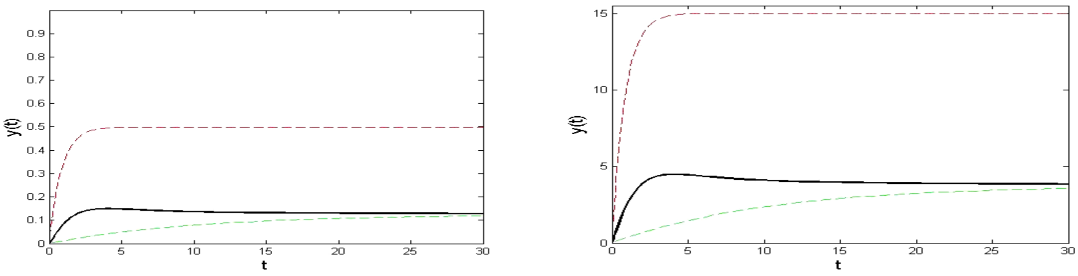

Fig. 3. The level of the medicament for $0 \le t \le 30$ **and** $\delta = 0.1, k = 2, y_0 = 0.1$ $\delta = 0.1, k = 2, y_0 = 0.1$ **or** $\delta = 0.1, k = 1.2, y_0 = 3$

We can make conclusion: In the case when the rate of active substance elimination is described by bounded function $0 < p_0 \le p(t) \le p_1$, the level of the medicament in the compartment after long-lasting infusion is between values $\frac{y_0}{p_1}$ and $\frac{y_0}{p_0}$. Moreover, if the function $p(t)$ is the exponential function of the form mentioned above, the level of the medicament in the compartment convergent to the value $\frac{y_0}{p_1}$. For two considered values of the parameters $\delta = 0.1, k = 2, y_0 = 0.1;\ \delta = 0.1, k = 1.2, y_0 = 3$ the limit value is 0.125 or 3.75 respectively.

References

1. Diblik, J. – Ruzickova , M. 2004. Existence of positive solutions of singular initial problem for a nonlinear system of differential equations. In Rocky Mountain Journal of Mathematics. ISSN 0035-7596, 2004, vol. 34, no. 3, p. 923-944.
2. Hartman, P. 2002. Ordinary Differential Equations, 2nd Edition. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhauser, 2002. 278 p. ISBN 0-89871-510-5.
3. Kaclik, P. 2008. Kapitoly matematiky a matematickej statistiky. 1. vyd. Bratislava: Univerzita Komenskeho, 2008. 274 p. ISBN 978-80-223-2466-3.
4. Srzednicki, R. 2004. Wazewski Method and Conley Index. In Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Vol. 1. Amsterdam: Elsevier, 2004. ISBN 978-0-444-51128-7. p. 593-600.

Надійшла до редколегії 10.09.13

М. Лангерова, проф.,
Ружикова М., проф.
Університет Жиліна, Словаччина, Жиліна

ФАРМАКОКІНЕТИЧНА МОДЕЛЬ ВНУТРИВЕННОГО ВВЕДЕННЯ ЛІКІВ

Розглядається модель внутривенного введення препарату побудована на вихідній завдачі Коші для нелінійного диференціального рівняння. Показано, що при деяких умовах існує позитивне обмеження розв'язку розглянутої моделі. При доказі основного результату, ми застосовуємо метод топологічних відмовлення. Наочний приклад вирішується для конкретної функції, що описує швидкість виведення лікарського засобу з відсіку, застосувавши системи програмування MATLAB.

Ключові слова: фармакокінетичні моделі, внутрішньовенно, ліки.

М. Лангерова, проф.,
М. Ружикова, проф.
Университет Жилина, Словакия, Жилина

ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВНУТРИВЕННОГО ВВЕДЕНИЯ ЛЕКАРСТВ

Рассматривается модель внутривенного введения препарата построена на исходной завдачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения. Показано, что при некоторых условиях существует положительное ограничения решения рассматриваемой модели. При доказательстве основного результата, мы применяем метод топологического отказа. Наглядный пример решается для конкретной функции, описывающей скорость выведения лекарственного средства из отсека, применив системы программирования MATLAB.

Ключевые слова: фармакокинетические модели, внутривенно, лекарства.

УДК 517.929

Н. Гаркуша, канд. екон. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ДИНАМІКА НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ ПОПУЛЯЦІЇ ЛЕСЛІ

В роботі проведено дослідження нелінійної моделі популяції Леслі. Модель записана у векторно-матричному вигляді різницевих рівнянь. Зроблено припущення про нелінійний вплив щільності популяції на динаміку системи. Визначено точки спокою. Досліджено вплив параметрів системи на її "грубість".

Ключові слова: динамічна система, різницеві рівняння, точки спокою, асимптотична стійкість, фазовий портрет.

Вступ

В наступній роботі продовжується дослідження динаміки моделі популяції Леслі, що проводилась в роботах [1-3]. Розглянута нелінійна (квазілінійна) модель. Модифікуємо Лінійна модель динаміки популяції Леслі, що була записана у векторний-матричному вигляді в роботі [8], модифікується наступним чином. Для обліку впливу щільності популяції на її плодючість, введена величина, що є зваженим розміром популяції [4-5]

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \ , \tag{0.1}$$

$\alpha_j > 0$, $j = \overline{1,n}$ – сталіі, які відображають вплив віку на життєві темпи зростання популяції. Зроблено припущення, що щільність популяції надає вплив на плодючість лінійним чином і залежність від неї у всіх класів однакова. Тоді плодючість середнього індивіда f_i класу $i = \overline{1,n}$ є функцією вигляду

$$f_i = a\widetilde{f}_i g[w(x)],\ \ j = \overline{1,n}, \tag{0.2}$$

де $\widetilde{f}_i$ – максимальний вихід відтворення середнього індивіда, що відноситься до вікового класу, $g[w]$ – залежність падіння народжуваності від щільності, a – ймовірність виживання індивідів першого вікового класу до моменту переходу до другого класу.

На функцію $g[w]$ зазвичай накладають наступні умови:

1) $g[w]$ є неперервно диференційованою, монотонно спадаючою при $0 \le w < +\infty$ функцією;

2) $g[w]$ задовольняє наступним умовам

$$g:[0,+\infty) \to (0,1],\ \ g(0) = 1,\ \ \lim_{w \to +\infty} g[w] = 0. \tag{0.3}$$

Можливі наступні варіанти вибору функцій, що задовольняють поставленим умовам:

а) $g[w] = \dfrac{1}{1+cw}$, $c > 0$;

б) $g[w] = \dfrac{1}{1+(cw)^{\alpha}}$, $c > 0$, $\alpha > 0$;

в) $g[w] = e^{-\alpha w}$, $\alpha > 0$;

Тоді матриця L системи матиме вигляд

$$L[w(x)] = \begin{bmatrix} a\widetilde{f}_1 g[w(x)] & a\widetilde{f}_2 g[w(x)] & \dots & a\widetilde{f}_{n-1} g[w(x)] & a\widetilde{f}_n g[w(x)] \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{0.4}$$

і система буде квазілінійною

$$x(k+1) = L[w(x(k))],\ \ k = 0,1,2,\dots \tag{0.5}$$

1. Обчислення точок спокою

Дослідження системи проводиться наступним чином. Визначаються особливі точки системи. Їх дослідження проводиться методом лінеаризації. Знаходяться стаціонарні розв'язки квазілінійної системи. Позначимо

$$R_f = \widetilde{f}_1 + p_1\widetilde{f}_2 + p_1 p_2 \widetilde{f}_3 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1}\widetilde{f}_n. \tag{1.1}$$

Має місце наступне твердження.

Лема 1.1. Нехай функція $g[w]$, неперервно диференційована при $0 \le w < +\infty$, монотонно згасаюча і задовольняє умовам (0.3)

1. Якщо параметри системи такі, що $1 - R_f > 0$, то єдиним станом рівноваги системи (0.5) є початок координат $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,\dots$.

2. Якщо параметри системи такі, що $1 - R_f = 0$, то система (0.5) також має єдиний стан рівноваги $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,\dots$.

3. Якщо параметри системи такі, що $1 - R_f < 0$, то існують два стани рівноваги $x(k) \equiv 0$, $x(k) \equiv x^*$, $k = 0,1,2,\dots$,

$$(x^*)^T = \left(\frac{w^*}{R_\alpha}, p_1\frac{w^*}{R_\alpha}, p_1 p_2\frac{w^*}{R_\alpha}, \dots, p_1 p_2 \dots p_{n-1}\frac{w^*}{R_\alpha}\right),\ \ R_\alpha = \alpha_1 + p_1\alpha_2 + p_1 p_2 \alpha_3 + \dots + p_1 p_2 \dots p_{n-1}\alpha_n,$$

де w^* – корінь рівняння $ag[w]R_f = 1$.

Доведення. Стаціонарний стан системи (0.5) взначається розв'язком рівняння

$$\begin{gathered} x_1 = ag[w(x)]\left(\widetilde{f}_1 x_1 + \widetilde{f}_2 x_2 + \dots + \widetilde{f}_n x_n\right) \\ x_2 = p_1 x_1 \dots \\ x_n = p_{n-1}x_{n-1},\ \ w(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Підставивши в перше рівняння значення

$$x_2 = p_1 x_1,\ x_3 = p_1 p_2 x_1,\ \dots,\ x_n = p_1 p_2 \dots p_{n-1} x_1,$$

отримаємо

$$x_1 = ag\left[R_\alpha x_1\right]\left(\tilde{f}_1 + p_1\tilde{f}_2 + ... + p_1 p_2 ... p_{n-1}\tilde{f}_n\right)x_1 ,$$

або

$$\left\{1 - ag\left[R_\alpha x_1\right]R_f\right\}x_1 = 0 . \qquad (1.3)$$

1. Нехай параметри системи такі, що виконується нерівність

$$1 - ag\left[R_\alpha x_1\right] > 0 .$$

Оскільки, за умовою леми, функція $g\left[w\right]$ є монотонно спадаючою, що задовольняє умовам (0.3), тобто $g\left[0\right] = 1$, і

$$\lim_{w\to+\infty} g\left[w\right] = 0 ,$$

то

$$1 - ag\left[R_\alpha x_1\right]R_f > 0$$

при довільному $x_1 \geq 0$. Таким чином, рівняння має єдиний розв'язок $x_1^* = 0$. З останніх $n-1$ – го рівнянь системи отримуємо, що $x_i^* = 0$, $i = \overline{2,n}$. Таким чином система має лише єдину стаціонарну точку $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,...$

2. Нехай параметри системи такі, що ввиконується нерівність.

$$1 - aR_f = 0 .$$

Тоді рівняння розщеплюється на два

$$x_1 = 0 , \ ag\left[x_1 R_\alpha\right] = 0 . \qquad (1.4)$$

Подставивши ( ) в друге рівняння ( ), отримуємо

$$g\left[x_1 R_\alpha\right] = 1 .$$

Як випливає з властивостей функції $g\left[w\right]$, це можливо лише при

$$x_1 R_\alpha = 0 ,$$

тобто лише при $x_1^* \equiv 0$. Звідси отримуємо, що $x(k) \equiv 0$, $k = 0,1,2,...$ є єдиною сталою точкою системи ( ).

3. Нехай параметри системи такі, що виконується ( ), тобто

$$1 - aR_f < 0 .$$

Тоді рівняння ( ) знов має два розв'язки вигляду ( ). Крім того, як випливає з властивостей функції $g\left[w\right]$ (монотонність, $g\left[0\right] = 1$, $\lim_{w\to+\infty} g\left[w\right] = 0$) друге з рівнянь ( ) має ненульовий розв'язок $w = w^*$, $0 < w^* < +\infty$. Звідси, крім $x_1^* = 0$, розв'язком також буде $x_1^* = \frac{w^*}{R_\alpha}$. Знов використовуючи останні $(n-1)$ – рівнянь системи, отримуємо

$$x_2^* = \frac{w^*}{R_\alpha}p_1 , \ \ x_3^* = \frac{w^*}{R_\alpha}p_1 p_2 , \ \ldots, \ x_n^* = \frac{w^*}{R_\alpha}p_1 p_2 ... p_{n-1} .$$

тобто твердження леми 1.1.

Зауваження 1.1. Значення параметрів системи, при яких $1 - aR_f = 0$, називаються біфуркаційними, тобто критичними для роздвоєння стану рівноваги системи.

Зауваження 1.2. Для нелинійної системи Лесли виляду ( ) з функцїєю $w(x)$ вигляду $w(x) = \frac{1}{1+cw}$, $c > 0$ стаціонарними станами рівноваги є наступні:

1) при $1 - aR_f \geq 0$ початок координат $x^* = 0$,

2) при $1 - aR_f \geq 0$ початок координат $x_1^* = 0$ і

$$\left(x_2^*\right)^T = \left(\frac{aR_f - 1}{cR_\alpha}, \frac{aR_f - 1}{cR_\alpha}p_1, \frac{aR_f - 1}{cR_\alpha}p_1 p_2, ..., \frac{aR_f - 1}{cR_\alpha}p_1 p_2 ... p_{n-1}\right).$$

Зауваження 1.3. Для нелінійної системы Лесли вигляду ( ) з функцією $w(x)$ вигляду $w(x) = \frac{1}{1+(cw)^\alpha}$, , $c > 0$ $\alpha > 0$ стаціонарними станами рівноваги є наступні:

1) при $1 - aR_f \geq 0$ початок координат $x^* = 0$,

2) при $1 - aR_f \geq 0$ початок координат $x_1^* = 0$ і $\left(x_2^*\right)^T = \left(\frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha}, \frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha}p_1, \frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha}p_1 p_2, ..., \frac{\sqrt[\alpha]{aR_f - 1}}{cR_\alpha}p_1 p_2 ... p_{n-1}\right).$

Зауваження 1.4. Для нелінійної системы Лесли вигляду ( ) з функцією $w(x)$ вигляду $w(x)=e^{-\alpha x}$, $\alpha>0$ стаціонарними станами рівноваги є наступні:

1) при $1-aR_f \ge 0$ початок координат $x^*=0$,

2) при $1-aR_f \ge 0$ початок координат $x_1^*=0$ і $\left(x_2^*\right)^T=\left(\frac{\ln\left(aR_f\right)}{cR_\alpha},\frac{\ln\left(aR_f\right)}{cR_\alpha}p_1,\frac{\ln\left(aR_f\right)}{cR_\alpha}p_1p_2,...,\frac{\ln\left(aR_f\right)}{cR_\alpha}p_1p_2...p_{n-1}\right)$.

2. Дослідження стійкості точок спокою

Проведемо дослідження кожного з станів рівноваги. При дослідженні нелінійних систем одним з достатньо універсальних методів дослідження станів рівноваги є лінеаризація системи в околі точки спокою. Якщо нелінійні члени порядку вище першого, то при певних припущеннях їх можна відкидати і робити висновок про асимптотичну стійкість або нестійкість стану рівноваги на підставі системи лінійного наближення.

Проведемо заміну

$$x(k)=y(k)+x^*,$$

де x^* точка спокою системи (x^* може бути і початком координат), і перепишемо вихідну квазілінійну систему у вигляді

$$\begin{cases} y_1(k+1)+x_1^*=ag\left[w^*+w(y(k))\right]\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i\left(y_i(k)+x_i^*\right) \\ y_j(k+1)+x_j^*=p_{j-1}\left[y_{j-1}(k)+x_{j-1}^*\right],\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тут w^*- розв'язок рівняння

$$ag[w]R_f=1,\ w(y(k))=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(k). \tag{2.2}$$

Оскільки $\left(x^*\right)^T=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$ є розв'язком системи, то після підстановки отримаємо

$$\begin{cases} y_1(k+1)=ag\left[w^*+w(y(k))\right]\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i\left(y_i(k)+x_i^*\right)-x_1^* \\ y_j(k+1)=p_{j-1}y_{j-1}(k),\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Лінеаризуючи систему (2.3) в точці $y(k)\equiv 0$, отримуємо систему рівнянь обурень

$$\begin{cases} y_1(k+1)=a\sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha_i\frac{dg\left[w^*\right]}{dw}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}_i x_j^*+g\left[w^*\right]\tilde{f}_i\right\}y_i(k) \\ y_j(k+1)=p_{j-1}y_{j-1}(k),\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Зокрема, якщо лінеаризація проведена в нульовій точці, то система набуде вигляду

$$\begin{cases} y_1(k+1)=a\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i y_i(k) \\ y_j(k+1)=p_{j-1}y_{j-1}(k),\ j=\overline{2,n}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Позначимо

$$\frac{df_i\left(x^*\right)}{dy_i}=a\left\{\alpha\left[\frac{dg\left[w^*\right]}{dw}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}_j x_j^*\right]+g\left[w^*\right]\tilde{f}_i\right\},\ i=\overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Тоді лінеаризована система набуде вигляду

$$y(k+1)=L\left[x^*\right](k),$$

де

$$L\left[x^*\right]=\begin{bmatrix} \frac{df_1\left(x^*\right)}{dy_1} & \frac{df_2\left(x^*\right)}{dy_2} & ... & \frac{df_{n-1}\left(x^*\right)}{dy_{n-1}} & \frac{df_n\left(x^*\right)}{dy_n} \\ p_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Знов розглянемо перераховані три випадки.

І. Нехай параметри системи такі, що

$$1-aR_f>0.$$

Тоді стан рівноваги $x(k)\equiv 0$ є асимптотично стійким.

II. Нехай параметри системи такі, що виконується рівність

$$1 - aR_f = 0 .$$

У цьому випадку система також має один стан рівноваги $x(k) \equiv 0$. Проте випадок є критичним і для висновку про стійкість (або нестійкості) стану рівноваги лінійного наближення вже недостатньо. Але дослідження за допомогою членів вищого порядку показує, що стан рівноваги є стійким.

III. Нехай параметри системи такі, що виконується нерівність

$$1 - aR_f < 0 .$$

У цьому випадку виникають два стани рівноваги $x(k) \equiv 0$ і $x(k) = x^*$, тобто стан рівноваги $x^* = 0$ роздвоюється. Причому нульовий стан рівноваги буде нестійким, а другий стан рівноваги $x(k) = x^*$ асимптотично стійким.

Висновок. Таким чином при, що відповідає

Список використаних джерел

1. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 181 с.
2. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
3. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
4. Смит Ж.М. Модели в экологии. – М.: Мир, 1976. – 184 с.
5. Уатт К. Экология и управление природными ресурсами. – М.: Мир, 1971. – 463 с.
6. Хусаінов Д.Я., Никифорова Н.С. Стійкість однієї моделі динаміки популяції // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.1, 1997. – С.218-229.
7. Хусаинов Д.Я., Никифорова Н.С. Устойчивость одного разностного уравнения с положительными коэффициентами // Украинский математический журнал, Т.51, N9, 1999. – С.1276-1280.
8. Гаркуша Н.И., Хусаінов Д.Я. Динаміка лінійної системи моделі популяції Леслі // Вісник Київського національного університета імені Тараса Шевченка: Серія :Кібернетики, в.11. – 2011.

Надійшла до редколегії 15.02.13

Н. Гаркуша, канд. экон. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПОПУЛЯЦИИ ЛЕСЛИ

В работе проведено исследование нелинейной модели популяции Лесли. Модель записана в векторно-матричном виде разностных уравнений. Сделано допущение про нелиное влияние плотности популяции на динамику системы. Определены точки покоя. Исследовано влияние параметров системі на ее "грубость".

Ключевые слова: динамическая система, разностные уравнения, точки покоя, асимптотическая устойчивость, фазовый портрет.

N. Harkusha, Ph.D. economy. Sciences
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

NONLINEAR DYNAMICS MODEL OF POPULATION LESLIE

Study conducted in the work nelyneynoy models populyatsyy Leslie. The model is written in vector-matrix equations raznostnыh video. Done assumption of nelynoe populyatsyy Effect of Density on the dynamics of the system. Opredelenы point of rest. Effect of research on system parameters ee "rudeness".

Keywords: dynamic system, difference equations, the rest point, asymptotic stability, phase portrait.

УДК 519.83 – Теория игр

С. Доценко, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИГРОВЫЕ СИТУАЦИИ В ЗАДАЧЕ ВЫБОРА НАИЛУЧШЕГО ИЛИ НАИХУДШЕГО ОБЪЕКТА

В статье рассмотрена игровая модификация задачи оптимального выбора, связанной с выбором наилучшего или наихудщего элемента. В рассмотренной задаче каждый из игроков осуществляет выбор на своем множестве элементов и исход вsбора одного из игроков становится известным другому. Равновесие по Нэшу найдено в явном виде.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, оптимальный выбор, игра симметричная, игра несимметричная.

Введение

В [1] была рассмотрена задача выбора наилучшего объекта, сформулированная следующим образом. Пусть некто в случайном порядке знакомится с n объектами и хочет выбрать среди них наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо от вергнуть его; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты являются упорядоченными определенным образом по качеству, т.е. качества любых двух объектов сравнимы между собой. "Ознакомление в случайном порядке" означает, что изначально все n! перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Объект, наилучший среди всех n в дальнейшем будем называть *наилучшим,* а объект, лучший среди k просмотренных – *максимальным.* Очевидно, что в ходе просмотра следует анализировать целесообразность остановки выбора на некотором объекте, только если он является максимальным. При этом оказывается, что первый объект является максимальным и индексы максимальных объектов образуют цепь Маркова с переходными вероятностями $p(k, j) = \dfrac{k}{j(j-1)}, j > k$. Более того, независимо от того, был ли k-й элемент максимальным или нет, вероятность того, что среди элементов с индексами $k+1,...,n$ минимальный индекс максимального элемента бу-