В. Кудин, д-р техн. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СХЕМЫ МЕТОДА БАЗИСНЫХ МАТРИЦ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Проанализированы варианты метода базисных матриц для решения двойственной пары задач линейного программирования с однотипными ограничениями. На примере матричной игры в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: метод базисных матриц, прямая и двоистна задача.

V. Kudyn, Dr. Sc .. Science
Kiev National University of Taras Shevchenko, Kiev

METHOD OF CIRCUIT ANALYSIS BASIS MATRICES LINEAR SYSTEMS

Analyzed variants of basis matrices for solving the dual pair of linear programming problems with the same type of restrictions. The example matrix game in mixed strategies.

Keywords: method of basis matrices, direct and dual task.

УДК 517.929

А. Сиренко, асп.,
Д. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЕДИНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В работе предлагаются достаточные условия и алгоритм нахождения единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем.

Ключевые слова: гибридная система, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

Введение

Одним из бурно развивающихся в последнее время направлений теории динамических систем является исследование устойчивости гибридных систем [1-3]. В системах этого типа подразумевается, что динамика на отдельных этапах описывается подсистемами различного вида. В частности, гибридные системы могут быть заданы набором систем обыкновенных дифференциальных уравнений с логическим законом переключения. Переключение может быть задано фиксированными временными промежутками или алгебраическими условиями принадлежности фазовой координаты определенным областям. Одним из важных направлений динамики систем указанного типа является исследование устойчивости с использованием второго метода Ляпунова [2,3]. Как отмечалось в ряде работ за счет выбора закона переключения из двух неустойчивых систем можно составить одну асимптотически устойчивую систему и наоборот, из двух асимптотически устойчивых одну неустойчивую [4]. Поэтому одной из центральных проблем исследования устойчивости гибридных систем является проблема существования единой функции Ляпунова [5]. Вопросы существования единой функции Ляпунова для систем дифференциальных уравнений рассматривались в работах [5,6]. В работе [6] получены необходимые и достаточные условия существования единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем на плоскости. Насколько известно авторам настоящей статьи, аналогичных результатов для систем общего вида не существует.

1. Линейные системы общего вида

Пусть гибридная система состоит из двух линейных стационарных систем

$$\dot{x} = A_1 x \tag{1.1}$$

и

$$\dot{x} = A_2 x \tag{1.2}$$

Если матрицы A_1 и A_2 асимптотически устойчивы, то при произвольных положительно определенных матрицах C_1 и C_2 матричные уравнения Ляпунова

$$A_1^T H + HA_1 = -C_1 \tag{1.3}$$

и

$$A_2^T H + HA_2 = -C_2 \tag{1.4}$$

имеют единственные решения – положительно определенные матрицы H_1 и H_2 [7,8]. И для каждой из систем (1.1), (1.2) существует своя функция Ляпунова квадратичного вида $V_1(x) = x^T H_1 x$ и $V_2(x) = x^T H_2 x$. Интерес представляет нахождение простых и легко проверяемых условий существования и алгоритма нахождения "единой" для обеих систем квадратичной функции Ляпунова.

В работах [9,10] было показано, что пространство симметричных положительно определенных матриц образует выпуклый конус K_0 с центром в начале координат, лежащий в пространстве R^N, $N = \frac{n(n+1)}{2}$, т.е. $K_0 \subset R^N$. А множество положительно определенных матриц, являющихся решением уравнения Ляпунова, представляет собой выпуклый конус K_1, находящийся внутри конуса K_0, т.е. $K_1 \subset K_0 \subset R^N$. Очевидно, что системам (1.1) и (1.2) отвечают два конуса K_1 и K_2. И вопрос существования единой для систем (1.1) и (1.2) функции Ляпунова эквивалентен вопросу существования непустого пересечения конусов K_1 и K_2. Возьмем в конусе K_1 точку H_1, а в конусе K_2 точку H_2, и соединим их отрезком прямой $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$, $0 \le \alpha \le 1$. Найдем параметр α и условия, накладываемые на матрицы H_1 и H_2, при выполнении которых матрица H_α будет находиться в пересечении конусов K_1 и K_2, т.е. функция Ляпунова $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ будет общей для двух систем (1.1) и (1.2).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть A_1 и A_1 две асимптотически устойчивые матрицы, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_i(A_1) < 0$, $\mathrm{Re}\lambda_i(A_2) < 0$, $i = \overline{1,n}$, C_1 и C_2 – фиксированные, положительно определенные матрицы, H_1 и H_2 – решения соответствующих матричных уравнений Ляпунова

1. Если $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ и $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ являются положительно определенными матрицами, то при произвольном $0 < \alpha < 1$ квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

2. Пусть $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ является положительно определенной матрицей, а матрица $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ не является положительно определенной. Тогда при

$$0 \le \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|} \tag{1.5}$$

квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

3. Пусть $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ не является положительно определенной матрицей, а матрица $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ является положительно определенной.

Тогда при

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha \le 1 \tag{1.6}$$

квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

4. Если ни одна из матриц $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$, $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ не являются положительно определенными матрицами, но выполняется условие

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|},$$

то при произвольном

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|} \tag{1.7}$$

квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет функцией Ляпунова для обеих систем (1.1) и (1.2).

Доказательство. Если матрицы H_1 и H_2 положительно определенные, то при произвольном $0 < \alpha < 1$ матрица $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ будет положительно определенной матрицей. Таким образом, квадратичная функция $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ будет положительно определенной функцией. Вычислим полные производные функции $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ в силу систем (1.1) и (1.2).

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x = -\alpha x^T C_1 x - (1-\alpha)x^T C_{12} x.$$

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x = -(1-\alpha)x^T C_2 x - \alpha x^T C_{21} x.$$

1. Пусть выполняется первое условие, т.е. матрицы $C_{12} = -A_1^T H_2 - H_2 A_1$ и $C_{21} = -A_2^T H_1 - H_1 A_2$ при заданных матрицах H_1 и H_2 являются положительно определенными матрицами. Тогда при произвольном $0 \le \alpha \le 1$ суммы матриц

$$\alpha_1 C_1 + (1-\alpha)C_{12} \text{ и } (1-\alpha)C_2 + \alpha C_{21}$$

будут также положительно определенными, а полные производные для каждой из систем отрицательно определены. Следовательно, при всех значениях $0 \le \alpha \le 1$ функция $V_\alpha(x)$ будет общей функцией Ляпунова для двух систем.

2. Пусть выполняется второе условие. Тогда для полных производных каждой из систем (1.1), (1.2) будет выполняться

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x = -\alpha x^T C_1 x - (1-\alpha)x^T C_{12} x,$$

$$\left.\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\right|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x \le \alpha\|C_{21}\||x|^2 - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2)|x|^2.$$

И, если будет выполняться неравенство

$$\alpha\|C_{21}\| - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2) < 0,$$

т.е.

$$0 \le \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|},$$

то полная производная функции $V_\alpha(x)$ для обеих систем будет отрицательно определенной.

3. Пусть выполняется третье условие. Тогда для полных производных каждой из систем (1.1), (1.2) будет выполняться

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\Big|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x \le -\alpha x^T C_1 x + (1-\alpha)\|C_{12}\|\|x\|^2 .$$

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\Big|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x = -\alpha x^T C_{21} x - (1-\alpha)x^T C_2 x .$$

И, если будет выполняться неравенство

$$-\alpha\lambda_{\min}(C_1) + (1-\alpha)\left|A_1^T H_2 + H_2 A_1\right| < 0 ,$$

т.е.

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + |C_{12}|} < \alpha \le 1 ,$$

то полная производная функции $V_\alpha(x)$ для обеих систем будет отрицательно определенной.

4. Пусть выполняется четвертое условие. Тогда для полных производных каждой из систем (1.1), (1.2) будет выполняться

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\Big|_{(1)} = \alpha x^T\left[A_1^T H_1 + H_1 A_1\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_1^T H_2 + H_2 A_1\right]x \le -\alpha x^T C_1 x + (1-\alpha)\|C_{12}\|\|x\|^2 ,$$

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\Big|_{(2)} = \alpha x^T\left[A_2^T H_1 + H_1 A_2\right]x + (1-\alpha)x^T\left[A_2^T H_2 + H_2 A_2\right]x \le \alpha\|C_{21}\|\|x\|^2 - (1-\alpha)x^T C_2 x \cdot$$

И, если будут одновременно выполняться неравенства

$$-\alpha\lambda_{\min}(C_1) + (1-\alpha)\|C_{12}\| < 0 ,\ \ \alpha\|C_{21}\| - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2) < 0 ,$$

т.е.

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|} ,$$

то полная производная функции $V_\alpha(x)$ для обеих систем будет отрицательно определенной.

Замечание 1.1. Если использовать геометрическую интерпретацию и рассматривать сечение конусов K_1 и K_2, содержащие внутри себя точки H_1 и H_2, то взаимное их расположение и случаи 1-4, представлены на рис. 1.1-1.4.

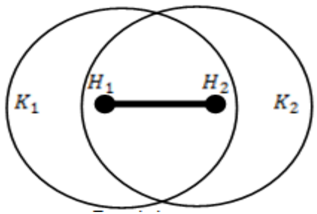

Рис.1.1.
Точки H_1 и H_2 находятся внутри пересечения конусов K_1 и K_2.

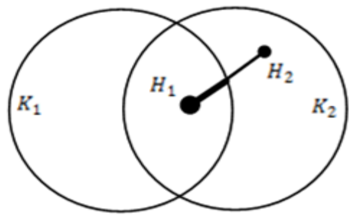

Рис. 1.2.
Точка H_1 находятся внутри пересечения конусов K_1 и K_2, а точка H_2 вне

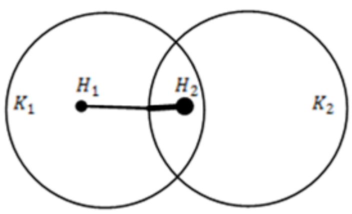

Рис. 1.3.
Точка H_2 находятся внутри конусов K_1 и K_2, а точка H_2 вне

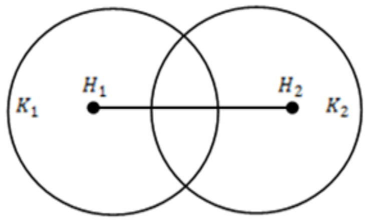

Рис. 1.4.
Точки H_1 и H_2 находятся вне пересечения конусов K_1 и K_2, но на соединяющей их прямой имеется промежуток существования единой функции Ляпунова

Пример 1.1.

1. Рассмотрим систему с матрицей

$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Положив $C_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Рассмотрим систему с матрицей

$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Положив $C_2 = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$.

Возьмем квадратичную форму в виде

$$V_\alpha(x,y) = \alpha x^T H_1 x + (1-\alpha) x^T H_2 x = x^T\left(\alpha H_1 + (1-\alpha) H_2\right) x,$$

т.е.

$$H_\alpha = \alpha\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_1 имеет вид

$$A_1^T H_\alpha + H_\alpha A_1 = -\alpha\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} 28 & -9 \\ -9 & 32 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $C_{12} = \begin{bmatrix} 28 & -9 \\ -9 & 32 \end{bmatrix}$ является положительно определённой. Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_2. Оно имеет вид

$$A_2^T H_\alpha + H_\alpha A_2 = -\alpha\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

Матрица $C_{21} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ тоже является положительно определённой. И, как следует из первого условия теоремы 1, квадратичная форма $V_\alpha(x,y)$ является единой функцией Ляпунова для систем с матрицами A_1 и A_2 при всех $0 \le \alpha \le 1$.

Пример 1.2.

1. Рассмотрим систему с матрицей

$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Положив $C_1 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Рассмотрим систему с матрицей

$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 15 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Положив $C_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ и решив матричное уравнение Ляпунова, получим $H_2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 47 \end{bmatrix}$.

Возьмем квадратичную форму в виде

$$V_\alpha(x,y) = \alpha x^T H_1 x + (1-\alpha) x^T H_2 x = x^T\left(\alpha H_1 + (1-\alpha) H_2\right) x,$$

т.е.

$$H_\alpha = \alpha\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 47 \end{bmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_1 имеет вид

$$A_1^T H_\alpha + H_\alpha A_1 = -\alpha\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} -6 & -14 \\ -14 & 170 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $C_{12} = \begin{bmatrix} -6 & -14 \\ -14 & 170 \end{bmatrix}$ не является положительно определённой. Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова с матрицей A_2. Оно имеет вид

$$A_2^T H_\alpha + H_\alpha A_2 = -\alpha\begin{bmatrix} 16 & -50 \\ -50 & -36 \end{bmatrix} - (1-\alpha)\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Матрица $C_{21} = \begin{bmatrix} 16 & -50 \\ -50 & -36 \end{bmatrix}$ является положительно определённой. И, как следует из третьего условия теоремы 1, квадратичная форма $V_\alpha(x,y)$ является единой функцией Ляпунова для систем с матрицами A_1 и A_2 при

$$\frac{\|C_{12}\|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} \le \alpha \le 1,$$

где $\|C_{12}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} c_{ij}^2} = 171$ и $\lambda_{\min}(C_1) = 6$.

Таким образом при $\frac{171}{177} \le \alpha \le 1$ функция Ляпунова $V_\alpha(x,y)$ будет общей для двух систем.

2. Системы диагонального вида

Рассмотрим системы диагонального вида

$$\dot{x}_i = -\lambda_i x_i \,,\ \lambda_i > 0 \,,\ i = \overline{1,n} \,. \tag{2.1}$$

2.1. Очевидно, что любая квадратичная функция вида

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2 \,,\ h_{ii} > 0 \,,\ i = \overline{1,n}$$

будет функцией Ляпунова для систем этого вида. Действительно, ее полная производная в силу системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} V(x,y) = -2\sum_{i=1}^{n} h_{ii} \lambda_i x_i^2$$

и, учитывая условия (2.1), является отрицательно определенной квадратичной формой.

2.2. Покажем, что квадратичная функция общего вида

$$V(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i x_j \tag{2.2}$$

при наличии ненулевых недиагональных элементов не всегда может быть единой функцией для систем (2.1).

Действительно, как следует из критерия Гурвица [7], условия положительной определенности функции (2.2) имеют вид

$$h_{ii} > 0 \,,\ \Delta_i(H) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ h_{1n} & h_{2n} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix} > 0 \,,\quad i = \overline{1,n} \,, \tag{2.3}$$

Полная производная функции (2.2) в силу диагональной системы (2.1) имеет вид

$$\frac{d}{dt} V(x) = -x^T C x \,,\ C = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 h_{11} & (\lambda_1+\lambda_2) h_{12} & \ldots & (\lambda_1+\lambda_n) h_{1n} \\ (\lambda_2+\lambda_1) h_{12} & 2\lambda_2 h_{22} & \ldots & (\lambda_2+\lambda_n) h_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ (\lambda_n+\lambda_1) h_{1n} & (\lambda_n+\lambda_2) h_{2n} & \ldots & 2\lambda_n h_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Условиями отрицательной определенности полной производной являются

1) $h_{11}\lambda_1 > 0 \,,\ i = \overline{1,n}$,

2) $\Delta_i(C) = \begin{vmatrix} 2\lambda_1 h_{11} & (\lambda_1+\lambda_2) h_{12} & \ldots & (\lambda_1+\lambda_n) h_{1n} \\ (\lambda_2+\lambda_1) h_{12} & 2\lambda_2 h_{22} & \ldots & (\lambda_2+\lambda_1) h_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ (\lambda_n+\lambda_1) h_{1n} & (\lambda_n+\lambda_2) h_{2n} & \ldots & 2\lambda_n h_{nn} \end{vmatrix} > 0 \,,\ i = \overline{1,n} \,.$

Первое условие выполняется всегда. Рассмотрим второе условие. Пусть $\lambda_1 = \lambda_0$ заданная величина. Определим, насколько может отличаться от λ_0 величина λ_2 , чтобы для систем (2.1) существовала единая функция Ляпунова. При фиксированном $\lambda = \lambda_0$ второй определитель второго условия имеет вид

$$\Delta_2 = 4h_{11}h_{22}\lambda_0\lambda_2 - h_{12}^2\lambda_0^2 - 2h_{12}^2\lambda_0\lambda_2 - h_{12}^2\lambda_2^2 > 0 \,.$$

Перепишем его в виде квадратичного неравенства

$$\lambda_2^2 - 2\frac{\lambda_0}{h_{12}^2}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right)\lambda_2 + \lambda_0^2 < 0 \,. \tag{2.5}$$

Корни дифференциального уравнения

$$\lambda_2^2 - 2\frac{\lambda_0}{h_{12}^2}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right)\lambda_2 + \lambda_0^2 = 0 \,.$$

имеют вид

$$\lambda_2^{1,2} = \frac{\lambda_0}{h_{12}^2}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right) \pm \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{h_{12}^4}\left(2h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right)^2 - \lambda_0^2} \,.$$

Подкоренное выражение

$$\Delta = \lambda_0^2\left[\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2 - 1\right] = \lambda_0^2\left[\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} - 1\right]\left[\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} + 1\right] = \ = 4\lambda_0^2\,\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\,h_{11}h_{22} > 0 \,.$$

Поэтому квадратное уравнение имеет действительные положительные корни. И неравенство (2.5) выполняется при

$$\lambda_2^2 < \lambda_2 < \lambda_2^1 \,,$$

$$\lambda_2^1 = \lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} + \sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2 - 1}\right\}, \qquad \lambda_2^1 = \lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} - \sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2 - 1}\right\}.$$

А поскольку

$$\frac{2h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{h_{12}^2} > 1 \,,$$

то для существования единой функции Ляпунова вида (2.2) сотношение "допустимости первых двух собственных чисел" для существования единой функции Ляпунова имеет вид

$$\lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}-\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\}<\lambda_2<\lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}+\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\}.$$

Остальные соотношения можно вычислить аналогично.

Список использованных источников

1. Wicks M. A., Peleties P., DeCarlo R.A. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems // Euro J Contr. – 1998 – V.4, № 2 – pp. 140-147
2. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектное управление динамическими системами. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 352 с.
3. О. С. Бичков, М. Г. Меркур'єв, О. Г. Павлюченко Чисельний метод дослідження стійкості лінійного гібридного автомату // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №2(108), 2012 – с. 66 – 74.
4. Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. Бобылев Н.А., Ильин А.Н., Коровин С.К., Фомичев В.В. Об устойчивости семейств динамических систем // Дифференциальные уравнения, Т.38, №4, С.447-452.
6. Пакшин П.В., Поздяев В.В. Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка // Успехи современного естествознания. – 2005. – № 2 – стр. 23-24
7. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
9. Сарыбеков Р.А. Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка // Сибирский математический журнал, Т.18, №5, 1977. – С.1159-1167.
10. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, МВиССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с.

Надійшла до редколегії 11.03.13

А. Сіренко, асп.,
Д. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ІСНУВАННЯ ЄДИНОЇ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

У роботі пропонуються достатні умови і алгоритм знаходження єдиної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем.
Ключові слова: гібридна система, функція Ляпунова, асимптотична стійкість.

Sirenko A., graduate,
Khusainov, D., Dr. Sc. phys. math. Professor
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kiev

ON THE EXISTENCE OF A SINGLE LYAPUNOV FUNCTIONS FOR LINEAR SYSTEMS

The paper proposes the sufficient conditions and an algorithm for finding a common Lyapunov function for linear time-invariant systems.
Keywords: hybrid system, Lyapunov function, asymptotic stability.

УДК 517.929

А. Шатирко, канд. фіз.-мат. наук,
Д. Хусаінов, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ОПТИМІЗАЦІЇЙНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ

Розглядається задача дослідження стійкості в цілому нульового стану рівноваги нелінійних диференцыально-рызницевих систем регулювання з нелінійністю, що знаходиться в заданому секторі, тобто задача абсолютної стійкості систем з післядією. Умови стійкості отримані за допомогою методу функцій Ляпунова з функцією виду суми квадратичної складової і інтеграла від нелінійності Для знаходження функції Ляпунова запропоновано оптимізаційний підхід. Відповідна функція Ляпунова названа оптимальною.

Ключові слова: система регулювання, система з запізнюванням, функція Ляпунова, умова Разуміхіна, абсолютна стійкість.

Вступ

При дослідженні динаміки систем різного вигляду досить часто використовується другий метод Ляпунова, причому в різних модифікаціях. Основні формулювання тверджень мають наступний зміст. Нехай існує функція з необхідними властивостями (неперервно диференційована, додатно визначена, повна похідна якої в силу системи є від'ємно визначеною). Тоді нульовий розв'язок системи стійкий (асимптотично стійкий). Доведено, що основні теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість мають необхідний і достатній характер. Тобто, якщо нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий, то відповідна функція завжди існує. Але центральною і нерозв'язаною проблемою є власне побудова цієї функції. По своєму сенсу "найкраща" функція Ляпунова є інтегралом системи (К.П.Персидський). Тому, в якомусь сенсі, знаходження найкращої функції Ляпунова подібно до задачі знаходження інтеграла системи. Проблема спрощується, якщо функція шукається в наперед параметрично заданому класі функцій, наприклад в класі квадратичних функцій. В цьому випадку задачу знаходження "найкращої" функції Ляпунова можна звести до задачі опуклого програмування.

Як наголошується багатьма авторами, вдало побудована функція Ляпунова дозволяє не тільки надати умову стійкості конкретної системи, але і отримати деякі якісні характеристики динаміки системи (величину перерегулю-