4. Rodney M. F. Goodman, A. J. McAuley. New trapdoor-knapsack public-key cryptosystem// IEE Proceedings, 1985. – V. 132, Pt. E. – № 6. – P. 289–292.
5. Harald Niederreiter. Knapsack-type cryptosystems and algebraic coding theory// Problems of Control and Information Theory, 1986. – V. 15. – P. 159–166.
6. Masakatu Morii, Masao Kasahara. New public key cryptosystem using discrete logarithm over GF(p)// IEICE Transactions, 1988. – V. J71-D. – № 02. – P. 448–453.
7. Hussain Ali Hussain, Jafar Wadi Abdul Sada, Saad M. Kalipha. New multistage knapsack public-key cryptosystem// International Journal of Systems Science, 1991. – V. 22. – №11. – P. 2313–2320. 8. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inf. Contr., 1965. – V.8. – P. 338–353.

Надійшла до редколегії 25.08.14

Ваднев Д. А., соискатель,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ В КАЧЕСТВЕ АЛГОРИТМА ДЛЯ ШИФРОВАНИЯ ДАННЫХ

Рассмотрен алгоритм шифрования данных на основе задачи о рюкзаке. Сформулирована задача повышения криптоустойчивости алгоритма. Предложена схема шифрования, построенная с использованием простых чисел и операций над ними специального вида. Проиллюстрирована работа алгоритма и его модификации на примере конкретной текстовой последовательности.
Ключевые слова: задача о рюкзаке, криптоустойчивочть, алгоритм шифрования.

Vadnev D.A., researcher,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

ON THE USE KNAPSACK PROBLEM AS ALGORITHM FOR DATA ENCRYPTION

In this paper a data encryption algorithm based on the problem of the knapsack is considered. The problem of algorithm's crypto resistance increasing is defined. It is proposed an encryption scheme, based on the use of prime numbers and operations on them by special form. The use of the algorithm and its modifications are illustrated on the test example of a text sequence.
Key words: knapsack problem, algorithm's crypto resistance, encryption algorithm.

УДК 517.929.4

Гаркуша Н. І., канд. екон. наук
Київський університет імені Тараса Шевченка, Київ

ДИНАМІКА ОДНІЄЇ ЕКОЛОГІЧНОЇ МОДЕЛІ "ХИЖАК-ЖЕРТВА" БЕЗ ВРАХУВАННЯ ВІКОВОЇ СТРУКТУРИ

Розглядається математична модель екології, що описує ріст популяції і взаємодії хижак-жертва. Модель представлена системою двох нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням, що визначає час статевого дозрівання популяції. Одержано умови, при виконанні яких рівноважний стан кількості хижаків і жертв є стійким.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, положення рівноваги, запізнення, стійкість.

Екологія – це наука, що вивчає умови існування живих організмів у взаємозв'язку між організмами і середовищем, в якому вони мешкають. Спочатку екологія розвивалася як складова частина біологічної науки в тісному зв'язку з іншими природничими науками [1,2]. Головний об'єкт екології – екосистеми, що представляють собою єдині комплекси, утворені живими організмами і середовищем їх проживання. Крім того, в область її досліджень входить вивчення окремих видів організмів, їх популяцій, тобто сукупностей особин одного виду, біотичних співтовариств, тобто сукупностей популяцій і біосфери в цілому. В даний час екологія вийшла за рамки суто біологічної науки і перетворилася на міждисциплінарну науку, що вивчає найскладніші проблеми взаємодії людини з навколишнім середовищем.

Одними із завдань екологічної науки є:

- розробка теорії і методів оцінки стійкості екологічних систем всіх рівнів;
- дослідження проблем популяційної екології, екології біотичних співтовариств, збереження біорізноманіття в природі, регулюючого впливу біоти на навколишнє середовище;
- оцінка стану і динаміки природних ресурсів та екологічних наслідків їх споживання;
- розробка і вдосконалення методів управління якістю навколишнього середовища.

Дана робота присвячена розробці та аналізу математичних моделей динаміки екологічних процесів з використанням різницевих, диференційно-різницевих рівнянь з післядією. Крім того, в ній розглядаються питання дослідження стійкості та одержання оцінок збіжності усталених режимів досліджуваних моделей екології, стабілізації положень рівноваги систем, описуваних рівняннями з післядією [3,4].

1. Модель взаємодії популяцій. В роботі розглядається математична модель росту популяції і взаємодії "хижак-жертва" з наступними припущеннями [5, стор.29].

1. Щільність даного виду, тобто число особин на одиницю площі, може бути повністю описана за допомогою однієї змінної, тобто нехтуємо віковими, статевими та генетичними відмінностями.
2. Зміни щільності можуть бути адекватно описані детерміністськими рівняннями.
3. Результати взаємодії в межах виду і між видами відбуваються миттєво.

Тоді модель може бути представлена системою двох диференціальних рівнянь виду [5, стор.38]

$$\dot{x}(t)=ax(t)-bx^2(t)-cx(t)y(t)\ ,\quad \dot{y}(t)=ey(t)-f\frac{y^2(t)}{x(t)}\ .$$

Або у вигляді "з виділеною квазілінійною частиною"

$$\dot{x}(t)=\left[a-bx(t)-cy(t)\right]x(t)\ ,\quad \dot{y}(t)=\left[e-f\frac{y(t)}{x(t)}\right]y(t)\ . \tag{1.1}$$

Рівняння для жертви ідентично для рівняння В. Вольтера з демпфуючим елементом. Рівняння для "хижака" подібно до логістичного рівняння, але другий член змінений, щоб враховувати щільність "жертви".

Якщо враховувати міжвидове запізнювання (час статевого дозрівання), то модель має вигляд системи із запізненням

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^2(t) - cx(t-\tau)y(t-\tau), \quad \dot{y}(t) = ey(t) - f\frac{y^2(t-\tau)}{x(t-\tau)}.$$

2. Дослідження моделі без післядії. Проведемо якісне дослідження отриманої системи без післядії (1.1). Знайдемо особливі точки. Особливі точки системи визначаються системою рівнянь

$$ax - bx^2 - cxy = 0, \quad ey - f\frac{y^2}{x} = 0. \tag{2.1}$$

Очевидно, що точку, яка є початком координат $O_1(0,0)$, можна виключити з розгляду. Вона означає відсутність популяцій і нецікава. Система рівнянь

$$a - bx - cy = 0, \quad ex - fy = 0.$$

визначає особливу точку $O_2(x_2, y_2)$, що лежить в першому квадраті

$$O_2(x_2, y_2). \quad x_2 = \frac{af}{bf+ce}, \quad y_2 = \frac{ae}{bf+ce}. \tag{2.2}$$

Лінеарізуємо систему з запізненням (1.1) в околі особливої точки $O_2(x_2, y_2)$. Загальна схема лінеаризації системи з запізненням в околі особливої точки $O_2(x_2, y_2)$ має наступний вигляд

$$\dot{x}(t) = [a - 2bx - cy]\Big|_{\substack{x=x,\\ y=y_2}} (x(t) - x_2) - c\,x\Big|_{\substack{x=x_2,\\ y=y_2}} (y(t) - y_2),$$

$$\dot{y}(t) = \left[f\frac{y^2}{x^2}\right]_{\substack{x=x_2,\\ y=y_2}} (x(t) - x_2) + \left[e - 2f\frac{y}{x}\right]_{\substack{x=x_2,\\ y=y_2}} (y(t) - y_2).$$

Підставивши значення $x = x_2$, $y = y_2$, отримуємо систему двох лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = A_1(x(t) - x_2) + B_1(y(t) - y_2), \quad \dot{y}(t) = C_1(x(t) - x_2) + D_1(y(t) - y_2),$$

$$A_1 = a - 2bx_2 - cy_2, \; B_1 = -cx_2, \; C_1 = f\frac{y_2^2}{x_2^2}, \; D_1 = e - 2f\frac{y_2}{x_2}. \tag{2.3}$$

Позначивши $x = x_2 + \xi$, $y = y_2 + \eta$, отримуємо, так звану систему "рівнянь збурень"

$$\dot{\xi}(t) = A_1\xi(t) + B_1\eta(t), \quad \dot{\eta}(t) = C_1\eta(t) + D_1\eta(t).$$

Її характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - (A_1 + D_1)\lambda + (A_1D_1 - B_1C_1) = 0.$$

Як випливає з умови Гурвіца, необхідною і достатньою умовою стійкості положення рівноваги для систем на площині є виконання нерівностей

$$(A_1 + D_1) < 0, \; (A_1D_1 - B_1C_1) > 0. \tag{2.4}$$

Підставивши значення параметрів з (2.3), отримаємо наступні нерівності

$$\left(a - 2bx_2 - cy_2 + e - 2f\frac{y_2}{x_2}\right) < 0, \; \left[(a - 2bx_2 - cy_2)\left(e - 2f\frac{y_2}{x_2}\right) + cf\frac{y_2^2}{x_2}\right] > 0. \tag{2.5}$$

Якщо підставити значення точки $\hat{I}_2(x_2, y_2)$, то перше з нерівності (2.5) прийме вигляд

$$-\frac{abf}{bf+ce} - e < 0$$

і завжди виконується. Друга нерівність має вигляд

$$e\left[\frac{abf}{bf+ce} + \frac{ce}{f}\right] > 0$$

і завжди виконується.

Таким чином, ненульове положення рівноваги, розташоване у першому квадраті, завжди є асимптотично стійким.

В роботі [5, стор.38] відзначено, "якщо відношення x/y велике (багато особин "жертви" на одного "хижака"), то чисельність "хижака" зростає; якщо $x/y = f/e$, то чисельність "хижака" досягає рівноваги; якщо ж $x/y < f/e$, то воно знижується. З рівнянь випливає наявність в системі швидко затухаючих коливань".

3. Дослідження моделі з післядією. Якщо враховувати міжвидове запізнювання (час статевого дозрівання), то модель має вигляд системи з запізненням (1.2)

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^2(t) - cx(t-\tau)y(t-\tau), \quad \dot{y}(t) = ey(t) - f\frac{y^2(t-\tau)}{x(t-\tau)}.$$

Проведемо дослідження положення рівноваги $O_2(x_2, y_2)$ цієї моделі. Лінеаризація системи (1.2) в околі точки $O_2(x_2, y_2)$ дає систему

$$\dot{x}(t) = [a - 2bx]_{\substack{x=x_2,\\ y=y_2}} (x(t) - x_2) - c\,y\Big|_{\substack{x=x_2,\\ y=y_2}} (x(t-\tau) - x_2) - c\,x\Big|_{\substack{x=x_2,\\ y=y_2}} (y(t-\tau) - y_2),$$

$$\dot{y}(t) = e\left(y(t) - y_2\right) + f\left.\frac{y^2}{x^2}\right|_{\substack{x=x_2,\\ y=y_2}}\left(\left(x(t-\tau) - x_2\right)\right) - 2f\left.\frac{y}{y}\right|_{\substack{xx=x_2,\\ y=y_2}}\left(y(t-\tau) - y_2\right).$$

Її можна записати у вигляді

$$\dot{x}(t) = [a - 2bx_2]\left(x(t) - x_2\right) - cy_2\left(x(t-\tau) - x_2\right) - cx_2\left(y(t-\tau) - y_2\right),$$

$$\dot{y}(t) = e\left(y(t) - y_2\right) + \frac{y_2^2}{x_2^2}\left(x(t-\tau) - x_2\right) - 2f\frac{y_2}{x_2}\left(y(t-\tau) - y_2\right).$$

Позначивши

$$A_2 = a - 2bx_2,\ A_3 = -cy_2,\ B_3 = -cx_2,\ D_2 = e,\quad ,\ D_3 = -2f\frac{y_2}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{af}{bf + ce},\ y_2 = \frac{ae}{bf + ce},$$

отримаємо

$$\dot{x}(t) = A_2\left(x(t) - x_2\right) + A_3\left(x(t-\tau) - x_2\right) + B_3\left(y(t-\tau) - y_2\right),$$

$$\dot{y}(t) = D_2\left(y(t) - y_2\right) + C_3\left(x(t-\tau) - x_2\right) + D_3\left(y(t-\tau) - y_2\right). \tag{3.1}$$

Або у векторно-матричному вигляді

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - \tau), \tag{3.2}$$

де

$$z(t) = \begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t) - x_2\\ y(t) - y_2\end{pmatrix}\ A = \begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & D_2\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}A_3 & B_3\\ C_3 & D_3\end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Неважко побачити, що

$$A_1 = A_2 + A_3,\ B_1 = B_3,\ C_1 = C_3,\ D_1 = D_2 + D_3. \tag{3.4}$$

Дослідимо вплив запізнювання на стійкість положення рівноваги.

Як відомо, необхідною умовою стійкості системи з запізненням є асимптотична стійкість системи без запізнювання, тобто умови заперечності дійсних частин власних чисел матриці $A + B$ [6,7]. Як випливає з викладеного вище, ця умова виконується. Тоді, в силу безперервності, при достатньо малому запізненні $\tau < \tau_0$ буде асимптотично стійким і положення рівноваги $\hat{I}_2(x_2, y_2)$ системи з запізненням (1.2). Однак, при збільшенні $\tau > 0$ може статися біфуркація, і стале становище рівноваги може стати нестійким. Встановимо значення величин параметрів системи, при яких зберігається стійкість.

Характеристичне рівняння із запізненням (3.1) має вигляд

$$\det\left\{A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda E\right\} = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix}A_2 + A_3e^{-\lambda\tau} - \lambda & B_3e^{-\lambda\tau}\\ C_3e^{-\lambda\tau} & D_2 + D_3e^{-\lambda_\tau} - \lambda\end{vmatrix} = \left(A_2 + A_3e^{-\lambda\tau} - \lambda\right)\left(D_2 + D_3e^{-\lambda\tau} - \lambda\right) - C_3B_3e^{-2\lambda\tau} = 0.$$

Його можна переписати у вигляді

$$\lambda^2 - \left[\left(A_3 + D_3\right)e^{-\lambda\tau} + \left(A_2 + D_2\right)\right]\lambda + \left[\left(A_3 + D_3\right)e^{-2\lambda\tau} + \left(A_3D_2 + A_2D_3\right)e^{-\lambda\tau} + A_2D_2\right] = 0.$$

Умовою асимптотичної стійкості положення рівноваги є заперечність дійсних частин коренів характеристичного рівняння, тобто $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1,2,3,...$Однак, перевірка цієї умови, в загальному випадку, є важкою.

Тому для отримання умов стійкості системи з запізненням скористаємося другим методом Ляпунова. А саме методом функцій Ляпунова з додатковою умовою Б.С. Разумихина при оцінці похідної. Функція Ляпунова береться у вигляді квадратичної форми

$$V(\xi, \eta) = h_{11}\xi^2 + 2h_{12}\xi\eta + h_{22}\eta^2, \tag{3.5}$$

Тобто в вигляді $V(z) = z^T Hz$, де

$$H = \begin{bmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{12} & h_{22}\end{bmatrix},\ z = \begin{pmatrix}x - x_2\\ y - y_2\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема. Нехай існують коефіцієнти c_{11}, c_{12}, c_{22}, які задовольняють нерівностям

$$c_{11} > 0,\ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \tag{3.7}$$

які задовольняють нерівностям

$$\lambda_{\min}(C) - 2|HB|\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\right) > 0. \tag{3.8}$$

Тут

$$\lambda_{\min}(C) = \frac{1}{2}\left[\left(c_{11} + c_{12}\right) - \sqrt{\left(c_{11} - c_{12}\right)^2 + 4c_{12}^2}\right],\ \lambda_{\min}(H) = \frac{1}{2}\left[\left(h_{11} + h_{12}\right) - \sqrt{\left(h_{11} - h_{12}\right)^2 + 4h_{12}^2}\right],$$

$$\lambda_{\max}(H)=\frac{1}{2}\left[(h_{11}+h_{12})+\sqrt{(h_{11}-h_{12})^2+4h_{12}^2}\right],\quad h_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta},\ h_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta},\ h_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta},\tag{3.8}$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_2+A_3 & C_3 & 0\\ B_3 & A_2+A_3+D_2+D_3 & C_3\\ 0 & B_3 & D_2+D_3\end{vmatrix},\ \Delta_{11}=-\begin{vmatrix}c_{11}/2 & C_3 & 0\\ c_{12} & A_2+A_3+D_2+D_3 & C_3\\ c_{22}/2 & B_3 & D_2+D_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{12}=-\begin{vmatrix}A_2+A_3 & c_{11}/2 & 0\\ B_3 & c_{12} & C_3\\ 0 & c_{22}/2 & D_2+D_3\end{vmatrix},\ \Delta_{22}=-\begin{vmatrix}A_2+A_3 & C_3 & c_{11}/2\\ B_3 & A_2+A_3+D_2+D_3 & c_{12}\\ 0 & B_3 & c_{22}/2\end{vmatrix}.\tag{3.9}$$

Тоді положення рівноваги $O_2(x_2,y_2)$ є асимптотично стійким при довільному запізненні $\tau>0$.

Доведення. Нехай матриця є позитивно певної матрицею. Обчислимо повну похідну функції (3.5) в силу системи (3.2). Отримуємо наступне

$$\frac{d}{dt}V(z(t))= z'(t)Hz(t)+z(t)Hz'(t)=(Az(t)+Bz(t-\tau))^T Hz(t)+z^T(t)H(Az(t)+Bz(t-\tau))=$$

$$=z^T(A+B)^T Hz(t)+z^T(t)H(A+B)-2z^T(t-\tau)HBz(t).$$

або

$$\frac{d}{dt}V(z(t))=-z^T(t)\left[-(A+B)^T H-H(A+B)\right]z(t)-2z^T(t-\tau)HBz(t).$$

Як випливає з [8], якщо $A+B$ асимптотично стійка матриця, то при довільній додатно визначеній матриці

$$C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}\end{bmatrix}\tag{3.7}$$

матричне рівняння Ляпунова

$$(A+B)^T H+H(A+B)=-C\tag{3.7}$$

має єдине рішення – позитивно певну матрицю H. Тому для повної похідної функції Ляпунова отримуємо таку нерівність

$$\frac{d}{dt}V(z(t))\le-\lambda_{\min}(C)|z(t)|^2+2|HB|\left[|z(t)|+|z(t-\tau)|\right].$$

Використовуючи умову Разуміхіна Б.С. про оцінку похідної за умови "підходу до поверхні рівня з внутрішньої сторони", отримуємо

$$\lambda_{\min}(H)|z(t-\tau)|^2\le V(z(t-\tau))<V(z(t))\le\lambda_{\max}(H)|z(t)|^2.$$

Звідси випливає, що $$|z(t-\tau)|\le\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}|z(t)|.$$

І для повної похідної отримуємо нерівність

$$\frac{d}{dt}V(z(t))\le-\left[\lambda_{\min}(C)-2|HB|\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\right]|z(t)|^2.$$

Якщо вираз в квадратних дужках позитивний, то похідна є негативно визначеною функцією, і положення рівноваги буде асимптотично стійким.

Розглянемо матричне рівняння Ляпунова (3.7) з матрицями (3.3), записане в матричному вигляді

$$\begin{bmatrix}A_2+A_3 & B_3\\ C_3 & D_2+D_3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{12} & h_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{12} & h_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_2+A_3 & B_3\\ C_3 & D_2+D_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}\end{bmatrix}.\tag{3.8}$$

Як випливає з критерію Сильвестра, щоб матриця була додатно визначеною необхідно і достатньо виконання нерівностей (3.7)

$$c_{11}>0,\qquad c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0.$$

Рішенням матричного рівняння (3.8) буде

$$h_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta},\ h_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta},\ h_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta},\tag{(3.9}$$

Де

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_2+A_3 & C_3 & 0\\ B_3 & A_2+A_3+D_2+D_3 & C_3\\ 0 & B_3 & D_2+D_3\end{vmatrix},\quad \Delta_{11}=-\begin{vmatrix}c_{11}/2 & C_3 & 0\\ c_{12} & A_2+A_3+D_2+D_3 & C_3\\ c_{22}/2 & B_3 & D_2+D_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{12}=-\begin{vmatrix}A_2+A_3 & c_{11}/2 & 0\\ B_3 & c_{12} & C_3\\ 0 & c_{22}/2 & D_2+D_3\end{vmatrix},\ \Delta_{22}=-\begin{vmatrix}A_2+A_3 & C_3 & c_{11}/2\\ B_3 & A_2+A_3+D_2+D_3 & c_{12}\\ 0 & B_3 & c_{22}/2\end{vmatrix}.\tag{3.10}$$

Оскільки, за умовою, матриця $A+B$ асимптотично стійка, то при виконанні умов

$$c_{11}>0,\ c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0$$

матриця H (3.6)) з елементами, визначеними в (3.9), (3.10), буде позитивно визначеною. І, якщо виконується нерівність (3.8), то похідна функції Ляпунова є негативно визначеною, і справедливо твердження теореми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гринь С.А., Кузнецов П.В., Шапорев П.В., Боглаенко Д.В., Экология. Тексты лекций. Харьков, НТУ "ХПИ", 2007. – 172 с.
2. Арский Ю.М., Данилов-Данильян В.И., Залиханов М.Ч., Кондратьев К.Я., Котляков В.М., Лосев К.С. Экологические проблемы: Кто виноват и что делать. – Москва, Изд.во МНЭПУ, 1997. – 332 с.
3. Гаркуша Н.І. Про близькість моделей динаміки Вольтера та Гудвіна // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.2, 2013. – С. 3.
4. Гаркуша Н.І. Динаміка моделі Гудвіна з післядією // Вісник Київського національного університета імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2013. – С.139-142
5. Смит Дж. Модели в экологии. – М., Мир, 1976. – 184 с.
6. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., Наука, 1970. – 240 с.
7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
8. Барбашин Е.А. Метод функций Ляпунова. – М.: Наука, 1970 . – 240 с.
9. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функция Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1977. – 236 с.

Надійшла до редколегії 25.09.14

Н. И. Гаркуша, канд. экон. наук,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ДИНАМИКА ОДНОЙ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ "ХИЩНИК-ЖЕРТВА" БЕЗ УЧЕТА ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается математическая модель экологии, описывающая рост популяций и взаемодействия хищник-жертва. Модель представлена системой двух нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, определяющим время полового созревания популяции. Получены условия, при выполнении которых равновесное состояние количества хищников и жертв является устойчивым.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, положение равновесия, запаздывание, устойчивость.

Harkusha N.I., PhD,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

DYNAMICS OF ONE OF ECOLOGICAL MODELS "PREDATOR-PREY" WITHOUT REGARD TO AGE STRUCTURE

In this paper the mathematical model of the environment, describing the growth of the population and predator-prey interactions. Model represented by a system of two nonlinear differential equations with delay in determining the time of puberty population. We obtain conditions under which the equilibrium state is the number of predators and prey is stable.

Key words: the system of differential equations, the equilibrium position, delay, stability.

УДК 519.83 – Теория игр

С. И. Доценко, канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр.,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ВЕКТОР ШЕПЛИ ДЛЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГР

Рассмотрен ряд примеров вычисления вектора Шепли для кооперативной игры в случае. если игроки, образующие коалицию, неравноправны и между ними существует иерархия.

Ключевые слова: теория кооперативных игр, вектор Шепли, иерархические игры.

Введение. Теория кооперативных игр (ТКИ) – это раздел теории игр, в котором игры рассматриваются без учёта стратегических возможностей игроков. В отличии от некооперативных игр, в которых каждый игрок выбирает стратегию, исходя из своих эгоистических мотивов, стремится максимизировать собственный выигрыш и безразличен к выигрышам остальных игроков, в ТКИ игроки (или агенты) действуют сообща, стремясь максимизировать суммарный выигрыш. Конфликт же возникает на этапе дележа полученного суммарного выигрыша. Каждый из игроков может претендовать на определенную часть общего выигрыша, аргументируя свой вклад в общие усилия при его получении. В терминах ТКИ поддаются описанию многие экономические и социальные явления.

Основоположником ТКИ принято считать американского математика и экономиста Ллойда Шепли, лауреата нобелевской премии по экономике за 2012 год. Ключевым понятием ТКИ является вектор Шепли, описывающий способ справедливого дележа, компонентами которого являются доли игроков в общем выигрыше.

Рассмотрим основные понятия ТКИ.

Пусть N – множество игроков , n – их количество .

Определение.Коалиция – подмножество множества игроков. Большая (Гранд) коалиция – это множество всех игроков.

Для кооперативной игры задается отображение $2^N \to R$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел, которое носит название характеристической функции игры.

Характеристическая функция каждой коалиции ставит в соответствие совместный заработок ее членов. Характеристическая функция в принципе может быть отрицательной (распределение затрат), но чаще она неотрицательная. При этом всегда предполагается, что пустая коалиция ничего не зарабатывает и никому ничего не должна, т.е. V(ф)=0.

Определение. Вкладом игрока i в коалицию S (где $i \notin S$) называется величина $V(S \cup i) - V(S)$ и обозначается Add(i,S).

Зафиксируем некоторую перестановку игроков. Для данной перестановки заработком каждого игрока назовем его вклад в коалицию, состоящую из предыдущих игроков. Ясно, что заработок может зависеть от порядка игроков в перестановке.

Вектор Шепли (ВШ) – это вектор заработков игроков, усредненный по всем возможным n! Перестановкам

$$Sh(V) = \frac{1}{n!} \sum_{\Pi_j} (add(1, \Pi_j), .., add(n, \Pi_j)) \quad (1)$$