то для существования единой функции Ляпунова вида (2.2) сотношение "допустимости первых двух собственных чисел" для существования единой функции Ляпунова имеет вид

$$\lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}-\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\}<\lambda_2<\lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}+\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\}.$$

Остальные соотношения можно вычислить аналогично.

Список использованных источников

1. Wicks M. A., Peleties P., DeCarlo R.A. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems // Euro J Contr. – 1998 – V.4, № 2 – pp. 140-147
2. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектное управление динамическими системами. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 352 с.
3. О. С. Бичков, М. Г. Меркур'єв, О. Г. Павлюченко Чисельний метод дослідження стійкості лінійного гібридного автомату // Журнал обчислювальної та прикладної математики, №2(108), 2012 – с. 66 – 74.
4. Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. Бобылев Н.А., Ильин А.Н., Коровин С.К., Фомичев В.В. Об устойчивости семейств динамических систем // Дифференциальные уравнения, Т.38, №4, С.447-452.
6. Пакшин П.В., Поздяев В.В. Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка // Успехи современного естествознания. – 2005. – № 2 – стр. 23-24
7. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
9. Сарыбеков Р.А. Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка // Сибирский математический журнал, Т.18, №5, 1977. – С.1159-1167.
10. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, МВиССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с.

Надійшла до редколегії 11.03.13

А. Сіренко, асп.,
Д. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ІСНУВАННЯ ЄДИНОЇ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

У роботі пропонуються достатні умови і алгоритм знаходження єдиної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем.
Ключові слова: гібридна система, функція Ляпунова, асимптотична стійкість.

Sirenko A., graduate,
Khusainov, D., Dr. Sc. phys. math. Professor
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kiev

ON THE EXISTENCE OF A SINGLE LYAPUNOV FUNCTIONS FOR LINEAR SYSTEMS

The paper proposes the sufficient conditions and an algorithm for finding a common Lyapunov function for linear time-invariant systems.
Keywords: hybrid system, Lyapunov function, asymptotic stability.

УДК 517.929

А. Шатирко, канд. фіз.-мат. наук,
Д. Хусаінов, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ОПТИМІЗАЦІЇЙНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ

Розглядається задача дослідження стійкості в цілому нульового стану рівноваги нелінійних диференцыальнорызницевих систем регулювання з нелінійністю, що знаходиться в заданому секторі, тобто задача абсолютної стійкості систем з післядією. Умови стійкості отримані за допомогою методу функцій Ляпунова з функцією виду суми квадратичної складової і інтеграла від нелінійності Для знаходження функції Ляпунова запропоновано оптимізаційний підхід. Відповідна функція Ляпунова названа оптимальною.

Ключові слова: система регулювання, система з запізнюванням, функція Ляпунова, умова Разуміхіна, абсолютна стійкість.

Вступ

При дослідженні динаміки систем різного вигляду досить часто використовується другий метод Ляпунова, причому в різних модифікаціях. Основні формулювання тверджень мають наступний зміст. Нехай існує функція з необхідними властивостями (неперервно диференційована, додатно визначена, повна похідна якої в силу системи є від'ємно визначеною). Тоді нульовий розв'язок системи стійкий (асимптотично стійкий). Доведено, що основні теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість мають необхідний і достатній характер. Тобто, якщо нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий, то відповідна функція завжди існує. Але центральною і нерозв'язаною проблемою є власне побудова цієї функції. По своєму сенсу "найкраща" функція Ляпунова є інтегралом системи (К.П.Персидський). Тому, в якомусь сенсі, знаходження найкращої функції Ляпунова подібно до задачі знаходження інтеграла системи. Проблема спрощується, якщо функція шукається в наперед параметрично заданому класі функцій, наприклад в класі квадратичних функцій. В цьому випадку задачу знаходження "найкращої" функції Ляпунова можна звести до задачі опуклого програмування.

Як наголошується багатьма авторами, вдало побудована функція Ляпунова дозволяє не тільки надати умову стійкості конкретної системи, але і отримати деякі якісні характеристики динаміки системи (величину перерегулювання, час перехідного процесу, різні інтегральні характеристики). Причому отримана оцінка істотно залежить від вибраної функції Ляпунова. Виникло поняття "оптимальної функції Ляпунова" [1-10].

Задача дослідження стійкості в цілому нульового стану рівноваги нелінійних систем регулювання з нелінійністю, що знаходиться в заданому секторі отримала назву абсолютної стійкості системи регулювання [11-14]. При дослідженні абсолютної стійкості отримали розвиток два підходи. Один з них, має назву "частотний метод" [14,15]. Іншим є метод функцій Ляпунова з функцією виду суми квадратичної складової і інтеграла від нелінійності [16,17]. Спочатку розглядалися системи, що описуються звичайними диференціальними рівняннями. Останнім часом отримав розвиток напрямок дослідження задач абсолютної стійкості систем, що описуються різницевими та диференціально-різницевими системами із запізнюванням і нейтрального типу [17,18].

1. Задачі оптимізації, що виникають при дослідженні задач абсолютної стійкості систем регулювання

Як правило умови стійкості розв'язків динамічних систем, що отримані за допомогою другого методу Ляпунова мають достатній зміст. А саме, шукається неперервно диференційована функція, яка задовольняє двум вимогам. По-перше, треба щоб вона була додатно визначеною, а по-друге, її повна похідна в силу системи була від'ємно визначено. Оскільки функція Ляпунова, в основному, будується у вигляді квадратичної форми, то умови знаковизначености функції і її похідної переходять в умови додатної визначеності деяких спеціальних матриць. Наведемо умови абсолютної стійкості систем регулювання, що описані звичайними диференціальними рівняннями, диференціально-різницевими рівняннями із запізнюванням та нейтрального типу, і отримані за допомогою другого методу Ляпунова.

1.1. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Метод функцій Ляпунова

Системи прямого регулювання. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+bf\left(\sigma\left(x(t)\right)\right),\ \sigma\left(x(t)\right)=c^Tx(t)\ . \tag{1.1.1}$$

Тут $b, c, x(t)\in R^n$, A – квадратна асимптотично стійка матриця. Нелінійна функція одного аргументу $f(\sigma)$ розташована в області, що обмежена двома прямими, і знаходиться в першому і третьому чвертях координатної площини, тобто задовольняє умовам

$$0<f(\sigma)\sigma<k\sigma^2\ . \tag{1.1.2}$$

Система (1.1.1) часто називається системою "прямого регулювання". Асимптотична стійкість нульового розв'язку $x(t)\equiv 0$ системи (1.1.1) при довільній функції $f(\sigma)$, яка задовольняє умовам (1.1.2), отримала назву абсолютної стійкості.

Розглянемо використання другого методу Ляпунова при дослідженні абсолютної стійкості системи (1.1.1). Як правило, функція Ляпунова має вигляд суми квадратичної форми з додатно визначеною матрицею H і інтеграла від нелінійності

$$V(x)=x^THx+\beta\int_0^{\sigma(x)}f(\sigma)d\sigma\ ,\ \beta>0\ . \tag{1.1.3}$$

Функція Ляпунова (1.1.3) задовольняє двостороннім нерівностям

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2\le V(x)\le\left[\lambda_{\max}(H)+\frac{1}{2}\beta k|c|^2\right]|x|^2\ , \tag{1.1.4}$$

де $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ – екстремальні власні числа відповідних симетричних, додатно визначених матриць.

Позначимо

$$C_1(H,\beta,\nu)=\begin{bmatrix}-A^TH-HA & -\left[Hb+\frac{1}{2}(\beta A^T+I\nu)c\right]\\ -\left[Hb+\frac{1}{2}(\beta A^T+I\nu)c\right]^T & \frac{\nu}{k}-\beta b^Tc\end{bmatrix}. \tag{1.1.5}$$

Мають місце наступні умови абсолютної стійкості, які отримані за допомогою функції Ляпунова (1.1.3) [19].

Теорема 1.1.1. Нехай існує додатно визначена матриця H і сталі $\beta>0,\ \nu>0$ такі, що матриця $C_1(H,\beta,\nu)$ є додатно визначеною. Тоді система прямого регулювання (1.1.1) є абсолютно стійкою.

Системи непрямого регулювання. Розглянемо так звані системи "непрямого регулювання". Вони характеризуються наявністю одного нульового власного числа матриці лінійного наближення і їх можна записати у вигляді

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+bf(\sigma(t)),\quad \dot{\sigma}(t)=c^Tx(t)-\rho f(\sigma(t)). \tag{1.1.6}$$

Тут $b, c, x(t)\in R^n$, A – квадратна асимптотично стійка матриця, $\rho>0$ скаляр. На відміну від системи (1.1.3), скалярна функція керування $f(\sigma)$ знаходиться в межах сектора, розташованого в першій і третій координатних четвертях, тобто задовольняє "більш жорсткими" умовам

$$k_1\sigma^2\le f(\sigma)\sigma\le k_2\sigma^2,\quad k_2>k_1>0. \tag{1.1.7}$$

При дослідженні абсолютної стійкості використовується функція Ляпунова змінних $(x,\sigma)\in R^{n+1}$ вигляду

$$V(x,\sigma)=x^THx+\beta\int_0^{\sigma}f(\sigma)d\sigma\ ,\ \beta>0\ . \tag{1.1.8}$$

Вона задовольняє двостороннім оцінам

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2+\frac{1}{2}k_1\sigma^2\le V(x,\sigma)\le\lambda_{\max}(H)|x|^2+\frac{1}{2}k_2\sigma^2\ . \tag{1.1.9}$$

Позначимо

$$C_2(H,\beta)=\begin{bmatrix} -A^TH-HA & Hb+\frac{1}{2}\beta c \\ b^TH+\frac{1}{2}\beta c^T & \rho \end{bmatrix}. \qquad (1.1.10)$$

Має місце наступний результат [19].

Теорема 1.1.2. Нехай існують додатно визначена матриця H і параметр $\beta>0$, при яких матриця $C_2(H,\beta)$ є додатно визначеною. Тоді система непрямого регулювання (1.6) є абсолютно стійкою.

Таким чином дослідження абсолютної стійкості систем регулювання без запізнювання зводиться до знаходження додатно визначеної матриці H і параметрів $\beta>0$, $\nu>0$, при яких відповідно матриці $C_1(H,\beta,\nu)$ і $C_2(H,\beta)$ є також додатно визначеними.

1.2. Системи різницевих рівнянь без запізнювання.

Розглянемо систему нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(k+1)=Ax(k)+bf(\sigma(k)),\ \sigma(k)=c^Tx(k),\ x(k)\in R^n,\ k=0,1,2,\dots, \qquad (1.2.1)$$

нелінійна частина $f(\sigma)$ яких є неперервною функцією, що задовольняє умові сектора (1.1.2) і обмеженню

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} f(\xi)d\xi \le L_1 f(\sigma)\Delta\sigma+\frac{1}{2}L_2(\Delta\sigma)^2. \qquad (1.2.2)$$

При дослідженні абсолютної стійкості будемо використовувати функцію (1.1.8)

$$V(x)=x^THx+\beta\int_0^{c^Tx} f(\xi)d\xi,\ \beta>0.$$

Позначимо

$$C_{31}(H)=\begin{bmatrix} H-A^THA & -A^THb \\ -b^THA & -b^THb \end{bmatrix},\ C_{32}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -L_1(A-I)^Tcc^T(A-I) & -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right](A-I)^Tc \\ -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]c^T(A-I) & -\left(b^Tc\right)\left[2L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right] \end{bmatrix},\ C_{33}=\begin{bmatrix} \Theta & -\frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}c^T & \frac{1}{M} \end{bmatrix},$$

Θ – нульова матриця.

Можна довести наступне твердження.

Теорема 1.2.1. Нехай існує додатно визначена матриця H і сталі $\beta>0$ та $\nu>0$, при яких матриця

$$C_3(H,\beta,\nu)=C_{31}(H)+\beta C_{32}+\nu C_{33}$$

буде також додатно визначеною. Тоді система (1.2.1) буде абсолютно стійкою [18].

1.3. Системи диференціальних рівнянь із запізнюванням. Метод функцій Ляпунова з умовою Б.С.Разуміхіна

При дослідженні стійкості розв'язків систем функціонально диференціальних рівнянь другим методом Ляпунова використовуються два підходи. Першим є метод скінченовимірних функцій Ляпунова з використнням додаткової умови Б.С.Разуміхіна при обчисленні повної похідної функції Ляпунова взвовж розв'язків систем. Другим є метод функціоналів Ляпунова-Красовського. Розглянемо метод функцій Ляпунова.

Системи прямого регулювання. Система "прямого регулювання" із запізнюванням має вигляд

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+bf(\sigma(t)). \qquad (1.3.1)$$

Нелінійна функція $f(\sigma)$ задовольняє умові (1.1.2). Будемо брати функцію Ляпунова вигляду (1.1.3). При обчисленні її похідної в силу системи використовується умова Б.С.Разуміхіна. Вона має вигляд умови

$$V(x(s))<V(x(t)),\ s<t.$$

Для функцій Ляпунова (1.1.3) вона має вигляд

$$\lambda_{\min}(H)|x(s)|^2 \le V(x(s))<V(x(t))\le\left[\lambda_{\max}(H)+\frac{1}{2}\beta k|c|^2\right]|x(t)|^2.$$

Звідси

$$|x(s)|<\sqrt{\phi(H,\beta)}\,|x(t)|,\ \phi(H,\beta)=\frac{\lambda_{\max}(H)+\frac{1}{2}\beta k|c|^2}{\lambda_{\min}(H)}. \qquad (1.3.2)$$

Отримаємо дві умови абсолютної стійкості. Першою є умова абсолютної стійкості, рівномірна за запізнюванням, тобто для довільного $\tau>0$ [17].

Позначимо

$$C_4(H,\beta,\nu)=\begin{bmatrix} -(A+B)^TH-H(A+B) & -\left[Hb+\frac{1}{2}(\beta(A+B)^T+I\nu)c\right] \\ -\left[Hb+\frac{1}{2}(\beta(A+B)^T+I\nu)c\right]^T & \frac{\nu}{k}-\beta b^Tc \end{bmatrix}, \qquad (1.3.3)$$

$$L_1(H,\beta,\nu) = \lambda_{\min}\left[C_3(H,\beta,\nu)\right] - \gamma|\beta|, \ \gamma = 2|H|\left(1+\sqrt{\phi(\tilde{H})}\right),$$

$$\phi(\tilde{H}) = \frac{\lambda_{\min}\left(H + \frac{1}{2}\beta kcc^T\right)}{\lambda_{\max}(H)}. \tag{1.3.4}$$

Теорема 1.3.1. Нехай існують додатно визначена матриця H і сталі $\beta > 0, \ \nu > 0$ такі, що виконується нерівність

$$L_1(H,\beta,\nu) > 0. \tag{1.2.5}$$

Тоді система прямого регулювання з запізнюванням (1.2.1) є абсолютно стійкою при довільному запізнюванні $\tau > 0$.

Другою є умова абсолютної стійкості, нерівномірна за запізнюванням $\tau > 0$. Має місце наступний результат [17].

Теорема 1.3.2. Нехай існують додатно визначена матриця H і сталі $\beta > 0, \ \nu > 0$ такі, що матриця $C_4(H,\beta,\nu)$ є додатно визначеною. Тоді система прямого регулювання (1.3.1) є абсолютно стійкою при $\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}\left[C_4(H,\beta,\nu)\right]}{2|HB|\left(|A| + |B| + k|\beta|c|\right)\sqrt{\phi(\tilde{H})}}. \tag{1.3.6}$$

Системи непрямого регулювання. Розглянемо систему непрямого регулювання з запізнюванням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)), \quad \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \tag{1.3.5}$$

Позначимо

$$C_5(H,\beta) = \begin{bmatrix} -(A+B)^T H - H(A+B) & -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right)^T & \rho \end{bmatrix},$$

$$L_2(H,\beta) = \lambda_{\min}\left[C_5(H,\beta)\right] - 2|HB|\left(1+\sqrt{\phi(\bar{H})}\right) > 0, \ \phi(\bar{H}) = \frac{\lambda_{\min}(\bar{H})}{\lambda_{\max}(\bar{H})},$$

$$\lambda_{\min}(\bar{H}) = \min\left\{\lambda_{\min}(H), \frac{1}{2}k_1\right\}, \ \ \lambda_{\max}(\bar{H}) = \max\left\{\lambda_{\max}(H), \frac{1}{2}k_2\right\}. \tag{1.3.5}$$

Теорема 1.3.3. Нехай існує додатно визначена матриця H і параметр $\beta > 0$ при яких виконується нерівність

$$L_2(H,\beta,\nu) > 0. \tag{1.3.6}$$

Тогда система (1.3.5) абсолютно абсолютно стійка при довільному запізнюванні $\tau > 0$.

Мають місце наступні умови абсолютної нерівномірної за запізнюванням стійкості.

Теорема 1.3.4. Нехай існує додатно визначена матриця H, така що $\lambda_{\min}\left(C_5[H,\beta]\right) > 0.$ Тоді при $\tau < \tau_0,$ де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}\left[C_5(H,\beta)\right]}{2|HB|\left(|A| + |B| + k_2|b||c|\right)\sqrt{\phi(\bar{H})}} \tag{1.3.7}$$

система (1.3.5) буде абсолютно стійкою.

1.4. Системи диференціальних рівнянь із запізнюванням. Метод функціоналів Ляпунова-Красовського

В попередніх розділах при дослідженні абсолютної стійкості систем прямого та непрямого регулювання із заізнюванням використвувались скінченовимірні функції Ляпунова. Альтернативою є метод функціоналів Ляпунова-Красовського. В свій час на представницьких конференціях було висловлено думку, що оба методи рівноцінні і "мають право на існування". Розглянемо використання функціоналів Ляпунова-Красовського вигляду

$$V[x(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \beta\int_{0}^{c^T x(t)} f(\xi)d\xi.$$

Системи прямого регулювання. Позначимо

$$C_6(G,H,\beta,\nu) = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB & -\left[Hb + \frac{1}{2}\left(\beta A^T + I\nu\right)c\right] \\ -B^T H & G & -\frac{1}{2}\beta B^T c \\ -\left[Hb + \frac{1}{2}\left(\beta A^T + I\nu\right)c\right]^T & -\frac{1}{2}\beta c^T B & \frac{\nu}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

Має місце наступний результат.

Теорема 1.4.1. Нехай існують додатно визначені матриці G та H й сталі $\beta > 0$, $\nu > 0$, при яких матриця $C_6(G,H,\beta,\nu)$ також додатно визначена. Тоді система прямого регулювання (1.3.1) з запізнюванням є абсолютно стійкою.

Системи непрямого регулювання. Далі розглянемо системи непрямого регулювання із запізнюванням (1.3.5)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)) \end{cases}$$

Для дослідження абсолютної стійкості системи будемо використовувати функціонал

$$V[x(t),\sigma(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \beta\int_{0}^{\sigma(t)} f(\xi)d\xi,\ \beta>0,$$

що залежить від векторної функціїї $x(t)$ і функції $\sigma(t)$ з додатно визначеними матрицями H і G. Позначимо

$$C_7(G,H,\beta) = \begin{bmatrix} -A^TH-HA & -HB & -\left(Hb+\frac{1}{2}\beta c\right) \\ -B^TH & G & \theta \\ -\left(Hb+\frac{1}{2}\beta c\right)^T & \theta^T & \rho \end{bmatrix}, \tag{1.4.3}$$

θ – нульовий вектор.

Теорема 1.4.2. Нехай існують додатно визначені матриці G, H і параметр $\beta>0$, при яких матриця $C_7(G,H,\beta)$ також додатно визначена. Тоді система з запізнюванням є абсолютно стійкою.

1.5. Різницеві системи із запізнюванням

В работі [18] розглядались системи нелінійних різницевих рівнянь з одним запізнюванням

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + bf(\sigma(k)),\ x(k)\in R^n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1.5.1}$$

Тут A, B сталі матриці, b вектор, $f(\sigma)$ нелінійна функція, що задовольняє "умові сектора" (1.1.2). Якщо для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням функціонали Ляпунова-Красовського беруться у вигляді суми квадратичної складової поточної координати та интегралу від квадратичної складової по проміжку запізнювання, то для систем різницевих рівнянь (1.5.1) інтеграл замінюється сумою квадратичних складових по передісторії. Функціонал береться у вигляді

$$V[x(k)] = x^T(k)Hx(k) + \sum_{j=0}^{m} x^T(k-j)Gx(k-j) + \beta\int_{0}^{\sigma(k)} f(\xi)d\xi,\ \sigma(k)=c^Tx(k). \tag{1.5.2}$$

Введемо наступні позначення

$$C_{81}(G,H) = \begin{bmatrix} H-A^T(H+G)A & -A^T(H+G)B & -A^T(H+G)b \\ -B^T(H+G)A & G-B^T(H+G)B & -B^T(H+G)b \\ -b^T(H+G)A & -b^T(H+G)B & -b^T(H+G)b \end{bmatrix},$$

$$C_{82} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -L_2(A-I)^Tcc^T(A-I) & -L_2(A-I)^Tcc^TB & -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right](A-I)^Tc \\ -L_2B^Tcc^T(A-I) & -L_2B^Tcc^TB & -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]B^Tc \\ -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]c^T(A-I) & -\left[L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]c^TB & -\left[2L_1+L_2\left(b^Tc\right)\right]\left(b^Tc\right) \end{bmatrix},$$

$$C_{83} = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta & -\frac{1}{2}c \\ \Theta & \Theta & \theta \\ -\frac{1}{2}c^T & \theta^T & \frac{1}{M} \end{bmatrix}. \tag{1.5.3}$$

Умови абсолютної стійкості мають вигляд

Теорема 1.5.1. Нехай функція $f(\sigma)$ задовольняє умові сектора (1.1.2) і нерівності

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} f(\xi)d\xi \le L_1 f(\sigma)\Delta\sigma + \frac{1}{2}L_2(\Delta\sigma)^2, \tag{1.5.4}$$

де L_1, L_2 деякі сталі. Якщо існують параметри $\beta>0$, $\nu>0$ і додатно визначені матриці H та G, при яких матриця

$$C_8(H,G,\beta,\nu) = C_{81}(H,G) + \beta C_{82} + \nu C_{83}$$

також додатно визначена, то система (1.5.1) абсолютно стійка при довільному запізнюванні m.

Тут Θ – нулевая матриця, θ – нулевой вектор. Задача отримання гарантованої умови стійкості в розглянутому класі функціоналів (1.5.2), тобто знаходження додатно визначених матриць G, H та параметрів β, ν, при яких матриця "максимально" додатно визначена співпадає з відповідними задачами для диференціальних систем.

2. Умови розв'язку задач оптимізації, які виникають при дослідженні проблем абсолютної стійкості

З наведеного вище видно, що знаходження умов абсолютної стійкості систем регулювання, які описані різного типу динамічними системами, зводиться до знаходження симетричних додатно визначених матриць і параметрів, лінійна комбінація яких також є додатно визначеною матрицею. Відомо, що довільна симетрична матриця є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли її мінімальне власне число є додатним. Для додатної визначеності функції Ляпунова достатньо додатної визначеності матриці H і умови $\beta>0$. Для додатної визначеності функціоналів Ляпунова-Красовського достатньо існування додатно визначених матриць H і G і параметрів $\beta>0$, $\nu>0$. Для від'ємної визначеності повної похідної достатньо, щоб відповідні матриці, що визначають повну похідну, також були додатно визначені.

2.1. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем прямого регулювання

Спочатку детально розглянемо системи прямого регулювання, що описані системою (1.1.1). Розглянемо задачу отримання гарантованої умови абсолютної стійкості в заданому класі функцій Ляпунова (1.1.3), тобто знаходження додатно визначених матриць H^0 і величин $\beta^0 \geq 0$, $\nu^0 \geq 0$, при яких мінімальне власне число симетричної матриці $C_1\left(H^0,\beta^0,\nu^0\right)$, яка визначає похідну, буде максимальне.

Оптимізаційна задача розглядається на множині трійок $L=\left\{\left(H,\beta,\nu\right): H\geq 0, \beta\geq 0, \nu\geq 0\right\}$, де під $H\geq 0$ розумітимемо додатну напіввизначеність матриць H . Виберемо за норму

$$\left|(H,\beta,\nu)\right|=\sqrt{\left|H\right|^2+\beta^2+\nu^2}\ ,\ \left|H\right|=\lambda_{\max}\left(H\right).$$

Тут і надалі позначатимемо через $\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ – екстремальні власні числа відповідних симетричних матриць.

Як відомо, симетрична матриця $C_1\left(H,\beta,\nu\right)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]>0.$ І завдання знаходження гарантованої умови абсолютної стійкості системи (1.1.1) в класі функцій (1.1.3) можна розглядати як оптимізаційну задачу

$$\phi_1(H,\beta,\nu)\to \min_{(H,\beta,\nu)\in L} \tag{2.1.1}$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}\left(H\right)\geq 0,\ \ \beta\geq 0\ \ \ h\geq 0,\ \ \phi_1(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]. \tag{2.1.2}$$

Неважко бачити, що множина L - є лінійним простором, який являє собою опуклий конус. І, якщо оптимізаційна задача (2.1.1), (2.1.2) матиме розв'язком трійку (H^0,β^0,ν^0), для якої буде виконуватись

$$\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)<0,$$

то система регулювання (1.1.1) буде абсолютно стійкою. Якщо

$$\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)>0,$$

то задача дослідження абсолютної стійкості в класі функцій вигляду (1.1.3) за рахунок вибору параметрів H , β не розв'язується.

Позначимо через L_1 підмножину L_0 що складається з трійок (H,β,ν), які знаходяться усередині одиничної сфери, тобто задовольняють умові

$$\lambda^2_{\max}\left(H\right)+\beta^2+\nu^2\leq 1\,. \tag{2.1.3}$$

Лема 2.1.1. Задача оптимізації (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) має розв'язок.

Доведення. Множина додатно напіввизначених матриць є опуклим конусом. Тому L – є множиною трійок, що складаються з додатно напівпевної матриці H і двох невід'ємних чисел. Множина L являє собою опуклий конус з центром, що складається з трійки нульової матриці і двох нулів. А множина L_1 є перетином одиничної кулі і замкнутого конуса. І, отже, є компактним множиною. Функція $\phi_1(H,\beta,\nu),$ як власне число симетричної матриці, є неперервною функцією і, отже, за теоремою Вейерштраса на компакті досягає мінімального значення.

Розв'язок задач оптимізації значно спрощується, якщо функції і області їх визначення є опуклими. В цьому випадку вдається сформулювати необхідні і достатні умови оптимальності. Причому, якщо функції неперервно диференційовані, то умови формулюється в термінах похідних, інакше в термінах узагальнених похідних.

Лема 2.1.2. Функція $\phi_1(H,\beta,\nu)$ на множині L_1 є опуклою.

Доведення. Оскільки матриця $C_1(H,\beta,\nu)$ по змінним (H,β,ν) є лінійним оператором, а мінімальне власне число додатно визначеної матриці є увігнутою функцією, то для двох довільних трійок $\left(H^1,\beta^1,\nu^1\right)$, $\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right)$, буде виконуватись

$$\begin{aligned}
&\phi_1(\xi H_1^1+\left(1-\xi\right)H_1^2,\xi\beta^1+\left(1-\xi\right)\beta^2,\xi\nu^1+\left(1-\xi\right)\nu^2)=\\
&\quad=-\lambda_{\min}\left[C_1\left(\xi H^1+\left(1-\xi\right)H^2,\xi\beta^1+\left(1-\xi\right)\beta^2,\xi\nu^1+\left(1-\xi\right)\nu^2\right)\right]=\\
&\quad\quad=-\lambda_{\min}\left[\xi C_1\left(H^1,\beta^1,\nu^1\right)+\left(1-\xi\right)C_1\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right)\right]\leq-\xi\lambda_{\min}\left[C_1\left(H^1,\beta^1,\nu^1\right)\right]-\\
&\quad\quad\quad-\left(1-\xi\right)\lambda_{\min}\left[C_1\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right)\right]=\ \xi\phi_1(H^1,\beta^1,\nu^1)+\left(1-\xi\right)\phi_1\left(H^2,\beta^2,\nu^2\right),
\end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Таким чином задачі (2.1.1)-(2.1.3) є задачами опуклої оптимізації. Екстремальні власні числа симетричних додатно визначених матриць є кусково неперервно диференційованими функціями. Тому умови існування розв'язку будемо формулювати в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.1.1. Скалярним добутком двох трійок (H^1,β^1,ν^1) і (H^2,β^2,ν^2) назвемо величину

$$\left\langle(H^1,\beta^1,\nu^1),(H^2,\beta^2,\nu^2)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}^1h_{ij}^2+\beta^1\beta^2+\nu^1\nu^2\,, \tag{2.1.4}$$

де $H^1=\left\{h_{ij}^1\right\}$, $H^2=\left\{h_{ij}^2\right\}$, $h_{ij}^1=\overline{1,n}$, $h_{ij}^2=\overline{1,n}$.

Введемо наступні позначення. Через Δ_{ij} - будемо позначати симетричну $\left(n\times n\right)$ – матрицю, у якої на місці $\left(i,j\right)$ – го та $\left(j,i\right)$ – го елементів стоїть $0{,}5$, якщо $i\neq j$ і одиниця, якщо $i=j$. Через Θ будемо позначати квадратну

$(n\times n)$ – матрицю з нульовими елементами. Тоді довільні симетричні матриці $H^1=\{h_{ij}^1\}$, $H^2=\{h_{ij}^2\}$, $h_{ij}^1=\overline{1,n}$, $h_{ij}^2=\overline{1,n}$ можна представити у виді розкладу

$$H^1=\sum_{i,j}^{n}h_{ij}^1\Delta_{ij}\ ,\ H^2=\sum_{i,j}^{n}h_{ij}^2\Delta_{ij}\ .$$

Введемо наступні означення.

Означення 2.1.2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\phi_1(H,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ назвемо трійку (E_0,f_0,k_0), для якої, при будь-яких $(H,\beta,\nu)\in L_1$ виконуватиметься

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\geq\left\langle (E_0,f_0,k_0,(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle. \qquad (2.1.5)$$

Екстремальні власні числа симетричних додатно напіввизначених матриць є кусково неперервно диференційованими функціями. Тому в точці (H^0,β^0,ν^0) може існує не один вектор, а ціла множина, що задовольняє умові (2.1.5).

Означення 2.1.3. Градієнтним множиною $R_\phi\{E,f,k\}$ функції $\phi_1(H,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ називатимемо множину трійок $(E_0,\ f_0,k_0)$, що задовольняють нерівності (2.1.5).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\phi_1(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]$$

у внутрішній точці. Отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.1.1. Узагальненим градієнтом функції

$$\phi_1(H,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]$$

у внутрішній точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ є трійка (E_0,f_0,k_0), що складається з матриці E_0, скалярів f_0, k_0 і має наступний вигляд

$$E_0=\{e_{ij}^0\}\ ,\ e_{ij}^0=-z_0^TC_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)z_0\ ,\quad i,j=\overline{1,n}\ ,$$
$$f_0=-z_0^TC_1\left(\Theta,1,0\right)z_0\ ,\ k_0=-z_0^TC_1\left(\Theta,0,1\right)z_0\ . \qquad (2.1.6)$$

Тут z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z$ досягає мінімального значення (власний вектор, що відповідає мінімальному власному числу).

Доведення. Мінімальне власне число симетричної додатно напіввизначеної матриці дорівнює мінімальному значенню квадратичної форми з цією матрицею на одиничній сфері. Тому маємо наступне

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)=-\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta,\nu)\right]+\lambda_{\min}\left[C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\right]=$$
$$=-\min_{|z|=1}z^TC_1(H,\beta,\nu)z+\min_{|z|=1}z^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z.$$

Нехай квадратична форма $z^TC_1(H,\beta,\nu)z$ приймає мінімальне значення на векторі $z=z_1$, а квадратична форма $z^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z$ на векторі z_0. Тоді отримуємо

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)=-z_1{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_1+z_0{}^TC_1(H^0,\beta^0,\nu^0)z_0=$$
$$=z_0{}^T\left[C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)-C_1(H,\beta,\nu)\right]z_0+z_0{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_0-z_1{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_1.$$

Оскільки квадратична форма $z^TC_1(H,\beta,\nu)z$ приймає мінімальне значення на векторі z_1, то

$$z_0{}^TC_1(H,\beta,\nu)z_0-z_1C_1(H,\beta,\nu)z_1\geq 0.$$

Звідси

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\geq z_0{}^T\left[C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)-C_1(H,\beta,\nu)\right]z_0.$$

Через лінійність оператора $C(H,\beta,\nu)$, маємо

$$C_1(H,\beta,\nu)=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}C_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)+\beta C_1\left(\Theta,1,0\right)+\nu C_1\left(\Theta,0,1\right),$$
$$C_1(H^0,\beta^0,\nu^0)=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}^0C_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)+\beta^0C_1\left(\Theta,1,0\right)+\nu^0C_1\left(\Theta,0,1\right).$$

Тому має місце нерівність

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\geq\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^0-h_{ij}\right)z_0^TC_1\left(\Delta_{ij},0,0\right)z_0\ +\left(\beta^0-\beta\right)z_0^TC_1\left(\Theta,1,0\right)z_0+\ +\left(\nu_0-\nu\right)z_0^TC_1\left(\Theta,0,1\right)z_0\ .$$

Використовуючи позначення (2.1.6), отримуємо

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\geq\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}-h_{ij}^0)e_{ij}^0+\left(\beta-\beta^0\right)f_0+\left(\nu-\nu^0\right)k_0\ .$$

З означення 2.1.1 скалярного добутку випливає

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\geq\ \left\langle\left(E_0,f_0,k_0\right),\quad\left(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0\right)\right\rangle,$$

що і потрібно було довести.

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнта, і опуклості множини L_1, умови розв'язку задачі оптимізації (2.1.1), (2.1.2),(2.1.3) можна сформулювати таким чином [Васильєв Ф.П., стор. 210].

Теорема 2.1.2. Щоб функція $\phi_1(H,\beta,\nu)$ досягала свого мінімального значення в точці $(H^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ необхідно і достатньо, щоб для довільного $(H,\beta,v)\in L_1$ виконувалась умова

$$\left\langle (E_0,f_0,k_0),\quad \left(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu_0\right)\right\rangle \ge 0\ . \tag{2.1.7}$$

Причому точка (H^0,β^0,ν^0) задовольняла граничній умові

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^0\right)^2+\left(\beta^0\right)^2+\left(\nu^0\right)^2=1.$$

Необхідність. Як випливає з приведених вище тверджень, функція $\phi_0(H,\beta,\nu)$ є опуклою L_1 – опуклий конус додатного октанту $H>0$ $\beta>0$, $\nu>0$. Нехай виконується умова

$$\min_{(H,\beta,\nu)\in L_1}\left\{\phi_1(H,\beta,\nu)\right\}=\phi_1^*.$$

Розглянемо множину M четвірок

$$M=\left\{(H,\beta,\nu,\gamma):(H,\beta,\nu)\in L_1,\ -\infty<\gamma<+\infty\right\}.$$

Побудуємо в цій множині дві підмножини

$$M_1=\left\{(H,\beta,\nu,\gamma):(H,\beta,\nu)\in L_1,\ \gamma\ge\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1^*\right\},$$

$$M_2=\left\{(H,\beta,\nu,\gamma):(H,\beta,\nu)\in L_1,\ \gamma<0\right\}.$$

З побудови виходить, що вони не мають загальних точок. Крім того, через опуклість функції $\phi_1(H,\beta,\nu)$, підмножини M_1 і M_2 є опуклими. Тому існує гіперплощина

$$\left\langle (E,f,k),\,(H,\beta,\nu)\right\rangle+\varsigma\gamma=0$$

з нормалями (E,f,k) і ς, яка розділяє множини M_1 і M_2. І для довільних точок

$$(H,\beta,\nu,\gamma)\in M_1,\quad (H^*,\beta^*,\nu^*,\gamma^*)\in M_2$$

та екстремальної точки $(H^0,\beta^0,\nu^0,0)$ буде виконуватись співвідношення

$$\left\langle (E,f,k),\,(H,\beta,\nu)\right\rangle+\varsigma\gamma\ge\left\langle (E,f,k),\,(H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle\ge\left\langle (E,f,k),\left(H^*,\beta^*,\nu^*\right)\right\rangle+\varsigma\gamma^*\ . \tag{2.1.8}$$

Визначимо знак скаляра ς. Для цього розглянемо праву нерівність при умові $(H^*,\beta^*,\nu^*,\gamma^*)=(H^0,\beta^0,\nu^0,-1)$. Отримуємо

$$\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle\ge\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle-\varsigma.$$

Таким чином $\varsigma\ge 0$. Покажемо, що $\varsigma>0$. Нехай, від супротивного, $\varsigma=0$. Тоді, поклавши в лівій частині нерівності (2.1.8)

$$(H,\beta,\nu)=(H^0,\beta^0,\nu^0)+\varepsilon(E,f,k),\ \varepsilon<0,\ \gamma>\phi_0(H,\beta,k)-\phi_0^*\ ,$$

отримуємо

$$\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)+\varepsilon(E,f,k)\right\rangle\ge\left\langle (E,f,k),(H^0,\beta^0,\nu^0)\right\rangle,$$

або

$$\varepsilon\left|(E,f,k)\right|^2\ge 0.$$

А оскільки $\varepsilon<0,$ то це можливо лише при $\left|(E,f,k)\right|=0.$ Таким чином, припущення невірне і $\varsigma>0.$ Розділимо нерівності (2.1.8) на $\varsigma>0$. Отримаємо

$$\left\langle \frac{1}{\varsigma}(E,f,k),(H,\beta,\nu)\right\rangle+\gamma\ge\left\langle \frac{1}{\varsigma}(E,f,k),\left(H^0,\beta^0,\nu^0\right)\right\rangle\ge\left\langle \frac{1}{\varsigma}(E,f,k)\left(H^*,\beta^*,\nu^*\right)\right\rangle+\gamma^* \tag{2.1.9}$$

Звідси випливає, що при довільному $\gamma,$ яке задовольняє умові

$$\gamma\ge\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1^*,$$

ліва частина нерівності (2.1.9) повинна задовольняти співвідношенню

$$\gamma\ge\left\langle -\frac{1}{\varsigma}(E,f,k),(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle .$$

Поклавши

$$\gamma=\phi_0\left(H,\beta,\nu\right)-\phi_0(H^0,\beta^0,\nu^0),$$

отримаємо

$$\phi_1(H,\beta,\nu)-\phi_1(H^0,\beta^0,\nu^0)\ge\left\langle -\frac{1}{\varsigma}(E,f,k),(H-H^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle.$$

Таким чином трійка $\left(-\frac{1}{\varsigma}E,-\frac{1}{\varsigma}f,-\frac{1}{\varsigma}k\right),$ як випливає з означення, є узагальненим градієнтом. І отримуємо, що

$$\left(-\frac{1}{\varsigma}E,-\frac{1}{\varsigma}f,-\frac{1}{\varsigma}k\right)=\left(E_0,f_0,k_0\right),$$

з елементами, визначеними в (2.1.6). Поклавши в правій частині нерівності (2.1.9) $\gamma^* = 0,$ отримуємо

$$\left\langle \left(E_0, f_0, k_0\right), \left(H^* - H^0, \beta^* - \beta^0, \nu^* - \nu^0\right) \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\varsigma}\left(E, f, k\right), \left(H^* - H^0, \beta^* - \beta^0, \nu^* - \nu^0\right) \right\rangle,$$

що і доводить необхідність теореми.

Достатність. Нехай умови теореми виконуються і в точці $(H^0, \beta^0, \nu^0) \in L_1$ існує узагальнений градієнт функції $\phi_1(H, \beta, \nu),$ при якому виконується нерівність

$$\left\langle \left(E_0, f_0, k_0\right)\left(H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0\right) \right\rangle \geq 0.$$

Але тоді, як випливає з означення узагальненого градієнта, виконується

$$\phi_1(H, \beta, \nu) - \phi_1(H^0, \beta^0, \nu^0) \geq 0 \ ,$$

тобто

$$\phi_1(H, \beta, \nu) \geq \phi_1(H_0, \beta^0, \nu^0),$$

і точка (H^0, β^0, ν^0) є точкою мінімуму для функції $\phi_1(H, \beta, \nu).$

Належність точки (H^0, β^0, ν^0) границі сфери виходить з однорідності функції $\phi_1(H, \beta, \nu)$ по змінній (H, β, ν) і виду області L_{1}.

Теорема доведена.

Таким чином, умови абсолютної стійкості системи (1.1.1) можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.1.3. Нехай H^0 - додатно визначена матриця, а β^0, ν^0 скаляри, при яких виконується умова

$$\left\langle \left(E_0, f_0, k_0\right), \left(H - H^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0\right) \right\rangle \geq 0 \ , \quad \lambda^2_{\max}\left(H^0\right) + \left(\beta^0\right)^2 + \left(\nu^0\right)^2 = 1 \ .$$

Тут

$$E_0 = \left\{e^0_{ij}\right\}, \quad e^0_{ij} = z_0^T C_1\left(\Delta_{ij}, 0, 0\right) z_0$$

$$f_0 = -z_0^T C_1\left(\Theta, 1, 0\right) z_0 \ , \ k_0 = -z_0^T C_1\left(\Theta, 0, 1\right) z_0 \ ,$$

z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_1(H^0, \beta^0, \nu^0) z$ досягає мінімального значення (власний вектор, відповідний мінімальному власному числу)

Щоб система (1.1.1) була абсолютно стійкою достатньо, щоб матриця $C_1(H^0, \beta^0, \nu^0)$ вигляду (1.1.5) була додатно визначеною. Причому, якщо $C_1(H^0, \beta^0, \nu^0)$ не є додатно визначеною, то за допомогою функції Ляпунова вигляду (1.1.3) отримати твердження про асимптотичну стійкість не можна, тобто функція

$$V_0\left(x\right) = x^T(t) H^0 x\left(t\right) + \beta^0 \int\limits_0^{\sigma(x)} f\left(\sigma\right) d\sigma$$

є оптимальною в даному класі функцій.

2.2. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем непрямого регулювання

В цьому розділі розглянемо системи непрямого регулювання, що описані системою (1.1.6). Розглянемо задачу отримання гарантованої умови абсолютної стійкості в класі функцій Ляпунова (1.1.8), тобто знаходження додатно визначених матриць H^0 і величини $\beta^0 \geq 0$, при яких мінімальне власне число симетричної матриці $C_1\left(H^0, \beta^0\right)$, яка визначає похідну, буде максимальне.

Оскільки задача майже повністю співпадає з розглянутою в попередньому розділі, будемо приводити лише твердження.

Оптимізаційна задача розглядається на множині пар $L = \left\{\left(H, \beta\right) : H \geq 0, \beta \geq 0\right\}$. За норму вибирається

$$\left|(H, \beta)\right| = \sqrt{\left|H\right|^2 + \beta^2} \ , \ \left|H\right| = \lambda_{\max}\left(H\right).$$

Симетрична матриця $C_2\left(H, \beta\right)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}\left[C_2(H, \beta)\right] > 0.$ І розглядається оптимізаційна задача

$$\phi_2(H, \beta) \to \min_{(H, \beta) \in L} \qquad (2.2.1)$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}\left(H\right) \geq 0, \ \ \beta \geq 0 \ , \phi_2(H, \beta) = -\lambda_{\min}\left[C_2(H, \beta)\right]. \qquad (2.2.2)$$

Множина L - є лінійним простором, який являє собою опуклий конус. І, якщо оптимізаційна задача (2.2.1), (2.2.2) матиме розв'язком пару (H^0, β^0), для якої

$$\phi_2(H^0, \beta^0) < 0,$$

то система регулювання (1.1.6) буде абсолютно стійкою. Якщо

$$\phi_2(H^0, \beta^0) > 0,$$

то задача дослідження абсолютної стійкості в класі функцій вигляду (1.1.8) за рахунок вибору параметрів H, β не розв'язується.

Позначимо через L_1 підмножину L_0 що складається з пар (H,β), які знаходяться усередині одиничної сфери, тобто задовольняють умові

$$\lambda_{\max}^2(H)+\beta^2 \le 1 . \qquad (2.2.3).$$

Мають місце наступні твердження.

Лема 2.2.1. Задача оптимізації (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) має розв'язок.

Лема 2.2.2. Функція $\phi_2(H,\beta)$ на множині L_1 є опуклою.

Таким чином задачі (2.2.1)-(2.2.2) є задачами опуклої оптимізації. Умови існування розв'язку будемо формулювати в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.2.1. Скалярним добутком двох пар (H^1,β^1) і (H^2,β^2) назвемо величину

$$\left\langle (H^1,\beta^1),(H^2,\beta^2)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^1 h_{ij}^2 + \beta^1\beta^2 , \qquad (2.2.4)$$

де $H^1=\{h_{ij}^1\}$, $H^2=\{h_{ij}^2\}$, $h_{ij}^1=\overline{1,n}$, $h_{ij}^2=\overline{1,n}$.

Введемо наступні означення.

Означення 2.2.2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\phi_2(H,\beta)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ назвемо пару (E_0,f_0), для якої, при будь-яких $(H,\beta)\in L_1$ виконуватиметься

$$\phi_2(H,\beta)-\phi_2(H^0,\beta^0) \ge \left\langle (E_0,f_0),(H-H^0,\beta-\beta^0)\right\rangle. \qquad (2.2.5)$$

Означення 2.2.3. Градієнтним множиною $R_\phi\{E,f\}$ функції $\phi_2(H,\beta)$ у внутрішній точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ називатимемо множину пар (E_0,f_0), що задовольняють нерівності (2.2.5).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\phi_2(H,\beta) = -\lambda_{\min}\left[C_1(H,\beta)\right]$$

у внутрішній точці. Маэмо наступне твердження.

Теорема 2.2.1. Узагальненим градієнтом функції

$$\phi_2(H,\beta) = -\lambda_{\min}\left[C_2(H,\beta)\right]$$

у внутрішній точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ є пара (E_0,f_0), що складається з матриці E_0 і скаляру f_0 і має наступний вигляд

$$E_0=\{e_{ij}^0\},\ e_{ij}^0=-z_0^T C_1(\Delta_{ij},0)z_0,\ \ i,j=\overline{1,n},\ f_0=-z_0^T C_1(\Theta,1)z_0 . \qquad (2.2.6)$$

Тут z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_2(H_0,\beta^0)z$ досягає мінімального значення (власний вектор, що відповідає мінімальному власному числу).

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнта, і опуклості множини L_1, умови розв'язку задачі оптимізації (2.2.1), (2.2.2),(2.2.3) можна сформулювати таким чином [Васильєв Ф.П., стор. 210].

Теорема 2.2.2. Щоб функція $\phi_2(H,\beta)$ досягала свого мінімального значення в точці $(H^0,\beta^0)\in L_1$ необхідно і достатньо, щоб для довільного $(H,\beta)\in L_1$ виконувалась умова

$$\left\langle (E_0,f_0),\ \ (H-H^0,\beta-\beta^0)\right\rangle \ge 0 . \qquad (2.2.7)$$

Причому точка (H^0,β^0) задовольняла граничній умові

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^0\right)^2+\left(\beta^0\right)^2=1.$$

Таким чином, умови абсолютної стійкості системи (1.1.6) можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.2.3. Нехай H^0 - додатно визначена матриця, β^0 скаляри, при яких виконується умова

$$\left\langle (E_0,f_0),(H-H^0,\beta-\beta^0)\right\rangle \ge 0 ,\quad \lambda_{\max}^2\left(H^0\right)+\left(\beta^0\right)^2=1 .$$

Тут

$$E_0=\{e_{ij}^0\},\ e_{ij}^0=z_0^T C_1(\Delta_{ij},0)z_0,\ \ f_0=-z_0^T C_1(\Theta,1)z_0 ,$$

z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_2(H^0,\beta^0)z$ досягає мінімального значення (власний вектор, відповідний мінімальному власному числу)

Щоб система (1.1.6) була абсолютно стійкою достатньо, щоб матриця $C_1(H^0,\beta^0)$ вигляду (1.1.10) була додатно визначеною. Причому, якщо $C_2(H^0,\beta^0)$ не є додатно визначеною, то за допомогою функції Ляпунова вигляду (1.1.8) отримати твердження про асимптотичну стійкість не можна, тобто функція

$$V_0(x,\sigma)=x^T(t)H^0x(t)+\beta^0\int_0^\sigma f(\xi)d\xi$$

є оптимальною в даному класі функцій.

2.3. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем регулювання з запізнюванням методом функцій Ляпунова

При дослідженні абсолютної стійкості систем прямого (1.3.1) і непрямого (1.3.5) регулювання методом функцій Ляпунова з умовою Б.С.Разуміхіна функції Ляпунова мають той же вигляд, що і для систем без запізнювання. Повні похідні в силу системи визначаються квадратичними формами з матрицями $C_3(H,\beta,\nu)$ і $C_4(H,\beta)$, які трошки відрізняються від відповідних матриць $C_1(H,\beta,\nu)$ і $C_2(H,\beta)$. Тому постановки задач оптимізації і методи їх розв'язку повністю співпадають з запропонованими для систем без запізнювання в попередніх двох розділах.

2.4. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості систем регулювання з запізнюванням методом функціоналів Ляпунова-Красовського

В цьому розділі розглянемо систему прямого регулювання з запізнюванням, що описана в (1.3.1). На відміну від попереднього, розглянемо задачу отримання гарантованої умови абсолютної стійкості в класі функціоналів Ляпунова-Красовського, тобто знаходження додатно визначених матриць H^0 і величини $\beta^0 \ge 0$, при яких мінімальне власне число симетричної матриці $C_6(G,H,\beta,\nu)$, яка визначає похідну, буде максимальне.

Оскільки задача схожа з розглянутою в першому розділі, будемо приводити лише твердження.

Системи прямого регулювання. Оптимізаційна задача розглядається на множині четвірок $L=\{(H,G,\beta,\nu): H\ge 0, G>0, \beta\ge 0, \nu>0\}$. За норму вибирається

$$|(H,G,\beta,\nu)|=\sqrt{|H|^2+|G|^2+\beta^2+\nu^2}\ ,\ |H|=\lambda_{\max}(H),\ |G|=\lambda_{\max}(G)\,.$$

Симетрична матриця $C_6(H,G,\beta,\nu)$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\min}[C_2(H,G,\beta,\nu)]>0.$ І розглядається оптимізаційну задачу

$$\phi_6(H,G,\beta,\nu)\to \min_{(H,\beta)\in L} \tag{2.4.1}$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}(H)\ge 0,\quad \beta\ge 0\,,\qquad \phi_6(H,G,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}[C_6(H,G,\beta,\nu)]\,. \tag{2.4.2}$$

Множина L - є лінійним простором, який являє собою опуклий конус. І, якщо оптимізаційна задача (2.4.1), (2.4.2) матиме розв'язком пару (H^0,G^0,β^0,ν^0), для якої

$$\phi_6(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)<0,$$

то система регулювання (1.3.5) буде абсолютно стійкою. Якщо

$$\phi_6(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)>0,$$

то задача дослідження абсолютної стійкості в класі функціоналів за рахунок вибору параметрів H, G, β, ν не розв'язується.

Позначимо через L_1 підмножину L_0 що складається з четвірок (H,G,β,ν), які знаходяться усередині одиничної сфери, тобто задовольняють умові

$$\lambda_{\max}^2(H)+\lambda_{\max}^2(G)+\beta^2+\nu^2\le 1\,. \tag{2.4.3}$$

Мають місце наступні твердження.

Лема 2.4.1. Завдання оптимізації (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) має розв'язок.

Лема 2.4.2. Функція $\phi_0(H,G,\beta,\nu)$ на множині L_1 є опуклою.

Таким чином задачі (2.4.1)-(2.4.2) є задачами опуклої оптимізації. Умови існування розв'язку будемо формулювати в термінах узагальненого градієнта.

Означення 2.4.1. Скалярним добутком двох четвірок (H^1,G^1,β^1,ν^1) і (H^2,G_2,β^2,ν^2) назвемо величину

$$\left\langle (H^1,\beta^1),(H^2,\beta^2)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^n h_{ij}^1h_{ij}^2+\sum_{i,j=1}^n g_{ij}^1g_{ij}^2+\beta^1\beta^2+\nu^1\nu^2\,, \tag{2.4.4}$$

де $H^1=\{h_{ij}^1\}$, $H^2=\{h_{ij}^2\}$, $G^1=\{g_{ij}^1\}$, $G^2=\{g_{ij}^2\}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Введемо наступні означення.

Означення 2.4.2. Узагальненим градієнтом опуклої функції $\phi_6(H,G,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ назвемо четвірку (E_0,K_0,f_0,l_0), для якої, при будь-яких $(H,G,\beta,\nu)\in L_1$ виконуватиметься

$$\phi_0(H,G,\beta,\nu)-\phi_0(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)\ge \left\langle (E_0,K_0,f_0,l_0),(H-H^0,G-G^0,\beta-\beta^0,\nu-\nu^0)\right\rangle. \tag{2.4.5}$$

Означення 2.4.3. Градієнтним множиною $R_\phi\{E,K,f,l\}$ функції $\phi_0(H,G,\beta,\nu)$ у внутрішній точці $(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ називатимемо множину четвірок (E_0,K_0,f_0,l_0), що задовольняють нерівності (2.4.5).

Обчислимо узагальнений градієнт функції

$$\phi_6(H,G,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}[C_6(H,G,\beta,\nu)]$$

у внутрішній точці. Отримаємо наступне твердження.

Теорема 2.4.1. Узагальненим градієнтом функції

$$\phi_0(H,G,\beta,\nu)=-\lambda_{\min}[C_6(H,G,\beta,\nu)]$$

у внутрішній точці $(H^0,G^0,\beta^0,\nu^0)\in L_1$ є четвірка (E_0,K_0,f_0,l_0), що складається з двох матриць E_0, K_0 і двох скалярів f_0 l_0 і має наступний вигляд

$$E_0=\{e_{ij}^0\}\,,\ e_{ij}^0=-z_0^TC_1(\Delta_{ij},\Theta,0,0)z_0\,,\ \ K_0=\{k_{ij}^0\}\,,\ k_{ij}^0=-z_0^TC_1(\Theta,\Delta_{ij},0,0)z_0\,,\ i,j=\overline{1,n}\,,$$
$$f_0=-z_0^TC_1(\Theta,\Theta,1,0)z_0\,,\ \ k_0=-z_0^TC_1(\Theta,\Theta,0,1)z_0\,. \tag{2.4.6}$$

Тут z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_6(H_0, G_0, \beta^0, \nu^0) z$ досягає мінімального значення (власний вектор, що відповідає мінімальному власному числу).

З використанням отриманого виразу для узагальненого градієнта, і опуклості множини L_1, умови розв'язку задачі оптимізації (2.4.1), (2.4.2),(2.4.3) можна сформулювати таким чином [Васильєв Ф.П., стор. 210].

Теорема 2.4.2. Щоб функція $\phi_0(H,\beta)$ досягала свого мінімального значення в точці $(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0) \in L_1$ необхідно і достатньо, щоб для довільного $(H, G, \beta, \nu) \in L_1$ виконувалась умова

$$\left\langle \left(E_0, K_0, f_0, l_0\right), \left(H - H^0, G - G^0, \beta - \beta^0, \nu - \nu^0\right) \right\rangle \geq 0 \tag{2.4.7}$$

Причому точка $(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0)$ задовольняла граничній умові

$$\lambda_{\max}^2\left(H^0\right) + \lambda_{\max}^2\left(G^0\right) + \left(\beta^0\right)^2 + \left(\nu^0\right)^2 = 1.$$

Таим чином, умови абсолютної стійкості системи (1.3.1) можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.4.4. Нехай H^0, G^0 - додатно визначені матриці, β^0, ν^0 скаляри, при яких виконується умова

$$\left\langle \left(E_0, K_0, f_0, l_0\right), \left(H - H^0, G - G_0, \beta - \beta^0, \nu - \nu_0\right) \right\rangle \geq 0, \quad \lambda_{\max}^2\left(H^0\right) + \lambda_{\max}^2\left(G^0\right) + \left(\beta^0\right)^2 + \left(\nu^0\right)^2 = 1.$$

Тут

$$E_0 = \left\{e_{ij}^0\right\},\ e_{ij}^0 = z_0^T C_6\left(\Delta_{ij}, \Theta, 0, 0\right) z_0,\quad K_0 = \left\{k_{ij}^0\right\},\ k_{ij}^0 = z_0^T C_6\left(\Theta, \Delta_{ij}, 0, 0\right) z_0,\quad f_0 = -z_0^T C_6\left(\Theta, \Theta, 1, 0\right) z_0,\ l_0 = -z_0^T C_6\left(\Theta, \Theta, 0, 1\right) z_0,$$

z_0 одиничний вектор, на якому квадратична форма $z^T C_6(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0) z$ досягає мінімального значення (власний вектор, відповідний мінімальному власному числу)

Щоб система (1.3.1) була абсолютно стійкою достатньо, щоб матриця $C_6(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0)$ вигляду (1.4.2) була додатно визначеною. Причому, якщо $C_2(H^0, G^0, \beta^0, \nu^0)$ не є додатно визначеною, то за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського отримати твердження про асимптотичну стійкість не можна, тобто функціонал

$$V_0\left[x(t)\right] = x^T(t) H^0 x(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s) G x(t+s) ds + \beta^0 \int_{0}^{c^Y x(t)} f(\xi) d\xi$$

є оптимальним в даному класі функціоналів.

Системи непрямого регулювання. Формулювання всіх основних результатів знаходження оптимальних функціоналів Ляпунова-Красовського щодо систем непрямого регулювання зберігається в тій же самій формі. Лише оптимізаційна задача розглядається на множині трійок $L = \left\{(H, G, \beta) : H \geq 0, G > 0, \beta \geq 0\right\}$. За норму вибирається

$$\left|(H, G, \beta)\right| = \sqrt{|H|^2 + |G|^2 + \beta^2},\ |H| = \lambda_{\max}(H),\ |G| = \lambda_{\max}(G).$$

І розглядається оптимізаційна задача

$$\phi_7(H, G, \beta) \to \min_{(H, G, \beta) \in L} \tag{2.4.8}$$

при обмеженнях

$$\lambda_{\min}(H) \geq 0,\ \ \lambda_{\min}(G) \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \ \phi_6(H, G, \beta) = -\lambda_{\min}\left[C_7(H, G, \beta)\right]. \tag{2.4.9}$$

2.5. Оптимізаційний метод знаходження умов абсолютної стійкості різницевих систем із запізнюванням

При дослідженні абсолютної стійкості різницевих систем з запізнюванням методом функціоналів Ляпунова-Красовського функціонал та його похідні залежать від додатно визначених матриць H, G і параметрів β, ν. Тому умови абсолютної стійкості визначаються квадратичною формою з матрицею $C_8(H, G, \beta, \nu)$, яка трошки відрізняються від відповідної матриці $C_6(H, G, \beta, \nu)$. Але постановки задач оптимізації і методи їх розв'язку повністю співпадають з запропонованими для систем прямого регулювання із запізнюванням.

Список використаних джерел

1. Хусаинов Д.Я. Об оптимизации оценивания времени переходного процесса в линейных системах с использованием функции Ляпунова. – В сб.: Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления, в.69. – К.: Изд.-во Института кибернетики АН УССР, 1986. – С.33-37.
2. Жуйкова А.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки области изменения параметров в системах непрямого регулирования // Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.6. – К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987. – С.93-97.
3. Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценки времени переходного процесса в задачах регулирования.- В сб.: Вычислительная и прикладная математика, в.61. – К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1987. – С.106-112.
4. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т. Оптимизация оценок начальных возмущений в линейных стохастических системах.- Вестник Киевского университета. Моделирование и оптимизация сложных систем, в.7. – К.: Изд.-во "Наукова думка" при КГУ, 1988. – С.40-45.
5. Хусаінов Д.Я., Давидов В.Ф. Оптимізація оцінки області стійкості квадратичних систем градієнтним методом // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 1992. – С.27-33.
6. Бычков А.С., Лобок А.П., Нечаева И.Г., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценок устойчивости систем стохастических дифференциально-разностных уравнений // Кибернетика и системный анализ, №4, 1992. – С.38-43.
7. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптмизационный метод исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием // Кибернетика и системный анализ, N4, 1996. – С.88-93.
8. Хусаинов Д.Я., Марценюк В.П. Оптимизационный метод построения функционалов Ляпунова-Красовского в стационарных системах с запаздыванием. – В сб. Вычислительная и прикладная математика, в.80, 1996. – С.142-151.
9. Хусаинов Д.Я., Стадник О.И., Давыдов В.Ф. Оптимизация оценок характеристик динамических систем // Журнал обчислювальної та прикладної математики, N1 (84), 1999, – С.128-136.
10. Ивохин Е.В., Хусаинов Д.Я. Оптимизация оценок характеристик динамических систем. – Український математичний конгрес-2001. Динамічні системи. Секція 2. Тези доповідей, Київ, 2001. – С.8.
11. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.-Л. Гостехиздат, 1951. – 251 с.
12. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М., Изд.-во АН СССР, 1963. – 261 с.

13. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, №6, 1968. – С.5-36.
14. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. – М., Наука, 1982. – 256 с.
15. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., Наука, 1978. – 400 с.
16. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущенияз параметров. Алгебраические критерии. – Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. – 208 с.
17. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с.
18. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Абсолютная устойчивость разностных систем с запаздыванием //Обчислювальна та прикладна математика, в.2, 2009.
19. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
19. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., Наука, 1988. – 552 с.
20. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М., Наука, 1975. – 320 с.
21. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, Изд.-во МВ и ССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с.
22. Шатирко А.В. Про один оптимізаційний підхід дослідження задач абсолютної стійкості // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2010. – С.197-204.

Надійшла до редколегії 09.07.13

А. Шатырко, канд. физ.-мат. наук,
Д. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПТИМИЗАЦИИЙНИ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассматривается задача исследования устойчивости в целом нулевого положения равновесия нелинейных дифференциально-разностных систем регулирования с нелинейностью, которая находится в заданном секторе, т.е. задача абсолютной устойчивости систем с последействием. Условия устойчивости получены с использованием метода функций Ляпунова з функцией вида суммы квадратичной составляющей и итеграла от нелинейности Для нахождения функции Ляпунова предложен оптимизационный подход. Соответствующая функция Ляпунова названа оптимальной.

Ключевые слова: истема регулирования, система с запаздыванием, функция Ляпунова, условие Разумихина, абсолютная устойчивость.

Shatyrko A., Ph.D. Physics and Mathematics,
Khusainov, Denys Ya., Dr. Sc. phys. math. Professor,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

OPTYMIZATSIYIYNI METHODS OF ABSOLUTE STABILITY CONTROL SYSTEM

The problem of studying the stability of the whole of the zero equilibrium position of non-linear difference-differential control systems with non-linearity, which is located in a given sector, ie the problem of absolute stability of systems with aftereffect. The conditions of stability are obtained using the method of Lyapunov functions h function of the type and amount of the quadratic component of the non-linearity of itegrala To find the Lyapunov function proposed optimization approach. The corresponding Lyapunov function is called optimal.

Keywords: regulatory system with delay, Lyapunov function, the condition Razumikhina, absolute stability.

УДК 004.42:510.69

С. Шкільняк, д-р фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

СИЛЬНИЙ ЛОГІЧНИЙ НАСЛІДОК В ЛОГІКАХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ ТА СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ЙОГО ФОРМАЛІЗАЦІЇ

Досліджено відношення сильного логічного наслідку в чистих першопорядкових логіках часткових однозначних квазіарних предикатів. Для цього відношення побудовано секвенційні числення та доведено їх коректність і повноту. Для такої побудови використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних.

Ключові слова: Коректність, повнота, QSLR-числення, секвенційні числення, секвенційне дерева.

Основоположним поняттям логіки є поняття логічного слідування. В роботі [1] запропоновано уточнення логічного слідування в композиційно-номінативних логіках квазіарних предикатів за допомогою відношень логічного наслідку. На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів на множині формул можна ввести 5 таких "природних" відношень: "істиннісний" $|=_T$, "хибнісний" $|=_F$, "сильний" $|=_{TF}$, "неспростовнісний" $|=_{CI}$, "насичений" $|=_{Cm}$ логічні наслідки. Для першопорядкових логік квазіарних предикатів зазначені відношення досліджено в [1–3], для пропозиційної логіки такі відношення розглядались в [4]. Для випадку однозначних часткових предикатів (некласична семантика) немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|=_{Cm}$, тому можна розглядати відношення $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{CI}$. Традиційним для логік однозначних предикатів є "неспростовнісний" логічний наслідок, його називають також некласичним. Відношення $|=_{CI}$ розглядається, зокрема, в роботах [5–7], для цього відношення, поширеного на множини формул, збудовано низку числень секвенційного типу. Це зроблено як для логік еквітонних [5], так і для загального випадку логік однозначних квазіарних предикатів [6, 7]. Відношення $|=_T$ та $|=_F$ в певному розумінні однобічні та не зовсім адекватні інтуїтивному розумінню логічного слідування в логіках однозначних предикатів, тому основну увагу приділимо відношенню $|=_{TF}$ сильного логічного наслідку.

Метою даної роботи є побудова числень секвенційного типу, які формалізують відношення $|=_{TF}$ для чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік однозначних предикатів. Для цих числень доведено теореми коректності й повноти. При побудові числень використовуємо спеціальні предикати (див. [7, 8]), які визначають наявність значення для предметних імен. Подібні числення для формалізації відношення $|=_{CI}$ запропоновано в [7], дана робота є безпосереднім її продовженням.

Будемо дотримуватись позначень роботи [7]. Необхідні для розуміння даної роботи поняття і визначення наведені в [7], тому тут лише нагадаємо основні з них.