: $Q^{(n)\prime}(0)=(0,...,0)$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0,T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n\to\infty$ збігається в рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t)$.

Перед тим, як доводити теорему, отримаємо ряд допоміжних результатів.

Лема 1. Нехай $\nu^{(n)}(t)$ – неоднорідний пуассонівський процес з ведучою функцією $\Lambda^{(n)}(t)$, для якої виконується умова 1. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0,T]$ послідовність випадкових процесів при $n\to\infty$ $W^{(n)}(t)=n^{-1/2}(\nu^{(n)}(nt)-\Lambda^{(n)}(nt))$ – збігається в рівномірній топології до вінерівського процесу $W^{(0)}(t)$ з нульовим переносом $EW^{(0)}(t)=0$ та коефіцієнтом дифузії $VarW^{(0)}(t)=\Lambda^{(0)}(t)$.

Доведення. Збіжність скінченновимірних розподілів процесу $W^{(n)}(t)$ до $W^{(0)}(t)$ випливає з того, що для будь-якого натурального N та моментів часу $0<t_1<...<t_N$ характеристична функція сумісного розподілу $\nu(t_1),...,\nu(t_N)$ дорівнює

$$E\exp\{i\sum_{k=1}^{N}s(k)\nu(t_k)\}=\prod_{k=0}^{N-1}\exp\{[\Lambda(t_{k+1})-\Lambda(t_k)][\exp(i\sum_{m=k+1}^{N}s(m))-1]\}, \qquad \text{де } (s(1),...,s(N))\in R_N,\ t_0=0.$$

Тепер для того, щоб довести збіжність в рівномірній топології, достатньо перевірити виконання умови з [2] (стор. 493).

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_2-t_1|\le h} P\{\left|W^{(n)}(t_2)-W^{(n)}(t_1)\right|>\varepsilon\}=0 \tag{2}$$

Згідно нерівності Чебишова

$$\sup_{|t_2-t_1|\le h} P\{\left|W^{(n)}(t_2)-W^{(n)}(t_1)\right|>\varepsilon\}\le \varepsilon^{-2}\sup_{t\in[0,T]}[n^{-1}\Lambda(n(t+h))-n^{-1}\Lambda(nt)],$$

З Умови 1 випливає, що для будь-якого $0<\delta<T$

$$\sup_{t\in[0,\delta)}[n^{-1}\Lambda(n(t+h))-n^{-1}\Lambda(nt)]\le n^{-1}\Lambda(n(\delta+h))\le(\lambda+\varepsilon_n)(\delta+h)$$

та

$$\sup_{t\in[\delta,T]}[n^{-1}\Lambda(n(t+h))-n^{-1}\Lambda(nt)]\le \lambda h+(2T+h)\varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Звідси знаходимо

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_2-t_1|\le h} P\{\left|W^{(n)}(t_2)-W^{(n)}(t_1)\right|>\varepsilon\}\le\lambda\delta\varepsilon^{-2}.$$

Оскільки $\delta>0$ довільне, то умова (2) виконується.

Лему доведено.

Надалі через $W_i^{(0)}(t)$, $i=1,2,...,r$, будемо позначати незалежні вінерівські процеси з нульовим переносом $EW_i^{(0)}(t)=0$ та коефіцієнтом дифузії $VarW_i^{(0)}(t)=\Lambda_i^{(0)}(t)$ відповідно. Згідно лемі 1, якщо виконується Умова 1, то вони апроксимують вхідні потоки $\nu_i^{(n)}(t)$, $i=1,2,...,r$. Для $W^{(0)\prime}(t)=(W_1^{(0)}(t),...,W_r^{(0)}(t))$ наведемо такий результат.

Лема 2. Скінченновимірні розподіли $\int_0^t dW^{(0)\prime}(u)P(t-u)$ співпадають зі скінченновимірними розподілами гаусівського процесу $\xi^{(1)}(t)$.

Це твердження являє собою частинний випадок леми 1 з [3].

Обслуговування окремо взятої вимоги у вузлах $[M_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$ - мережі відбувається незалежно від обслуговування інших вимог. Для того, щоб конструктивно задати процес обслуговування, розглянемо ланцюг Маркова $x(t)$, $t\ge 0$, у множині станів $\{1,2,...,r,r+1\}$, який задається локальними характеристиками

$$a_{ij}=\begin{cases}-\mu_i(1-p_{ii}), i=j=1,2,...,r;\\ \mu_i p_{ij}, i\ne j, i=1,2,...r; j=1,2,...,r,r+1;\\ 0, i=r+1, j=1,2,...,r,r+1;\end{cases}$$

та початковим розподілом $p'(0)=(p_1(0),...,p_{r+1}(0))$.

Якщо $p_i(0)=1$, то відповідний ланцюг ми будемо позначати $x^{(i)}(t)$. Стан "$r+1$" для ланцюга $x(t)$ є поглинаючим. Перехідні ймовірності $x(t)$

$$p_{ij}(t)=P\{x(t)=j\,/\,x(0)=i\}=P\{x^{(i)}(t)=j\},\quad i,j=1,...,r$$

є елементами матриці $P(t)=exp\{\Delta(\mu)(P-I)t\}$.

Траєкторія вимоги від моменту надходження в мережу через i-ий вузол і до моменту виходу з неї може бути описана ланцюгом $x^{(i)}(t)$, при цьому поглинання в стані "$r+1$" інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

Введемо випадковий вектор $(\chi_h^i(t))'=(\chi_{1h}^i(t),...,\chi_{rh}^i(t))$, який будемо розглядати як r - вимірний випадковий процес індикаторного типу, траєкторія якого розвивається з плином часу та будується за траєкторією ланцюга Маркова таким чином:

$$\chi^{(i)}(t)=\begin{cases}e_j,\ x^{(i)}(t)=j,\ j=1,2,...,r;\\ e_0,\ x^{(i)}(t)=r+1;\end{cases}$$

де e_j – r-вимірний вектор, j-а компонента якого дорівнює 1, а решта дорівнюють 0, e_0 – r-вимірний вектор, що складається з нулів.

Для довільного натурального N та $z'(i)=(z_1(i),...,z_r(i))$, $i=1,2,...,N$, $|z(i)|\le 1$, через $\Phi^{(m)}=\Phi^{(m)}(t_1,...,t_N,z(1),...,z(N))$, $m=1,2,...,r$, будемо позначати сумісну генератрису векторів $\chi^m(t_1),...,\chi^m(t_N)$, $0<t_1<...<t_N$, $\Phi'=(\Phi^{(1)},...,\Phi^{(r)})$.

Лема 3. Для довільного $N=1,2,...$ та $0<t_1<...<t_N$

$$\Phi=\bar{1}+\sum_{i=1}^{N}P(\Delta t_1)\Delta[z(1)]...P(\Delta t_{i-1})\Delta[z(i-1)]P(\Delta t_i)(z(i)-\bar{1}), \tag{3}$$

де $\bar{1}$ – r-вимірний вектор, що складається з одиниць; $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ ($t_0=0$), $i=1,2,...,N$.

Доведення (3) можна отримати методом математичної індукції за параметром N.

3. *Доведення теореми 1***.** Проаналізуємо поведінку при $n\to\infty$ одновимірних розподілів процесу $\xi^{(n)}(t)$, $t\ge 0$. При фіксованій траєкторії процесу $\nu(t)$ розподіл $Q(t)$ співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m(t)}\chi^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)}),$$

де $\chi^{(m,1)}(t),\chi^{(m,2)}(t),...$ – послідовність незалежних випадкових процесів, скінченновимірні розподіли яких співпадають із скінченновимірними розподілами $\chi^{(m)}(t)$, $\tau_k^{(m)}$ – момент надходження k-ї вимоги в m-ий вузол мережі.

Враховуючи цей факт, а також формулу (2) для $N=1$, генератрису $\Phi(z,t)$, $z'=(z_1,...,z_r)$, $|z|\le 1$, вектора $Q(t)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(t,z)=E\prod_{m=1}^{r}\prod_{k=1}^{\nu_m(t)}[1-p'_m(t-\tau_k^{(m)})(z-\bar{1})], \tag{4}$$

де $p'_m(\tau)=(p_{m1}(\tau),...,p_{mr}(\tau))$ – m-ий рядок матриці $P(\tau)$.

Нехай $\varphi^{(n)}(s)$, $s'=(s_1,...,s_r)\in R_r$ – характеристична функція $\xi^{(n)}(t)$. З урахуванням (4)

$$\varphi^{(n)}(s)=Ee^{i\xi^{(n)\prime}s}=\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}\times E\exp\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(nt)}\ln[1-p_m^{(n)\prime}(nt-\tau_k^{(m)})(e^{is/\sqrt{n}}-\bar{1})]\},$$

де $(e^{is/\sqrt{n}})'=(e^{is_1/\sqrt{n}},...,e^{is_r/\sqrt{n}})$.

Позначимо через $(s^2)'=(s_1^2,...,s_r^2)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(s)=\lim_{n\to\infty}\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}\times$$

$$\times E\exp\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(nt)}[\frac{i}{\sqrt{n}}p'_m(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})s-\frac{1}{2}\frac{1}{n}p'_m(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})s^2+\frac{1}{2}\frac{1}{n}s'p_m(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})p'_m(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})s]\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}E\exp\{in^{-1/2}\int_0^t d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_0^t d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s^2+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\nu_m^{(n)}(n\tau)s'p_m(t-\tau)p'_m(t-\tau)s\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\{-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_0^t d\Lambda^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s^2+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\Lambda_m^{(n)}(n\tau)s'p_m(t-\tau)p'_m(t-\tau)s\}E\exp\{i\int_0^t dW^{(n)\prime}(\tau)P(t-\tau)s\},$$

де $W^{(n)\prime}(\tau)=(W_1^{(n)}(\tau),...,W_r^{(n)}(\tau))$, $W_k^{(n)}(\tau)=n^{-1/2}(\nu_k^{(n)}(n\tau)-\Lambda_k^{(n)}(n\tau))$, $k=1,2,...,r$.

Використовуючи Умову 1 та твердження лем 1, 2, знаходимо:

$$\lim_{n\to}\varphi^{(n)}(s)=\exp\{-\frac{1}{2}\int_0^t d\Lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t-\tau)s^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\Lambda_m^{(0)}(\tau)s'p_m(t-\tau)p'_m(t-\tau)s-$$

$$-\frac{1}{2}s'\int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)s\}=$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}s'\int_0^t[\Delta[d\Lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t-\tau)]-P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)]s-\frac{1}{2}s'\int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)s\}.$$

Граничний вираз представляє собою характеристичну функцію $\xi^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t)$. Таким чином збіжність одновимірних розподілів доведено.

Тепер розглянемо двовимірні розподіли. При фіксованій траєкторії вхідного потоку розподіл вектора $(Q(t_1),Q(t_2))$, $0<t_1<t_2$, співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}(\sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)}\chi^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)}),\sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)}\chi^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})+\sum_{k=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)}\chi^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})).$$

Застосувавши формулу (2) для $N=2$, сумісну генератрису $\varphi^{(n)}(s(1),s(2))$, $s(1),s(2)\in R_r$, вектору $(Q(t_1),Q(t_2))$ можна записати у такому вигляді:

$$\Phi(t_1,t_2,z(1),z(2))=E\{\prod_{m=1}^{r}\prod_{k=1}^{\nu_m(t_1)}[1+p'_m(t_1-\tau_k^{(m)})(z(1)-\bar{1})+$$

$$+p'_m(t_1-\tau_k^{(m)})\Delta[z(1)]P(\Delta t_2)(z(2)-\bar{1})]\prod_{k=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)}[1+p'_m(t_2-\tau_k^{(m)})(z(2)-\bar{1})]\}.$$

Звідси знаходиться границя сумісної генератриси $\varphi^{(n)}(s(1),s(2))$, $s(1),s(2)\in R_r$, векторів $\xi^{(n)}(t_1)$ та $\xi^{(n)}(t_2)$.

Аналогічно перевіряється збіжність N-вимірних розподілів для $N\geq 2$.

Збіжність скінченновимірних розподілів можна посилити до збіжності $\xi^{(n)}(t)$ в рівномірній топології. Для цього потрібно використати збіжність нормованого вхідного потоку $W^{(n)}(t)$ до $W^{(0)}(t)$ в рівномірній топології та подання процесу обслуговування як суми процесів індикаторного типу на вхідному потоці (див. [3]).

Теорему доведено.

Зауважимо, що частина $\xi^{(1)}(t)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями вхідного потоку, а $\xi^{(2)}(t)$ – з флуктуаціями часу обслуговування.

4. Граничний процес як багатовимірна дифузія. В одновимірному випадку для гауссівських процесів існує критерій в термінах необхідності і достатності для перевірки марковської властивості ([5], теорема 1 на ст. 115). Основна умова цього критерію виписується в термінах кореляцій і її досить зручно перевіряти на практиці. У багатовимірному випадку ситуація ускладнюється і загального критерію немає. Наведемо один варіант достатніх умов марковості для r-вимірних гауссівських процесів, які подібні до умов з роботи [4], У подальшому застосуємо цей критерій до граничного процесу з попереднього розділу.

Розглянемо r-вимірний гауссівський процес $\xi'(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_r(t))$ з нульовими середніми значеннями:

$$E\xi_i(t)=0,\quad i=1,2,...,r,$$

та кореляційними матрицями:

$$R(t)=E\xi(t)\xi'(t)-E\xi(t)E\xi'(t),$$

$$R(s,t)=E\xi(s)\xi'(t)-E\xi(s)E\xi'(t),\quad s<t.$$

Теорема 2. Нехай для гауссівського процесу $\xi(t)$, для деякої матриці A та будь-яких $0\leq s<t$, функції $R(s)$ та $R(s,t)$ пов'язані між собою таким чином:

$$R(s,t)=R(s)P(t-s),\ \text{де}\ P(t)=\exp(At);$$

Тоді $\xi(t)$ є марковським процесом, причому умовний розподіл $P(\xi(t)\in B/\xi(s)=x)$, $B\in \mathrm{B}_{R^r}$ (σ - алгебра борелівських підмножин R_r), є гауссівським з вектором середніх значень $P'(t-s)x$ та кореляційною матрицею $R(t)-P'(t-s)R(s)P(t-s)$.

Доведення. Спочатку доведемо, що

$$M[\xi'(t)/\xi(s)]=\xi'(s)P(t-s). \tag{5}$$

У випадку, коли матриця $R(s)$ неособлива, з властивостей багатовимірного нормального розподілу ([6], стор. 467) випливає

$$M[\xi'(t)/\xi(s)]=[P'(t-s)B(s)B^{-1}(s)\xi(s)]'=\xi'(s)P(t-s).$$

У загальному випадку розглянемо вектор $U=\xi(t)-P'(t-s)\xi(s)$.

Оскільки $MU = 0$ і

$$M\xi(s)U' = M\xi(s)\xi'(t) - [M\xi(s)\xi'(s)]P(t-s) = R(s,t) - B(s)P(t-s) = 0,$$

то U і $\xi(s)$ некорельовані, а отже незалежні як гауссівські вектори. Звідси маємо подання

$$\xi'(t) = \xi'(s)P(t-s) + U. \tag{6}$$

Застосовуючи оператор $M[\cdot / \xi(s)]$ до обох частин (6), приходимо до (5).

Зафіксуємо моменти часу $0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1}$ і нехай тепер

$$U = \xi(t_{n+1}) - M[\xi(t_{n+1}) / \xi(t_n)] = \xi(t_{n+1}) - P'(t_{n+1} - t_n)\xi(t_n).$$

Тоді для будь-якого $1 \le k \le n$ знаходимо:

$$M\xi(t_k)U' = M\xi(t_k)\xi'(t_{n+1}) - M(\xi(t_k)[M\xi'(t_{n+1}) / \xi(t_n)]) =$$

$$= R(t_k)P(t_{n+1} - t_k) - M(\xi(t_k)\xi'(t_n))P(t_{n+1} - t_n) =$$

$$= R(t_k)P(t_{n+1} - t_k) - R(t_k)P(t_n - t_k)P(t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Таким чином вектор U не залежить від усіх $\xi(t_k)$, $k = 1,...,n$. Оскільки $\xi(t_{n+1}) = U + P'(t_{n+1} - t_n)\xi(t_n)$, то процес $\xi(t)$ має марковську властивість.

Друга частина теореми випливає з виду умовного розподілу підмножини компонент гауссівського вектора при фіксованих компонентах, що залишились ([6], стор. 467). Теорема доведена.

Множина G_A гауссівських процесів, для яких виконується умова теореми 2 і відповідні матриці A однакові, задовольняє умові замкненості: лінійна комбінація двох незалежних процесів з G_A належить G_A. Таким чином, як наслідок з теореми 2 ми отримуємо такий цікавий факт: сума двох незалежних марковських G_A - процесів є марковським процесом.

Зауважимо, що багатовимірний процес Орнштейна-Уленбека ([8], ст. 166) задовольняє умові теореми 2.

Застосуємо тепер критерій марковості, який дає теорема 2, до граничного гауссівського процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Наслідок 1. Якщо $\Lambda_i^{(0)}(t) = \int_0^t \lambda_i^{(0)}(u)du$, $\lambda_i^{(0)}(u) \in C[0,T]$, $i = 1,2,...,r$, то граничний гауссівський процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$, $t \in [0,T]$ представляє собою r - вимірний дифузійний процес з вектором переносу $A(x) = A'x$ і матрицею дифузії $B(t) = \Delta[\lambda^{(0)\prime}(t) + q'(t)A] - A'\Delta[q(t)] - \Delta[q(t)]A$, де

$$A = \Delta(\mu)(P - I), \quad q'(t) = \int_0^t \lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t-\tau)d\tau, \quad \lambda^{(0)\prime}(\tau) = (\lambda_1^{(0)}(\tau),...,\lambda_r^{(0)}(\tau)).$$

Якщо через $R(t), R(s,t), s < t$, позначити відповідні кореляційні матриці процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$, то для них будуть виконуватися умови теореми 2 при $A = \Delta(\mu)(P - I)$, і $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ буде марковським дифузійним процесом. Вектор переносу та матриця дифузії визначається видом умовного розподілу $P(\xi(t) \in B / \xi(s) = x)$, $B \in \mathrm{B}_{R^r}$.

Таким чином, наслідок 1 належить до результатів по дифузійній апроксимації перевантажених систем и мереж масового обслуговування. В цьому сенсі він узагальнює результати розділу 4.2 монографії [7] на випадок вхідних пуассонівських потоків з інтенсивністю, що залежить від часу.

Подання граничного процесу у вигляді багатовимірної дифузії є привабливим в тому, що дифузійний процес визначається своїми локальними характеристиками і при аналізі функціоналів від нього можна використовувати розвинутий апарат марковських дифузійних процесів. Однак разом з тим є і втрати, оскільки тепер граничний процес не відбиває в деталях структуру дограничного процесу обслуговування.

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М., КомКнига, 2005. – 400 с. 2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. – М., Наука, 1971. – Том 1.– 664 с. 3. Лебєдєв Є.О. Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування // Теорія ймовірностей та математична статистика, вип. 68, 2003. — С. 81–92. 4. Лебєдєв Є.О. Про марківську властивість багатовимірних гаусівських процесів // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. № 4, 2001. — С. 287–291. 5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М., Мир, 1984. Том 2. 752с. 6. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. – М., Наука, 1968. – 548 с. 7. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. – К.: Либідь, 1992. – 208 с. 8. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. – К., Наукова думка, 1983. – 316 с.

Надійшла до редколегії 08.10.12