3. Зубенко В.В. Про комунікативну інформатику // Вісник КНУ ім.Тараса Шевченка, сер. фіз.-мат.наук, вип.4. – 2012.
4. Нікітченко М.С. Шкільняк С. С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
5. Зубенко В.В. Элементарные програмные алгебры: Автореф. дисс. на соиск. степ. канд.физ.-мат. наук / Зубенко В.В. – К., 1986.
6. Зубенко В.В. Элементарная схематология //В кн.: Системное и теоретичское програмирование. – Кишинев, 1983.
7. Клини С. Математика метаматематики. – М., 1956.
8. Манна З. Теория неподвижной точки программ // Кибернетический сборник. Новая серия. – М.: Мир, 1978. – Вып. 15.
9. Мальцев А. И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
10. Нікітченко М.С.Теорія програмування. Частина І: Навчальний посібник. – Ніжин, 2010.
11. Плюшкявичус Р.А., и др. О прикладных логиках // Кибернетика, №2. – 1979.
12. Редько В.Н., Редько І.В., Гришко Н.В. Дескриптивні основи сутнісної платформи//Проблеми програмування, № 2-3.
13. Nikitchenko M. Chentsov A. Basics of Intensionalized Data: Presets, Sets and Nominats // Computer Science Journal of Moldova, vol. 20, no.3 (60). – 2012.

Надійшла до редколегії 08.04.13

В. Зубенко, канд. физ.-мат. наук, доц.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

КОМПОЗИЦИОННАЯ МОДЕЛЬ КОММУНИКАТИВНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Рассматривается алгебраическая модель коммуникативных информационных систем.
Ключевые слова: композиционная модель, коммуникативная система, конструктор правило декларации, эквитонное расширения.

V. Zubenko, PhD. Sci. Sciences,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kiev

COMPOSITIONAL COMMUNICATIVE MODEL INFORMATION SYSTEMS

The algebraic model of communicative informations systems is considered.
Keywords: composite model communication system designer usually Declaration equitone expansion.

УДК 519.852:519.876

В. Кудін, д-р техн. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО СХЕМИ МЕТОДУ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Проаналізовано варіанти методу базисних матриць для розв'язання двоїстої пари задач лінійного програмування з однотипними обмеженнями. На прикладі матричної гри у змішаних стратегіях.

Ключові слова: метод базисних матриць пряма и двоїстна задача.

Вступ. Для багатьох практичних задач встановлення існування та знаходження оптимального розв'язку, наприклад, задачі лінійного програмування (матричної гри) є лише однією із задач дослідження [1-6]. Виникає і ряд інших задач такі як, дослідження властивостей розв'язків. Від вибору варіанту симплекс-методу та його алгоритму залежить ефективність розв'язання таких задач вцілому. Слід зазначити, що ряд задач потребують аналізу як прямої, так і двоїстої задачі, наприклад, матричні ігри у змішаних стратегіях [5-6].

Встановлено [1,5], як побудувати пару двоїстих задач лінійного програмування з однотипними обмеженнями, розв'язок яких визначає оптимальні стратегії гравців заданої матричної гри. Параметри задач лінійного програмування, що відповідають заданій матричній грі, вибираються в процесі конструктивного доведення основної теореми теорії ігор [1].

Постановка задачі. В даній роботі розглянуто варіанти алгоритмічних схем методу базисних матриць [7] для задач з однотипними обмеженнями (саме до таких відносяться матричні ігри у змішаних стратегіях, як задачі лінійного програмування).

В процесі доведення основної теореми теорії ігор для матричної гри з платіжною матрицею $A = \|a_{ij}\|_{i=1,\, j=1}^{m,n}$ $(a_{ij} > 0)$ було встановлено зв'язок з парою двоїстих задач лінійного програмування типу (1)-(3) та (4)-(6) з однотипними обмеженнями, які наведені нижче.

Пряма задача:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \tag{1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \quad . \tag{3}$$

Або в матричному вигляді введемо в розгляд задачу [1] лінійного програмування вигляду:

$$\min Cx,$$
$$Ax \le B^T ,$$
$$x \ge 0 ,$$

де $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Вважаємо, що модель виду (1)–(3) має матрицю обмежень A в якій кількість стовпців більш ніж рядків ("довга").

Двоїста задача:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \ , \tag{4}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1; \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + ... + a_{m2}u_m \geq c_2; \\ .... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + ... + a_{mn}u_m \geq c_n; \end{cases} \tag{5}$$

$$u_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}\ ). \tag{6}$$

Двоїста до (1)–(3) може бути записана у вигляді:

$$\min Bu,$$
$$A^T u \geq C^T,$$
$$u \geq 0\ ,\ (\ u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T\ ).$$

Встановлено, що матрична гра у змішаних стратегіях подається як двоїста пара задач лінійного програмування [2-4].

Пряма задача вигляду (1)-(3), де $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, c_j = 1, \ j = \overline{1,n}$.

Двоїста задача вигляду (4)-(6), де $u_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \ c_j = 1, \ j = \overline{1,n}.$

Задача (4)-(6) є двоїстою до задачі (1)-(3), яку називають прямою.

Положення методу базисних матриць (МБМ).

Означення 1. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати базисною (БМ), а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С базисним (опорним) (БР).

Дві базисні матриці з відмінним одним рядком будемо називати суміжними.

Нехай: β_{ij}, $i, j \in I = \{1, 2, ..., m\}$ – елементи $A_б$; e_{ri} та $(A_б^{-1})_i$ елементи та i-й стовпець $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ - вектор розкладу нормалі $a_r u_1 \leq c_r$ за рядками $A_б$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ - вектор розвинення нормалі цільової функції (4) за рядками, $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ – нев'язка r-го обмеження (5), а $\Delta_0 = Bu_0$ – значення цільової функції в вершині u_0, які утворюють вектор $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$; $J_б, J_H$ – множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (5).

Всі означені елементи при переході до суміжної $\overline{A}_б$, яка утворюється із A_b заміною її рядка a_k на a_l, що не входить в $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\beta}_{ij}$, $\overline{\alpha}_r$, $\overline{L}_i$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $(\overline{A}_b^{-1})_i$ $\overline{\alpha}_0$.

За своїми властивостями БМ можна розподілити на наступні:

Означення 2. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати допустимою базисною, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С допустимим базисним при виконанні умови

$$\begin{aligned} \Delta_r &= a_r u_0^T - c_r < 0, \ \ r \notin J_b, \\ \Delta_r &= a_r u_0^T - c_r = 0, \ \ r \in J_b \end{aligned} .$$

Означення 2. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати *псевдо базисною*, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С псевдо базисним при виконанні умови $\alpha_{0i} \geq 0, i = \overline{1,m}$.

Означення 3. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати *штучною базисною,* а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С штучно базисним якщо знаки $\Delta_r = a_r u_0 - c_r, \ r \in J$ та $\alpha_{0i}, i = \overline{1,m}$ можуть набувати як від'ємних так і додатніх значень.

Означення 4. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати *невиродженою* базисною, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С невиродженим базисним при виконанні умови $\Delta_r = 0, \ r \in J_б, \Delta_r \neq 0, \ r \notin J_б$.

В протилежному випадку, підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати ***виродженою базисною***, а розв'язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь $A_б u_0 = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$ - підвектор С виродженим базисним при виконанні умови $\Delta_r = 0, \ r \in J_б, \exists\, r, \Delta_r = 0, \ r \notin J_б$.

В сучасних точних методах типу Гауса та відомих сімплекс-методах передбачається, що ведучий елемент перетворення відмінний від нуля (операція ділення на нуль). Обмеження на ведучий елемент має іще і іншу властивість.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ - нормалі, $a_j u \le c_j, j \in J_б$ де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ – індекси обмежень, нормалі яких утворюють $A_б$, a_l – вектор-нормалі $a_l u \le c_l$, $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$ - вектор розвинення a_l за рядками $A_б$.

Лема 1. Необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності системи векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}, a_l, a_{i_{k+1}}, ..., a_{i_m}$ при заміні вектора a_{i_k}, що утворює к-й рядок в $A_б$ вектором а $_l$ є $\alpha_{lk} \neq 0$.

Теорема 1. Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв'язках мають місце такі співвідношення

$$\bar{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \ \bar{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \quad r = \overline{0,n}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \neq k; \tag{7}$$

$$\bar{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \ \ \bar{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \ \ r = \overline{1,m}; \ \ i = \overline{1,m}; \ \ i \neq k; \tag{8}$$

$$\bar{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}} \Delta_l, \ \ j = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\bar{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \ \ \bar{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ \ r = \overline{1,n}; \ r \neq k; \tag{10}$$

$$B\bar{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \tag{11}$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \neq 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку – $\alpha_{lk} < 0$, а умовою зростання цільової функції – $\alpha_{0k} < 0$.

Знаходження початкової базисної матриці та розв'язку. Введемо в розгляд систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Iu = K \tag{12}$$

з відомим розв'язком та оберненою матрицею (допоміжна система), де I – квадратна БМ – (m*m), а K – вектор розмірності m.

Знайти базисну матрицю $A_б$ (підматрицю А) таку, що $A_б u_0^T = c^0$ на основі (12), а u_0 – базисний розв'язок для (5).

Умови Теореми 1 та Леми 1 лежать в основі знаходження величини рангу, початкової базисної матриці та розв'язку (5) з постійними елементами. Це елементи при оптимізаційному аналізі (5).

Алгоритм 1

Крок 1. Проводимо сімплексні ітерації по заміщенню рядків базисної матриці I (12) нормалями обмежень (5), згідно (7)-(11).

Знаходимо відповідні елементи методу: розвинення за рядками базисних матриць обмежень (5), обернену БМ, штучні базисні розв'язки $u_0^{(k)}$, де k - номер ітерації.

Крок 2. Перевіряємо кількість ітерацій r заміщення рядків допоміжної системи рядками основної системи для яких виконуються умови Леми 1 (про опорність): $\alpha_{lk} \neq 0$ - число визначає ранг основної системи.

Крок 3. Якщо кількість ітерацій, для яких $\alpha_{lk}^{(i} \neq 0$, рівна m, то переходимо на наступний крок. В супротивному на передостанній крок.

Крок 4. Знаходимо єдиний розв'язок згідно співвідношення: $A_б^{-1} \cdot c^0 = u^0$ та базисну матрицю (5).

Крок 5. Виконання умови $r < m$ означає порушення умови єдиності розв'язку і потребує подальшого аналізу розв'язності задачі.

Останній крок. Формування вихідної інформації за результатами аналізу (12).

Наслідок 1. Ранг системи (5) визначається кількістю коректних заміщень на основі симплексних ітерацій згідно Леми 1.

На основі теореми 1 та алгоритму 1 знаходиться базисна матриця та розв'язок (5). За своїми властивостями базисні матриці можуть бути відповідно допустимими, псевдо та штучними. Для кожного типу базисної матриці запропонована своя схема аналізу та оптимізації.

Схеми аналізу моделей методом базисних матриць

I. **Схема методу допустимих базисних матриць** (аналіз лінійної моделі на випадок існування допустимої початкової базисної матриці):

між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4), елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних допустимих базисних розв'язках мають місце співвідношення (7)-(11) причому умовою: опорності базисної матриці при вводі вектору нормалі a_l обмеження $a_l u^T \le c_l$ к-м рядком базисної матриці $A_б$ є виконання $\alpha_{lk} \neq 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку є $\alpha_{lk} < 0$, зростання цільової функції $\alpha_{0k} < 0$, спадання – $\alpha_{0k} \ge 0$, сталості $\alpha_{0k} = 0$.

ІІ. Схема методу псевдо базисних матриць (при існуванні початкової псевдобазисної матриці та розв'язку, що знайдено на основі алгоритму 1 встановлено, що

м**іж елементами методу в двох суміжних псевдобазисних матрицях** мають місце співвідношення (7)-(11) причому умовою: опорності псевдобазисності матриці при вводі вектора нормалі a_l обмеження $\alpha_l u^T \le c_l$ на к-ту позицію базисної матриці $A_б$ є $\alpha_{lk} \ne 0$; псевдобазисності опорних розв'язків, тобто $\alpha_{0i} \ge 0, \ i=\overline{1,n}$ є $\alpha_{lk} > 0$: спадання цільової функції у новій псевдобазисній матриці при задачі на максимум є $\Delta_l > 0$, зростання цільової функції $\Delta_l < 0$, сталості $\Delta_l = 0$.

ІІІ. Схема методу штучних базисних матриць (при існуванні початкової штучної базисної матриці та розв'язку, що знайдено на основі алгоритму 1 обгрунтовано:

між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками штучної базисної матриці, елементами обернених матриць, штучними базисними розв'язками, нев'язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних штучних базисних матрицях мають місце співвідношення (4)-(11), які встановлюють єдиний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь з квадратною невиродженою матрицею обмежень за схемою алгоритму 1 та твірні конуса загального розв'язку відповідної системи $A_б u^T \le C^0$, що представляється

$$K = \{u \,/\, u = u_0 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i, \text{ де вершина } u_0, \ \lambda_i > 0, \text{ твірні } e_i = (A_б^{-1})_i \ \} .$$

В сукупності встановлені співвідношення (7)-(11), теореми 1 та леми 1 є основоположними при побудові **обчислювального методу базисних матриць для аналізу та оптимізації** лінійних та слабконелінійних моделей (до таких систем відносяться і матричні ігри у змішаних стратегіях),

схеми методу допустимих базисних матриць (МДБМ),

схеми методу псевдобазисних матриць (МПБМ),

схеми методу штучних псевдобазисних матриць (МШБМ).

Обгрунтування положень наведених схем методу базисних матриць детально розкрито в [7].

Встановлено, що аналіз та оптимізацію в ЛС на основі МБМ доцільно проводити в такій послідовності.

Фази дослідження лінійних моделей:

- визначення рангу r матриці обмежень (5) та грані мінімальної розмірності,
- знаходження базисної матриці (корекція рангу),
- аналіз розв'язності (сумісності, обмеженості, замкнутості,), регуляризація нерозв'язності,
- побудова апроксимуючих (оціночних) множин, загальних розв'язків систем лінійних алгебраїчних нерівностей (СЛАН) та СЛАР,
- визначення статусу обмежень (пасивність, активність, породжувать нерозв'язність за сумісністю),
- аналіз оптимальних розв'язків (існування, єдність та структура),
- оцінка впливу збурень на статус обмеження, виродженість, ранг, розв'язки.

Висновки. На основі базового обчислювального методу (МБМ) аналізу та оптимізації лінійних моделей досліджуються наступні задачі:

– дооптимізаційного аналізу (встановлення рангу матриці обмежень та її невиродженості у випадку його повноти, знаходження початкових базисних матриць, встановлення сумісності системи обмежень, побудова початкових оціночних множин – встановлення властивості обмеженості та замкнутості допустимих розв'язків, дооптимізаційне скорочення розмірності моделі);

– оптимізаційного аналізу (знаходження одним із симплекс-методів оптимального розв'язку задачі, існування, єдиності, неєдиності розв'язків або необмеженості множини їх розв'язків, ідентифікація та відсів пасивних та неактивних обмежень системи в ході ітерацій методів, побудові раціональних за критеріями розмірності моделей релаксаційних, агрегаційних та декомпозиційних алгоритмічних схем;

– поелементний, покомпонентний та структурний аналіз лінійної системи, дослідження областей збереження властивостей при варіантах ″збурення″ систем, побудова агрегованих оціночних множин для допустимих множин системи з визначеними властивостями;

– знаходження областей розв'язків лінійних систем, що описуються системами лінійних алгебраїчних рівнянь, аналіз цих множин при різноманітних змінах компонент моделі;

– постоптимізаційний аналіз лінійних систем при регулярних та нерегулярних збуреннях з класу слабонелінійних в елементах та компонентах моделі (однопараметричні функціонально лінійно та нелінійно залежні від параметру, а також багатопараметричній нелінійній залежності від векторного параметру;

При розв'язанні двоїстої пари задач лінійного програмування (матричної гри у змішаних стратегіях) на основі методу базисних матриць можна встановити властивості оптимальних розв'язків (стратегій гравців) прямої та двоїстої задачі (єдиність, неєдиність) та побудувати ефективні алгоритми.

Список використаних джерел

1. Golshteyn E.G., Yudin D.B. New directions in linear programming. – M. – Sovetskoe radio. – 1969, – 524p. (in Russian).
2. Dantzig G.B Linear programming and application. M.: Progress. – 1966. (in Russian).
3. Dantzig G.B., Thapa M.N. Linear Programming 1: introduction, Springer. – 1997. – 435 p.
4. Dantzig G.B. Dikin's Interior Method for solving LP manuscript, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, – 1988.
5. Golshteyn E.G., Yudin D.B. Linear programming/.Theory and methods. –M.: Nauka, – 1963. – 776 p. (in Russian).
6. Leon S. Lasdon . Optimization theory for large System. – M.: Nauka, – 1975. – 430 p. (in Russian).
7. Kudin V. I., Lyashko S.I., Khritonenko N.V., Yatsenko Yu.P. Analysis of the properties of a linear system using the method of artificial basis matrices // Kibernetika i sistemny analiz. – 2007. – N 4. – P. 119–127 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 29.05.13

В. Кудин, д-р техн. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СХЕМЫ МЕТОДА БАЗИСНЫХ МАТРИЦ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Проанализированы варианты метода базисных матриц для решения двойственной пары задач линейного программирования с однотипными ограничениями. На примере матричной игры в смешанных стратегиях.
Ключевые слова: метод базисных матриц, прямая и двоистна задача.

V. Kudyn, Dr. Sc .. Science
Kiev National University of Taras Shevchenko, Kiev

METHOD OF CIRCUIT ANALYSIS BASIS MATRICES LINEAR SYSTEMS

Analyzed variants of basis matrices for solving the dual pair of linear programming problems with the same type of restrictions. The example matrix game in mixed strategies.
Keywords: method of basis matrices, direct and dual task.

УДК 517.929

А. Сиренко, асп.,
Д. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕДИНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В работе предлагаются достаточные условия и алгоритм нахождения единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем.
Ключевые слова: гибридная система, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

Введение

Одним из бурно развивающихся в последнее время направлений теории динамических систем является исследование устойчивости гибридных систем [1-3]. В системах этого типа подразумевается, что динамика на отдельных этапах описывается подсистемами различного вида. В частности, гибридные системы могут быть заданы набором систем обыкновенных дифференциальных уравнений с логическим законом переключения. Переключение может быть задано фиксированными временными промежутками или алгебраическими условиями принадлежности фазовой координаты определенным областям. Одним из важных направлений динамики систем указанного типа является исследование устойчивости с использованием второго метода Ляпунова [2,3]. Как отмечалось в ряде работ за счет выбора закона переключения из двух неустойчивых систем можно составить одну асимптотически устойчивую систему и наоборот, из двух асимптотически устойчивых одну неустойчивую [4]. Поэтому одной из центральных проблем исследования устойчивости гибридных систем является проблема существования единой функции Ляпунова [5]. Вопросы существования единой функции Ляпунова для систем дифференциальных уравнений рассматривались в работах [5,6]. В работе [6] получены необходимые и достаточные условия существования единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем на плоскости. Насколько известно авторам настоящей статьи, аналогичных результатов для систем общего вида не существует.

1. Линейные системы общего вида

Пусть гибридная система состоит из двух линейных стационарных систем

$$\dot{x} = A_1 x \tag{1.1}$$

и

$$\dot{x} = A_2 x \tag{1.2}$$

Если матрицы A_1 и A_2 асимптотически устойчивы, то при произвольных положительно определенных матрицах C_1 и C_2 матричные уравнения Ляпунова

$$A_1^T H + HA_1 = -C_1 \tag{1.3}$$

и

$$A_2^T H + HA_2 = -C_2 \tag{1.4}$$

имеют единственные решения – положительно определенные матрицы H_1 и H_2 [7,8]. И для каждой из систем (1.1), (1.2) существует своя функция Ляпунова квадратичного вида $V_1(x) = x^T H_1 x$ и $V_2(x) = x^T H_2 x$. Интерес представляет нахождение простых и легко проверяемых условий существования и алгоритма нахождения "единой" для обеих систем квадратичной функции Ляпунова.

В работах [9,10] было показано, что пространство симметричных положительно определенных матриц образует выпуклый конус K_0 с центром в начале координат, лежащий в пространстве R^N, $N = \frac{n(n+1)}{2}$, т.е. $K_0 \subset R^N$. А множество положительно определенных матриц, являющихся решением уравнения Ляпунова, представляет собой выпуклый конус K_1, находящийся внутри конуса K_0, т.е. $K_1 \subset K_0 \subset R^N$. Очевидно, что системам (1.1) и (1.2) отвечают два конуса K_1 и K_2. И вопрос существования единой для систем (1.1) и (1.2) функции Ляпунова эквивалентен воп-