13. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика, №6, 1968. – С.5-36.
14. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. – М., Наука, 1982. – 256 с.
15. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М., Наука, 1978. – 400 с.
16. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущенияз параметров. Алгебраические критерии. – Киев, Наукова думка, Институт математики УССР, 1989. – 208 с.
17. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997. – 236 с.
18. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Абсолютная устойчивость разностных систем с запаздыванием //Обчислювальна та прикладна математика, в.2, 2009.
19. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
19. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., Наука, 1988. – 552 с.
20. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М., Наука, 1975. – 320 с.
21. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. – Нукус, Изд.-во МВ и ССО Республики Узбекистан, 1992. – 139 с.
22. Шатирко А.В. Про один оптимізаційний підхід дослідження задач абсолютної стійкості // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2010. – С.197-204.

Надійшла до редколегії 09.07.13

А. Шатырко, канд. физ.-мат. наук,
Д. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ОПТИМИЗАЦИИЙНИ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассматривается задача исследования устойчивости в целом нулевого положения равновесия нелинейных дифференциально-разностных систем регулирования с нелинейностью, которая находится в заданном секторе, т.е. задача абсолютной устойчивости систем с последействием. Условия устойчивости получены с использованием метода функций Ляпунова з функцией вида суммы квадратичной составляющей и итеграла от нелинейности Для нахождения функции Ляпунова предложен оптимизационный подход. Соответствующая функция Ляпунова названа оптимальной.

Ключевые слова: истема регулирования, система с запаздыванием, функция Ляпунова, условие Разумихина, абсолютная устойчивость.

Shatyrko A., Ph.D. Physics and Mathematics,
Khusainov, Denys Ya., Dr. Sc. phys. math. Professor,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

OPTYMIZATSIYIYNI METHODS OF ABSOLUTE STABILITY CONTROL SYSTEM

The problem of studying the stability of the whole of the zero equilibrium position of non-linear difference-differential control systems with non-linearity, which is located in a given sector, ie the problem of absolute stability of systems with aftereffect. The conditions of stability are obtained using the method of Lyapunov functions h function of the type and amount of the quadratic component of the non-linearity of itegrala To find the Lyapunov function proposed optimization approach. The corresponding Lyapunov function is called optimal.

Keywords: regulatory system with delay, Lyapunov function, the condition Razumikhina, absolute stability.

УДК 004.42:510.69

С. Шкільняк, д-р фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

СИЛЬНИЙ ЛОГІЧНИЙ НАСЛІДОК В ЛОГІКАХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ ТА СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ЙОГО ФОРМАЛІЗАЦІЇ

Досліджено відношення сильного логічного наслідку в чистих першопорядкових логіках часткових однозначних квазіарних предикатів. Для цього відношення побудовано секвенційні числення та доведено їх коректність і повноту. Для такої побудови використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних.

Ключові слова: Коректність, повнота, QSLR-числення, секвенційні числення, секвенційне дерева.

Основоположним поняттям логіки є поняття логічного слідування. В роботі [1] запропоновано уточнення логічного слідування в композиційно-номінативних логіках квазіарних предикатів за допомогою відношень логічного наслідку. На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів на множині формул можна ввести 5 таких "природних" відношень: "істиннісний" $|=_T$, "хибнісний" $|=_F$, "сильний" $|=_{TF}$, "неспростовнісний" $|=_{Cl}$, "насичений" $|=_{Cm}$ логічні наслідки. Для першопорядкових логік квазіарних предикатів зазначені відношення досліджено в [1–3], для пропозиційної логіки такі відношення розглядались в [4]. Для випадку однозначних часткових предикатів (неокласична семантика) немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|=_{Cm}$, тому можна розглядати відношення $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$. Традиційним для логік однозначних предикатів є "неспростовнісний" логічний наслідок, його називають також неокласичним. Відношення $|=_{Cl}$ розглядається, зокрема, в роботах [5–7], для цього відношення, поширеного на множини формул, збудовано низку числень секвенційного типу. Це зроблено як для логік еквітонних [5], так і для загального випадку логік однозначних квазіарних предикатів [6, 7]. Відношення $|=_T$ та $|=_F$ в певному розумінні однобічні та не зовсім адекватні інтуїтивному розумінню логічного слідування в логіках однозначних предикатів, тому основну увагу приділимо відношенню $|=_{TF}$ сильного логічного наслідку.

Метою даної роботи є побудова числень секвенційного типу, які формалізують відношення $|=_{TF}$ для чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік однозначних предикатів. Для цих числень доведено теореми коректності й повноти. При побудові числень використовуємо спеціальні предикати (див. [7, 8]), які визначають наявність значення для предметних імен. Подібні числення для формалізації відношення $|=_{Cl}$ запропоновано в [7], дана робота є безпосереднім її продовженням.

Будемо дотримуватись позначень роботи [7]. Необхідні для розуміння даної роботи поняття і визначення наведені в [7], тому тут лише нагадаємо основні з них.

Областю істинності та областю хибності квазіарного предиката $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ назвемо множини

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = T\} \text{ та } \boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = F\}.$$

В роботі розглядаємо чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних преликатів (ЧКНЛ). Базовими композиціями ЧКНЛ є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$.

Предикат, який є значенням формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначаємо Φ_A.

Введемо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z, тобто наявність значення для z. Предикати εz задаємо так:

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \in asn(d)\}$; $\boldsymbol{T}(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^{V}A \mid z \notin asn(d)\}$.

Такі предикати εz назвемо індикаторами наявності значення для предметного імені (змінної).

Далі в роботі розглядатимемо ЧКНЛ, мови яких розширені множиною $\{\varepsilon x \mid x \in V\}$ символів предикатів-індикаторів εx. Такі розширені логіки названі [7] ε-ЧКНЛ. Базовими композиціями ε-ЧКНЛ є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$, εx.

Відношення логічного наслідку. Спочатку задаємо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$.

1) "Істиннісний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_T$: $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_T \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$.

2) "Хибнісний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_F$: $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_F \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

3) "Сильний", або "строгий" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{TF}$: $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

4) "Неспростовніснй", або "неокласичний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{Cl}$: $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

Відповідні відношення логічного наслідку $|\!\!=_T$, $|\!\!=_F$, $|\!\!=_{TF}$, $|\!\!=_{Cl}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi \,|\!\!=_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_* \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Зрозуміло, що $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_T \Psi$ та $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_F \Psi$; $\Phi \,|\!\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi \,|\!\!=_T \Psi$ та $\Phi \,|\!\!=_F \Psi$.

Неформально кажучи, $\Phi \,|\!\!=_{TF} \Psi$ означає, що при переході від Φ до Ψ завжди не зменшується "істинність" та не збільшується, "хибність", що відповідає інтуїтивному розумінню логічного слідування. Водночас при $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_T \Psi$ можливе одночасне збільшення як "істинності", так і "хибності", а при $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_F \Psi$ можливе одночасне зменшення як "хибності", так і "істинності", що видається не зовсім адекватним.

Зауважимо, що в найзагальнішому випадку логік неоднозначних часткових предикатів маємо $\Phi \,|\!\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi \,|\!\!=_F \Psi \Leftrightarrow \Phi \,|\!\!=_{TF} \Psi$ та немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|\!\!=_{Cm}$ чи відношенні $|\!\!=_{Cl}$ (див. [1]), тому в цьому випадку маємо єдине природне змістовне відношення логічного наслідку $|\!\!=_{TF}$.

Відношення еквівалентності в моделі мови $\boldsymbol{A}$ $_{A}{\sim}_T$, $_{A}{\sim}_F$, $_{A}{\sim}_{TF}$, $_{A}{\sim}_{Cl}$ та відношення логічної еквівалентності $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi\, _{\boldsymbol{A}}{\sim}_* \Psi$, якщо $\Phi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_* \Psi$ та $\Psi\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_* \Phi$; $\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi \,|\!\!=_* \Psi$ та $\Psi \,|\!\!=_* \Phi$.

Відношення $\sim_{Cl}$ – це традиційне відношення еквівалентності в логіках однозначних часткових предикатів (див. [5]), воно зазвичай позначається $\sim$.

Відношення сильної еквівалентності $\sim_{TF}$ називають також відношенням строгої еквівалентності.

Для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо: $\Phi\, _{A}{\sim}_{TF} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) = \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, тобто $\Phi_A = \Psi_A$. Тому $\Phi \sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат.

Відношення логічного наслідку та еквівалентності мають [1–3] вельми специфічні властивості. Зокрема, для $|\!\!=_T$, $|\!\!=_F$, $|\!\!=_{TF}$ закон контрапозиції невірний, для $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$ не можна знімати заперечення в обох частинах еквівалентності. Це веде до розщеплення властивостей для $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, які треба записувати для формул та їх заперечень. Маємо також:

– $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \,|\!\!=_T \Psi$, $\Phi \,\&\, (\Phi\to\Psi) \,|\!\!\neq_F \Psi$; $\Phi \,|\!\!\neq_T \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\Phi \,|\!\!=_F \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

– $\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_T \Phi$ та невірно $\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_F \Phi$; $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_F \Phi$ та невірно $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_T \Phi$.

Поширимо відношення логічного наслідку на довільні множини формул. Нехай Γ та Δ – множини формул.

Δ є Cl-наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!= \Delta$), якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$.

Δ є TF-наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{TF} \Delta$), якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$ та $\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$.

Δ є Cl-логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma \,|\!\!=_{Cl} \Delta$), якщо $\Gamma\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{Cl} \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Δ є TF-логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\, _{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{TF} \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Подібним чином вводимо відношення $_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_T$, $_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_F$, та $|\!\!=_T$, $|\!\!=_F$.

Для $\sim_{TF}$ та $\sim_{Cl}$ справджується теорема заміни еквівалентних (зауважимо, що для $\sim_T$ та $\sim_F$ така теорема невірна).

Теорема 1 1) *Нехай* $\Phi \sim_{TF} \Psi$; *тоді* $\Phi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$ *та* $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \Psi$;

2) *нехай* $\Phi \sim_{Cl} \Psi$; *тоді* $\Phi, \Gamma \,|\!\!=_{Cl} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \,|\!\!=_{Cl} \Delta$ *та* $\Gamma \,|\!\!=_{Cl} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{Cl} \Delta, \Psi$.

Наведемо основні властивості відношення $|\!\!=_{TF}$.

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Rightarrow \Lambda \,|\!\!=_{TF} \Sigma$.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$.

Для однозначних предикатів маємо також властивість *CLR*:

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

$\neg\neg_{|-}$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$;

$\neg\neg_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \Phi$.

$\vee_{|-}$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$ та $\Psi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$;

$\vee_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_{|-}$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$;

$\neg\vee_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \neg\Psi$.

RT$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$;

RT$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

$\neg$RT$_{|-}$) $\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$;

$\neg$RT$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

ΦN$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta$;

ΦN$_{-|}$) $\Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_{TF} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ (тут $y \in \nu(\Phi)$).

$\neg\Phi N_{\vdash}$) $\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg\Phi N_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ (тут $y \in \nu(\Phi)$.

$RR_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$RR_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$.

$\neg RR_{\vdash}$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg RR_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$.

$R\neg_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$R\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$;

$\neg R\neg_{\vdash}$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg R\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

$R\vee_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$R\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$.

$\neg R\vee_{\vdash}$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg R\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ та $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$.

$R\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$R\exists R_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$.

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \models \Delta$ та $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi$.

$\neg R\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$;

$\neg R\exists R_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\neg\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\neg\exists x\Phi)$.

Зокрема, $R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\exists x\Phi$.

Наведемо тепер властивості, пов'язані з елімінацією кванторів (зокрема, елімінації кванторів під реномінацією).

$\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon z$ (за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$.

$\neg\exists R_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\neg\exists_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{x}_{z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$.

$\exists Rf_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$, $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists f_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\neg\exists Rf_{\vdash}$) $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z \in V_T$, $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\neg\exists f_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R^{x}_{z}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon z$ (за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists Rv_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists v_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \varepsilon y$.

$\neg\exists Rv_{\vdash}$) $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\neg\exists v_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R^{x}_{y}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon y$.

$\exists Rd_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists d_{\dashv}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi$ та $\Gamma \models_{TF} \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \varepsilon y$.

$\neg\exists Rd_{\vdash}$) $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\neg\exists d_{\vdash}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\neg\exists x\Phi, \neg R^{x}_{y}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta, \varepsilon y$.

Секвенційні числення для формалізації відношення $\models_{TF}$. Числення секвенційного типу, які формалізують відношення $\models_{TF}$ сильного логічного наслідку для множин формул ЧКНЛ однозначних квазіарних предикатів, будуємо на основі наведених вище властивостей цього відношення.

Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих спеціальними символами $\vdash$ та $\dashv$. Секвенції позначаємо як $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, або, не деталізуючи, у вигляді Σ. Формули секвенції, відмічені символом $\vdash$, називають *T*-формулами, а відмічені символом $\dashv$, – *F*-формулами. Секвенційне числення будуємо так, що $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta$.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ означає, що $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Базова умова замкненості секвенції:

C) Σ замкнена, якщо існує формула Φ така: $_{\vdash}\Phi \in \Sigma$ та $_{\dashv}\Phi \in \Sigma$.

Додаткові умови замкненості: CLR та *unv*-замкненість. Умова CLR індукована властивістю *CLR* відношення $\models_{TF}$:

CLR) Σ замкнена, якщо існують формули Φ та Ψ: $_{\vdash}\Phi \in \Sigma$, $_{\vdash}\neg\Phi \in \Sigma$, $_{\dashv}\Psi \in \Sigma$, $_{\dashv}\neg\Psi \in \Sigma$.

Секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ із множиною *unv*-змінних *Un* назвемо *unv-замкненою*, якщо існує пара *unv*-еквівалентних відносно *Un* *R*-формул Φ та Ψ таких, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Psi \in \Delta$ (деталі див. у [7]).

Множина *unv*-змінних секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ – це $Un = \{u \in V \mid \varepsilon(u) \in \Gamma\}$. Якщо секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ *unv*-замкнена, то $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення логічного наслідку для множин формул.

Секвенційне дерево *замкнене*, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ.

На основі властивостей відношення **$|\!=_{TF}$** вводимо такі базові секвенційні форми:

$$_{\vdash}\text{RT}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma};\qquad _{\dashv}\text{RT}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\text{RT}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\text{RT}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\Phi\text{N}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);\qquad _{\dashv}\Phi\text{N}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);$$

$$_{\vdash}\neg\Phi\text{N}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);\qquad _{\dashv}\neg\Phi\text{N}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma},\ \text{де } y\in\nu(A);$$

$$_{\vdash}\text{R}\exists\text{R}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA),\Sigma};\qquad _{\dashv}\text{R}\exists\text{R}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\text{R}\exists\text{R}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA),\Sigma}\qquad _{\dashv}\neg\text{R}\exists\text{R}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\text{R}\exists\text{p}\ \frac{_{\vdash}\exists xA,\Sigma}{_{\vdash}R_{y}^{x}(\exists xA),\Sigma};\qquad _{\dashv}\text{R}\exists\text{p}\ \frac{_{\dashv}\exists xA,\Sigma}{_{\dashv}R_{y}^{x}(\exists xA),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\text{R}\exists\text{p}\ \frac{_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{y}^{x}(\exists xA),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\text{R}\exists\text{p}\ \frac{_{\dashv}\neg\exists xA,\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{y}^{x}(\exists xA),\Sigma}.$$

Форми типів RT, ¬RT, ΦN, ¬ΦN, R∃R, ¬R∃R, R∃p ¬R∃p – *допоміжні*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

$$_{\vdash}\text{RR}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma};\qquad _{\dashv}\text{RR}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\text{RR}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\text{RR}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\text{R}\neg\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma};\qquad _{\dashv}\text{R}\neg\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\text{R}\neg\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\text{R}\neg\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\text{R}\vee\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma};\qquad _{\dashv}\text{R}\vee\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\text{R}\vee\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\text{R}\vee\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma\quad _{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\neg\ \frac{_{\vdash}A,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg\neg A,\ \Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\neg\ \frac{_{\dashv}A,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg\neg A,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{_{\vdash}A,\Sigma\quad _{\vdash}B,\Sigma}{_{\vdash}A\vee B,\Sigma};\qquad _{\dashv}\vee\ \frac{_{\dashv}A,_{\dashv}B,\Sigma}{_{\dashv}A\vee B,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\vee\ \frac{_{\vdash}\neg A,\ _{\vdash}\neg B,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg(A\vee B),\ \Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\vee\ \frac{_{\dashv}\neg A,\ \Sigma\quad _{\dashv}\neg B,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg(A\vee B),\ \Sigma}.$$

Ми вводимо дві різновидності форм для елімінації кванторів: елімінації квантора під реномінацією (∃R-форми) та елімінації зовнішнього квантора (∃-форми).

$$_{\vdash}\exists\ \frac{_{\vdash}R_{z}^{x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}\exists xA,\Sigma},\ \text{де } z\in V_T,\ z\notin nm(\Sigma,\exists xA);\qquad _{\dashv}\neg\exists\ \frac{_{\dashv}\neg R_{z}^{x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\neg\exists xA,\Sigma},\ \text{де } z\in V_T,\ z\notin nm(\Sigma,\neg\exists xA);$$

$$_{\vdash}\exists\text{R}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\exists\text{R}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ _{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для форм $_{\dashv}\exists$R та $_{\vdash}\neg\exists$R умова: $x\notin\{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA))$.

Секвенційні форми ${}_{\vdash}\exists$R, ${}_{\dashv}\neg\exists$R та ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\dashv}\neg\exists$ будемо називати $\exists_T$-формами.

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{f}\ \frac{{}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}R_z^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA,\Sigma},\ \text{де } z\in V_T,\ z\notin nm(\Sigma, \exists xA); \qquad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{f}\ \frac{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\vdash}\neg R_z^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma},\ \text{де } z\in V_T,\ z\notin nm(\Sigma, \exists xA);$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rf}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}; \qquad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rf}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon z,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}.$$

Для форм ${}_{\dashv}\exists$Rf та ${}_{\vdash}\neg\exists$Rf умова: $x\notin\{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA))$.

Для ${}_{\dashv}\exists$f, ${}_{\vdash}\neg\exists$f та ${}_{\dashv}\exists$Rf, ${}_{\vdash}\neg\exists$Rf додаткова умова: Σ не містить спеціальних предикатних символів (ПС) вигляду εz.
Форми ${}_{\dashv}\exists$f, ${}_{\vdash}\neg\exists$f та ${}_{\dashv}\exists$Rf, ${}_{\vdash}\neg\exists$Rf назвемо формами типу $\exists$f.

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{v}\ \frac{{}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}R_y^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}; \qquad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{v}\ \frac{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\vdash}\neg R_y^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rv}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma},\ \text{де } x\notin\{\bar{u}\}; \quad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rv}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\vdash}\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma},\ \text{де } x\notin\{\bar{u}\}.$$

Форми ${}_{\dashv}\exists$v, ${}_{\vdash}\neg\exists$v та ${}_{\dashv}\exists$Rv, ${}_{\vdash}\neg\exists$Rv назвемо формами типу $\exists$v.

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{d}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}\exists xA,\Sigma \qquad {}_{\dashv}\exists xA,\ {}_{\dashv}R_y^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA,\Sigma}; \qquad {}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{d}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma \qquad {}_{\vdash}\neg\exists xA,\ {}_{\vdash}\neg R_y^x(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\vdash}\neg\exists xA,\Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{Rd}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma \qquad {}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma},\ \text{де } x\notin\{\bar{u}\};$$

$${}_{\vdash}\neg\exists\mathrm{Rd}\ \frac{{}_{\vdash}\varepsilon y,\ {}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma \qquad {}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ {}_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ {}_{\dashv}\varepsilon y,\Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma},\ \text{де } x\notin\{\bar{u}\}.$$

Форми ${}_{\dashv}\exists$d, ${}_{\vdash}\neg\exists$d та ${}_{\dashv}\exists$Rd, ${}_{\vdash}\neg\exists$Rd назвемо формами типу $\exists$d.

Для форм типу $\exists$d умова: εy не входить до складу Σ, водночас Σ містить принаймі один спеціальний ПС вигляду εz.

Секвенційні форми типів $\exists$f, $\exists$v, $\exists$d будемо називати $\exists_F$-формами.

Секвенційні числення логік однозначних квазіарних предикатів із наведеними вище базовими секвенційними формами назвемо *QSLR-численнями.*

Побудова секвенційного дерева. Процедура побудови секвенційного дерева для заданої секвенції Σ фактично однакова для різних першопорядкових числень числень (див., напр., [5, 7]). Подібна процедура для *QSC*-числень описана в [7], тому тут акцентуємо увагу на особливостях процедури для *QSLR*-числень.

Процедура побудови дерева для секвенції Σ починається з кореня дерева. Така процедура розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед побудовою дерева зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* "нових" тотально (строго) неістотних імен такий, що $nm(\Sigma)\cap TN = \varnothing$.

На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списку *T*-формул та списку *F*-формул. На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків (або єдина *T*-формула чи *F*-формула, якщо один зі списків порожній).

Нехай виконано *k* етапів процедури. На етапі *k*+1 перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, маємо замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією (див. [7]). Поява фінальної секвенції ξ сигналізує про про наявність в дереві незамкненого шляху (від кореня до ξ), всі його вершини незамкнені.

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ наступним чином.

(1) Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули секвенції ξ.

(2) До кожної активної формули застосовуємо відповідну основну секвенційну форму (так, як це описано нижче).

За потреби застосовуємо належну кількість разів допоміжні форми типів RT, $\neg$RT, ΦN, $\neg\Phi$N, R$\exists$R, $\neg$R$\exists$R, R$\exists$p. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні. До таких формул на даному етапі основні форми вже не застосовуються.

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному застосуванні такої форми беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне ім'я *z* як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини. Після цього застосовуємо форми типу RR, $\neg$RR, R$\neg$, $\neg$R$\neg$, R$\vee$, $\neg$R$\vee$, $\neg\neg$, $\vee$, $\neg\vee$. Далі застосовуємо $\exists_F$-форми. Це робимо таким чином.

Якщо в момент застосування $\exists_F$-форми до формули Φ серед формул секвенції ξ ще немає формул вигляду ${}_{\dashv}\varepsilon y$, то застосовуємо відповідну форму типу $\exists$f, інакше до Φ застосовуємо форму типу $\exists$v для всіх *y* таких, що ${}_{\dashv}\varepsilon y\in\xi$. Нехай після цього отримана секвенція $\boldsymbol{\eta}$. Далі до Φ застосовуємо форму типу $\exists$d для всіх $y\in nm(\mathbf{_0})$ таких, що $\varepsilon y\notin\boldsymbol{\eta}_0$, де $\boldsymbol{\eta}_0$ – множина доступних формул секвенції $\boldsymbol{\eta}$, добудовуючи скінченне піддерево з вершиною $\boldsymbol{\eta}$.

Після виконання кожної форми перевіряємо секвенції-вершини на замкненість. При появі замкненої секвенції до неї вже незастосовна жодна форма, і процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Повтори формул у секвенціях усуваємо.

Якщо процедура побудови дерева для секвенції Σ завершена позитивно, то маємо скінченне замкнене дерево.

Якщо така процедура завершено негативно (маємо скінченне незамкнене дерево) або ця процедура не завершується (маємо нескінченне дерево), то у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Коректність та повнота *QSLR*-числень. Для побудованих числень справджується

Теорема 2 (коректності). *Нехай секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Доведення. Нехай $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Із процедури побудови випливає, що для кожної його вершини $\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}$ маємо $\Lambda \models_{TF} \mathrm{K}$. Для листів дерева це випливає з їх замкненості. Збереження секвенційними формами відношення $\models_{TF}$ (від засновків до висновків) випливає із відповідних однойменних властивостей цього відношення. Отже, $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Для доведення повноти *QSLR*-числень використаємо метод модельних (хінтікківських) множин. За його допомогою доводиться теорема про існування контрмоделі, звідки стандартним чином отримуємо теорему повноти.

Теорема 3 (про контрмодель**).** Нехай $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві*, ***H*** *– множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують моделі мови* ***A*** = (*A*, ***I***), ***B*** = (*A*, ***I***) *та* δ, $\eta\in{}^{V}\!A$ *такі*:

1) $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ *та* $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$; 2) $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$ *та* $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Пари (***A***, δ) та (***B***, η) із наведеними вище властивостями назвемо *T*-контрмоделлю та *F*-контрмоделлю.

Задамо множини *W* та *Un* означених імен та неозначених імен множини ***H***:

$W = \{y\in nm(\boldsymbol{H}) \mid \dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$; $Un = \{y\in nm(\boldsymbol{H}) \mid \vdash\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$.

Доведення. Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою. Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується жодна з умов замкненості. Тому для множини ***H*** гарантовано виконуються наступні умови коректності:

HC) Не існує примітивної формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$;

HCLR) Не існують примітивні формули Φ та Ψ такі, що $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$, $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$, $\dashv\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

HCU) Не існує пари примітивних *Un-unv*-еквівалентних формул $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}A$ та $R^{\bar{u}}_{\bar{y}}A$ таких, що $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}A \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv R^{\bar{u}}_{\bar{y}}A \in \boldsymbol{H}$.

Зауважимо, що умова HCLR рівносильна умові "HCL або HCR", де умови HCL і HCR такі:

HCL) не існує примітивної формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HCR) не існує примітивної формули Ψ такої, що $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої виконуються згідно з секвенційними формами *QSLR*-числення. Звідси випливає, що для ***H*** справджуються наступні умови.

HRT) Якщо $\vdash R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬RT) Якщо $\vdash\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HΦN) Якщо $\vdash R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬ΦN) Якщо $\vdash\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∃R) Якщо $\vdash R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$; якщо $\dashv R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

H¬R∃R) Якщо $\vdash\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$; якщо $\dashv\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

HR∃p) Якщо $\vdash R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H¬R∃p) Якщо $\vdash\neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HRR) Якщо $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬RR) Якщо $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR¬) Якщо $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬R¬) Якщо $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∨) Якщо $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬R∨) Якщо $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ або $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬¬) Якщо $\vdash\neg\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H∨) Якщо $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

H¬∨) Якщо $\vdash\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\dashv\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

H∃) Якщо $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$.

H¬∃) Якщо $\vdash\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$; якщо $\dashv\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\dashv\neg R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H∃R) Якщо $\vdash R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

H¬∃R) Якщо $\vdash\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх $y\in W$;

якщо $\dashv\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in \boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\dashv\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$.

Множину специфікованих формул $\boldsymbol{H}$, для якої виконуються наведені вище умови, назвемо *модельною*.

Побудуємо контрмодель за модельною множиною $\boldsymbol{H}$.

Для множини $W=\{y\in nm(\boldsymbol{H})\,|\,\dashv\varepsilon y\in \boldsymbol{H}\}$ візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$. Фактично така A дублює множину усіх означених предметних імен, що фігурують у $\boldsymbol{H}$. Візьмемо деяку ін'єктивну $\delta\in {}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$.

Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ та η, а також на ІМ вигляду $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)$ та $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta)$:

Якщо $\vdash\varepsilon y\in \boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y(\delta) = T$, що й означає $y\notin asn(\delta)$; якщо $\dashv\varepsilon y\in \boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y(\delta) = F$, що й означає $y\in asn(\delta)$.

Якщо $\vdash p\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) = T$ та $p_B(\eta) \neq F$; якщо $\dashv p\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) \neq T$ та $p_B(\eta) = F$.

Якщо $\vdash\neg p\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) = F$ та $p_B(\eta) \neq T$; якщо $\dashv\neg p\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(\delta) \neq F$ та $p_B(\eta) = T$.

Якщо $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) = T$ та $p_B(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta)) \neq F$; якщо $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) \neq T$ та $p_B(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta)) = F$.

Якщо $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) = F$ та $p_B(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta)) \neq T$; якщо $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in \boldsymbol{H}$, то $p_A(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) \neq F$ та $p_B(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta)) = T$.

Для атомарних формул і формул вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)$ та їх заперечень твердження теореми випливають із наведеного визначення значень базових предикатів.

Далі доведення проводиться стандартним чином індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення модельної множини $\boldsymbol{H}$. Наведемо для прикладу доведення для пп. H¬R¬ та H¬∃R.

Нехай $\vdash\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно H¬R¬ маємо $\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_A(\delta)=T$, звідки $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)_A(\delta)=T$. За припущенням індукції для η маємо $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_B(\eta)\neq F$, звідки $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)_B(\eta)\neq F$.

Нехай $\dashv\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно H¬R¬ маємо $\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_A(\delta)\neq T$, звідки $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)_A(\delta)\neq T$. За припущенням індукції для η маємо $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_B(\eta)=F$, звідки $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)_B(\eta)=F$.

Нехай $\vdash\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно H¬∃R тоді для всіх $y\in W$ маємо $\vdash\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A(\delta)=T$ для всіх $y\in W$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto\delta(y))=F$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\delta\in A^{W}$ маємо $\delta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк δ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\delta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto b)=F$ для всіх $b\in A$, звідки $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A(\delta)=T$. За припущенням індукції для η маємо $\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_B(\eta)\neq F$ для всіх $y\in W$. Звідси $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto\eta(y))\neq T$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\eta\in A^{W}$ тоді $\eta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк δ – бієкція, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\eta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto b)\neq T$ для всіх $b\in A$, звідки $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_B(\eta)\neq F$.

Нехай $\dashv\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно H¬∃R тоді існує $y\in W$ таке, що $\dashv\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A(\delta)\neq T$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto\delta(y))\neq F$. Однак $\delta(y)\downarrow$ згідно з $\delta\in {}^{W}\!A$ та $y\in W$, тому для $a=\delta(y)$ маємо $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto a)\neq F$ звідки $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A(\delta)\neq T$. За припущенням індукції для η маємо $\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_B(\eta)=F$. Звідси $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto\eta(y))=T$. Однак $\eta(y)\downarrow$ згідно з $\eta\in {}^{W}\!A$ та $y\in W$, тому отримуємо $\Phi_B(\eta\nabla\bar{u}\mapsto\eta(\bar{v})\nabla x\mapsto a)=T$ для $a=\eta(y)$, звідки $\neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_B(\eta)=F$.

Для вибору T-контрмоделі чи F-контрмоделі беремо до уваги наступне.

Якщо при виконанні HCLR не виконується HCL (тоді маємо HCR), то для T-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, тому беремо F-контрмодель.

Якщо при виконанні HCLR не виконується HCR (тоді маємо HCL), то для F-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, тому беремо T-контрмодель.

Якщо виконуються HCL та HCR, то можна брати як T-контрмодель, так і F-контрмодель.

На основі теореми 3 отримуємо теорему повноти для *QSLR*-числень.

Теорема 4 (повноти). *Нехай* $\Gamma\,|\!\!=_{TF}\Delta$. *Тоді секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна.*

Припустимо супротивне: $\Gamma\,|\!\!=_{TF}\Delta$ та $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma=\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Тоді (теорема 3) множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – модельна. Згідно з теоремою 3 існують T-контрмодель $(\boldsymbol{A},\delta)$ та F-контрмодель $(\boldsymbol{B},\eta)$ такі:

1) $\vdash\Phi\in \boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_A(\delta)=T$ та $\dashv\Phi\in \boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_A(\delta)\neq T$; 2) $\vdash\Phi\in \boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_B(\eta)\neq F$ та $\dashv\Phi\in \boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_B(\eta)=F$.

Для T-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta\subseteq \boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta)=T$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\Psi_A(\delta)\neq T$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Delta_A)$, звідки невірно $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{T}\Delta$, тому й заперечує $\Gamma\,|\!\!=_{TF}\Delta$.

Для F-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta\subseteq \boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\Phi_B(\eta)\neq F$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\Psi_B(\eta)=F$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\Delta_B)$, звідки невірно $\boldsymbol{F}(\Delta_B)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma\,{}_{\boldsymbol{B}}|\!\!=_{F}\Delta$, тому й заперечує $\Gamma\,|\!\!=_{TF}\Delta$.

Висновки. В роботі досліджено відношення сильного логічного наслідку в чистих першопорядкових композиційно-номінативних логіках часткових однозначних квазіарних предикатів. Для цього відношення побудовано числення секвенційного типу, доведено коректність і повноту цих числень. Для такої побудови використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних. Подібні числення для логік неоднозначних квазіарних предикатів будуть запропоновані в наступних роботах.

Список використаних джерел

1. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010. № 1.
2. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011, Вип. 4.
3. Шкільняк С.С. Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2011, № 4.
4. Смирнова Е.Д. Логика и философия. – М., 1996.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008.
6. Шкильняк С.С. Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и сист. анализ. – 2010. – № 6.
7. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Спеціальні секвенційні числення чистих композиційно-номінативних логік першого порядку. // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: кібернетика. – 2012, Вип. 12.
8. Nikitchenko M., Tymofieiev V. Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 0137. – Springer, 2012.

Надійшла до редколегії 28.09.12

С. Шкильняк, д-р физ.-мат. наук, доц.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

СИЛЬНОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ В ЛОГИКАХ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ И СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ЕГО ФОРМАЛИЗАЦИИ

Исследовано отношение сильного логического следствия в чистых першопорядковых логиках частичных однозначных квазиарних предикатов. Для этого отношения построены секвенциальные исчисления и доказана их коректность и полноту. Для такого построения использованы специальные предикаты, определяющие наличие значения для переменных.

Ключевые слова: корректность, полнота, QSLR-исчисление, секвенциальные исчисления, секвенциальные дерева.

Shkilnyak S., Dr. Sc. phys. math.,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

STRONG LOGICAL CONSEQUENCE IN THE LOGIC QUASIARY PREDICATES AND SEQUENT CALCULUS FOR IT FORMALIZATION

Relation of strong logical consequence of pure first-order logics of partial single-valued quasi-ary predicates is study. For this relation sequent calculi are constructed, the soundness and completeness of these calculi are proved. For this construction special variable definedness predicates are used.

Keywords: correctness, completeness, QSLR-calculus, sequent calculus sequent tree.