Окончание табл. 6

	A	B	C
CBA	0	30	90
$\sum$	120	210	390
Шепли	20	35	65

Таблица 7

	A	B	C
ABC	-30	+30	0
ACB	-30	+30	0
BAC	0	0	0
BCA	0	0	0
CAB	-30	+30	0
CBA	0	0	0
$\sum$	-90	+90	0
Среднее	-15	+15	0

Таким образом, справедливое распределение выплат кредиторам с учетом отношения иерархии имеет вид: (5, 50, 65).

Выводы. Предложенный метод и приведенные примеры расширяют концепцию вектора Шепли на круг игр, в которых игроки могут вступать в иерархические отношения "начальник-подчиненный". Разобранные примеры показывают, что, как и следовало ожидать, в рассматриваемой схеме происходит перераспределение доходов подчиненных в пользу начальников. Другими словами по сравнению с компонентами классического вектора Шепли доходы начальников растут, а доходы починенных уменьшаются.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A.Roth, L.Shapley. Scientific background. Stable allocations and the practice of market design. Advanced information on Nobel prize in economics. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/advanced-economicsciences 2012.pdf
2. С. Доценко. Вектор Шепли как способ справедливого распределения. // Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2013, №3 (113), 12 с.
3. R. Aumann, M. Maschler. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. // Journal of economic theory 36 (1985), p. 195–213.

Поступила в редколегию 22.09.14

С. І. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ВЕКТОР ШЕПЛІ ДЛЯ ІЄРАРХІЧНИХ ІГОР

Розглянуто ряд прикладів обчислення вектора Шеплі для кооперативної гри у випадку, коли гравці, що утворюють коаліцію є нерівноправними та між ними існує ієрархія.

Ключові слова: теорія корпоративних ігор, вектор Шеплі, ієрархічні ігри.

Dotsenko S.I., PhD, phusical and mathematical sciences, senior researcher
Taras Shevchenko National University of Kyiv

SHAPLEY VALUE FOR HIERARCHICAL GAMES

The article considers Shapley value for cooperative games in the case, when players haven't equal rights, and there is some subordination among them.

Key words: theory of cooperative games, the Shapley value, hierarchical games.

УДК 519.87

Є. В. Івохін, д-р фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ З НЕЧІТКИМИ РЕСУРСАМИ

В роботі розглянуто метод пошуку оптимального розв'язку нечіткої транспортної задачі, ресурси в якій представлено нечіткими трикутними числами. Проілюстровано використання метода на прикладі реальної транспортної задачі. Розглянуто узагальнення методики вирішення нечіткої транспортної задачі з урахуванням важливості обмежень. Запропоновано залучення розробленого підходу для вирішення нечітких транспортних задач загального вигляду.

Ключові слова: транспортна задача лінійного програмування, множина розв'язків, методи прийняття рішень, нечіткі числа.

Вступ. Зміст транспортної задачі (ТЗ), яка є одним з прикладів задач математичного програмування, полягає у розподілі продукції будь-якої групи "виробників" серед будь-якої групи "споживачів" економічно найбільш оптимальним способом із заданими обмеженнями "пропозиції" та "попиту". В залежності від природи функції вартості перевезень транспортні задачі діляться на лінійні та нелінійні транспортні задачі.

Транспортна задача, що розв'язується на мережі, яка складається з кінцевого числа вузлів і дуг між ними, є задачею лінійного програмування (ЗЛП), якщо загальна вартість перевезень та обмеження на обсяги перевезень задаються лінійними функціями. Типовою проблемою є транспортування продукції від m виробників до n споживачів з потужностями $a_1, a_2, ..., a_m$ та $b_1, b_2, ..., b_n$, відповідно. Для знаходження ефективного плану перевезень задається вартість транспортування одиниці продукції c_{ij} з пункту виробництва $i, i = \overline{1,m}$, до пункту споживання $j, j = \overline{1,n}$, а змінні x_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, визначають обсяги перевезень від виробника до місця призначення.

Ефективні алгоритми вирішення транспортної задачі були розроблені для випадків, коли вартість та коефіцієнти споживання відомі апріорі. Однак на практиці досить часто розглядаються приклади, в яких ці параметри не можуть бути задані точно. Наприклад, вартість доставки може змінюватися в процесі транспортування. Запити на обсяги споживання можуть бути невизначеними через специфіку деяких неконтрольованих факторів.

В роботі [1] Bellman та Zadeh запропонували концепцію прийняття рішення в нечітких умовах, яку можна розглядати як один із способів розв'язання транспортної задачі з неточними параметрами. Стаття Lai та Hwang [2] присвячена ситуації, в якій всі параметри моделі ТЗ є нечіткими. У 1979 році Isermann [3] розробив алгоритм для вирішення ТЗ, який визначає її ефективні розв'язки. Ringuest та Rinks [4] запропонували дві ітераційні схеми для вирішення лінійних багатокритеріальних транспортних задач. S.Chanas та D.Kuchta [5] розробили підхід, заснований на інтервальному визначенні неточно заданих коефіцієнтів. Tien Fuling [6] застосував метод інтерактивного нечіткого багатоцільового лінійного програмування для вирішення задачі транспортного планування. Новий підхід, отримав назву нечіткої модифікованої обчислювальної процедури для пошуку оптимального розв'язку ТЗ.

Існують також дослідження, що присвячені зведенню нечітких транспортних задач до традиційних ТЗ [7-14]. R.N.Gasimov і K.Yenilmez [6] досліджували транспортні задачі з нечіткими величинами запитів та пропозицій, вирішуючи їх за допомогою параметричних моделей математичного програмування з урахуванням критерію Белмана та Заде. Цей метод полягає в отриманні розв'язків, які максимально задовольняють обмеженням і цільовій функції на множині варіантів можливих перевезень.

Нові арифметичні операції над трапецієподібними (трикутними) нечіткими числами [11] надали можливість використовувати нечіткі числа для формалізації нечітких ТЗ. Цей підхід спростив формалізацію та вирішення транспортних задач, величини ресурсів в яких визначаються нечіткими трикутними числами. Крім цього, залучення методик порівняння важливості критеріїв в задачах вибору дозволило узагальнити даний підхід на випадок різної важливості обмежень ТЗ. Таким чином, за умов нечіткого визначення ресурсів виробників та/або споживачів продукції можна розглядати ТЗ, розв'язки яких враховують різні рівні можливості відхилень ресурсів від номінальних значень і характеризуються відповідними значеннями важливості заданих обмежень. Одночасне опрацювання даних параметрів дозволило сформулювати новий підхід для вирішення загальної нечіткої транспортної задачі перевезень однотипової продукції від постачальників до споживачів з мінімальною вартістю.

Запропонований підхід може бути розповсюджений на багатокритеріальні нечіткі транспортні задачі з нечітко заданими обмеженнями на ресурси. Це дозволить здійснювати пошук ефективних (оптимальних або компромісних) за сукупністю критеріїв розв'язків нечітких транспортних задач на множинах допустимих варіантів перевезень, що визначаються із урахуванням параметрів неточності та важливості обмежень.

1. Стандартна задача лінійного програмування. Без обмеження загальності математична модель задачі лінійного програмування може бути записана у вигляді

$$max \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ , \quad i = \overline{1,m} \, , \quad x \ge 0; x \in R^n \, . \tag{2}$$

Ця задача при фіксованих відомих значеннях параметрів c_j, a_{ij}, b_i, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$, є стандартною задачею лінійного програмування, а коли вони є випадковими величинами з відомими функціями розподілу, її можна вирішити методами стохастичного програмування. Однак на практиці ці параметри часто невідомі і для параметрів можна лише вказати інтервал можливих значень. Задачу такого типу можна назвати ЗЛП з заданою множиною значень коефіцієнтів. У рамках цієї задачі вже недоречно говорити про максимізацію цільової функції (1), оскільки значення цієї функції - не числа, а множини чисел. У цьому випадку необхідно з'ясувати, яке відношення переваги в множині альтернатив породжує ця функція, а потім визначити, вибір яких розв'язків слід вважати більш раціональним у розумінні цього відношення переваги.

Наступним етапом на шляху деталізації та уточнення розглянутої моделі (1), (2) є опис параметрів задачі у вигляді нечітких множин. В модель вводиться додаткова інформація у формі функції приналежності цих нечітких множин. Ці функції можна розглядати як спосіб наближеного відображення експертом наявного у нього неформалізованого уявлення про реальну величину даного параметра. Значення функцій належності - це вагові коефіцієнти, які експерти приписують різним можливим значенням кожного конкретного параметра.

Означення 1. [15] Нечіткою множиною $\tilde{A}$ універсальної множини X, називається сукупність пар $\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\}$, де $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$ – відображення множини X в одиничний відрізок [0,1], яке називається функцією належності нечіткої множини.

Після такого уточнення можна перейти до визначення задачі нечіткого математичного програмування [10]. Розглядається лінійна модель

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \ , \tag{3}$$

в якій значення коефіцієнтів $\tilde{c}_j$ задано нечітко у формі нечітких підмножин заданих універсальних множин. Крім цього, задано обмеження

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i \ , \quad i = \overline{1,m} \, , \qquad x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \ , \tag{4}$$

де значення коефіцієнтів $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ також подано у формі відповідних нечітких множин. Необхідно здійснити раціональний вибір рішення $x \in R^n$, яке в деякому розумінні максимізує задану нечітко лінійну форму (3).

2. Постановка транспортної задачі. Нехай $A_1, \ldots, A_m$ – виробники однорідного продукту, причому обсяг виробництва в пункті A_i складає a_i одиниць, $i=\overline{1,m}$. Припустимо, що продукт споживають в пунктах $B_1, \ldots, B_n$, а обсяг споживання в пункті B_j складає b_j одиниць $j=\overline{1,n}$. Транспортні витрати з доставки одиниці продукції з пункту A_i в пункт B_j дорівнюють c_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, при якому запити усіх споживачів B_j, $j=\overline{1,n}$, повністю задоволено, весь продукт з пунктів виробництва A_i, $i=\overline{1,m}$, вивезено і сумарні транспортні витрати мінімальні.

Необхідно визначити множину змінних $x_{ij} \ge 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, що задовольняють умовам

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=\overline{1,m}\ , \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ j=\overline{1,n}\ , \tag{6}$$

і таких, що цільова функція

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{7}$$

досягає мінімального значення.

Таким чином, транспортна задача представляє собою ЗЛП з mn числом змінних і з $(m+n)$ числом обмежень у вигляді рівностей.

Рівняння

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{8}$$

яке називають умовою балансу, є необхідною та достатньою умовою розв'язку ТЗ.

Відповідна нечітка транспортна задача (НТЗ) може бути записана у вигляді:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}x_{ij}\ , \tag{9}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{a}_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{b}_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j. \tag{12}$$

2. Транспортна задача з нечіткими обмеженнями на ресурси. Розглянемо транспортну задачу нечіткого виробництва та розподілу товарних ресурсів, що задаються нечіткими трикутними числами [12] $\tilde{a}_i, i=\overline{1,m},\ \tilde{b}_j, j=\overline{1,n}$.

При розв'язанні прикладних задач для формалізації нечіткості використовують інші означення нечіткої множини, що еквівалентні класичному означенню 1.

Означення 2. [12] Нечітким трикутним числом $\tilde{A}$ називається впорядкована трійка чисел *(a, b, c)*, що визначають функцію належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$:

1. $\mu_{\tilde{A}}(x)=\dfrac{x-a}{b-a}, x\in[a,b]$;
2. $\mu_{\tilde{A}}(x)=\dfrac{c-x}{c-b}, x\in[b,c]$;
3. $\mu_{\tilde{A}}(x)=0, x\notin[a,c]$.

Нечітке трикутне число *(a, b, c)* іноді називається триплетом. Крім цього, нечітке трикутне число виду *(a, b, b)*, яке називається лівим нечітким трикутним числом, визначається функцією належності

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=0, x<a\ ;\quad \mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{x-a}{b-a}, x\in[a,b]\ ;\quad \mu_{\tilde{A}}(x)=1, x>b\ ,$$

а нечітке трикутне число виду *(b, b, c)*, яке називається правим нечітким трикутним числом, – функцією належності

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=1, x<b\ ;\ \mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{c-x}{c-b}, x\in[b,c]\ ;\ \mu_{\tilde{A}}(x)=0, x>c\ .$$

У цьому випадку транспортна задача з нечіткими товарними ресурсами, які задаються нечіткими трикутними числами, може розглядатися як задача лінійного програмування, що записується у вигляді

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ , \tag{13}$$

з обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{a}_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{b}_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j. \tag{16}$$

Розв'язок НТЗ (13)–(16) знайдемо за допомогою підходу, запропонованого в [12]. Нехай L_1 та U_1 – найменше та найбільше значення цільової функції *Z*. З урахуванням отриманих рівнів отримаємо нечітку задачу визначення величин $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, що задовольняють обмеженням

$$Z \geq \tilde{s}, \ \tilde{s} = (L_1, U_1, U_1), \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \tilde{a}_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \tilde{b}_j, \quad j = \overline{1,n}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j . \tag{18}$$

Функції належності нечітких обмежень (17), (18) визначаються у вигляді:
для першого обмеження (17)

$$\mu^1\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, \quad \text{for } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} < L_1, \\ \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - L_1\right) \Big/ (U_1 - L_1), \quad \text{for } L_1 \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} < U_1, \\ 1, \quad \text{for } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geq U_1, \end{cases}$$

для *i*-того обмеження, $i = \overline{1,m}$,

$$\mu_i^2\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, \quad \text{for } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i - a_i^l, \\ \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i + a_i^l\right) \Big/ a_i^l, \quad \text{for } a_i - a_i^l \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i, \\ \left(a_i + a_i^l - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) \Big/ a_i^r, \quad \text{for } a_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i + a_i^r, \\ 1, \quad \text{for } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i + a_i^r, \end{cases}$$

для *j*-того обмеження, $j = \overline{1,n}$,

$$\mu_j^3\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, \quad \text{for } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j - b_j^l, \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j + b_j^l\right) \Big/ b_j^l, \quad \text{for } b_j - b_j^l \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_i, \\ \left(b_j + b_j^r - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \Big/ b_j^r, \quad \text{for } b_i \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j + b_j^r, \\ 1, \quad \text{for } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j + b_j^r. \end{cases}$$

Використовуючи *max-min*-оператор Zimmermann'а [7], задачу (17), (18) можна записати у формі

$$\max \ \lambda \tag{19}$$

з обмеженнями

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \lambda(U_1 - L_1) \geq L_1, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \lambda a_i^l \geq a_i - a_i^l, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \lambda a_i^r \leq a_i + a_i^r, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \lambda b_i^l \geq b_j - b_j^l, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \lambda b_i^r \geq b_j + b_j^r, \\ 0 \leq \lambda \leq 1, \ x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{20}$$

де величини допустимих відхилень $0 \leq a_i^l \leq a_i$, $a_i^r \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $0 \leq b_j^l \leq b_j$, $b_j^r \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, визначають граничні зміни ресурсів моделі (17), (18).

3. Застосування методів прийняття рішень для розв'язання транспортної задачі з нечіткими обмеженнями на ресурси. При вирішенні задачі нечіткого вибору елементів з заданої множини враховуються величини функції належності окремих елементів, які можуть бути знайдені за допомогою методу парних порівнянь.

Для цього розглянемо множину елементів $X = \{x_i \geq 0, \ i = \overline{1,k}\}$. Ступінь належності елементів нечіткій множині можна отримати, порівнюючи елементи між собою. Оцінку елемента x_i порівняно з елементом x_j позначимо q_{ij}.

Для узгодженості покладемо $q_{ji} = 1/q_{ij}$. Оцінки q_{ij} складають матрицю $Q = \|q_{ij}\|$, $i, j = \overline{1,k}$.

Знайдемо власний вектор $w = (w_1,...,w_k)$, що відповідає максимальному власному числу матриці Q. Отримані величини $w_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$ приймаються у якості рівнів належності елементів $X = \{x_i, \ i = \overline{1,k}\}$ відповідній нечіткій множині.

Коефіцієнти відносної важливості елементів q_{ij} визначаються на основі шкали оцінок (табл.1, [16]):

Таблиця 1

Відносна важливість елементів	*Елементи матриці A*
Рівна важливість елементів	1
Ненабагато важливіше	3
Важливіше	5
Суттєво важливіше	7
Набагато важливіше	9
Проміжні значення	2,4,6,8

Визначаючи за даною методикою важливість ресурсних обмежень транспортної задачі отримуємо вигляд задачі ЛП з урахуванням важливості обмежень за обсягами виробництва та споживання (w_1, w_2):

знайти значення $\lambda_0 \in [0,1]$, яке є розв'язком задачі лінійного програмування

$$\lambda_0 \quad \to \max \tag{21}$$

з обмеженнями

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \lambda_0(U_1 - L_1) \ge L_1 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \lambda_1 a_i^l \ge a_i - a_i^l, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \lambda_1 a_i^r \le a_i - a_i^r, \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \lambda_2 b_j^l \ge b_j - b_j^l , \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \lambda_2 b_j^r \le b_j + b_j^r ,$$

$$w_1 \le \lambda_1 , \; w_2 \le \lambda_2 , \quad x_{ij} \ge 0 , \; i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n} , \; \lambda_p \ge \lambda_0 , \; 0 \le \lambda_p \le 1 , \; p = \overline{1,2} .$$

4. Приклад розв'язання транспортної задачі з нечіткими обмеженнями на ресурси. В якості прикладу розглянемо транспортну задачу [14] з трьома виробниками та трьома споживачами з цільовою функцією вартості перевезень

$$32x_{11} + 40\,x_{21} + 120\,x_{31} + 60\,x_{12} + 68\,x_{22} + 104\,x_{32} + 200\,x_{13} + 80\,x_{23} + 60\,x_{33} \to \min \tag{23}$$

та обмеженнями

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = \tilde{30}, \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = \tilde{35}, \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = \tilde{30}, \tag{24}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = \tilde{20}, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = \tilde{30}, \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} = \tilde{45}, \; x_{ij} \ge 0 , \; i = \overline{1,3}, \; j = \overline{1,3} .$$

У даній моделі праві частини обмежень задано нечіткими числами $\tilde{30} = (28, 30, 32)$, $\tilde{35} = (34, 35, 37)$, $\tilde{30} = (29, 30, 31)$, $\tilde{20} = (18, 20, 23)$, $\tilde{30} = (28, 30, 33)$, $\tilde{45} = (44, 45, 46)$.

Перепишемо задачу у формі ЗЛП (19), (20). Отримуємо $\max \lambda$ при обмеженнях

$$32x_{11} + 40\,x_{21} + 120\,x_{31} + 60\,x_{12} + 68\,x_{22} + 104\,x_{32} + 200\,x_{13} + 80\,x_{23} + 60\,x_{33} - \lambda(5760 - 5560) \ge 5560,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 28 + 2\lambda, \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \ge 18 + 2\lambda,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 32 - 2\lambda, \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 23 - 3\lambda,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 34 + 2\lambda, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \ge 28 + 2\lambda,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 38 - 3\lambda, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 33 - 3\lambda,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 29 + \lambda, \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} \ge 44 + \lambda,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 31 - \lambda, \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 46 - \lambda,$$
$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3} , \; 0 \le \lambda \le 1.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі:

$x_{11} = 0, x_{21} = 26, \; x_{31} = 0, \; x_{12} = 15.8, x_{22} = 0, \; x_{32} = 17.17, \; x_{13} = 2.17, x_{23} = 0, \; x_{33} = 25.8, \; \lambda = 1, \; Z = 5842.8.$

Використовуючи підхід з урахуванням важливості обмежень, припустимо, що матриця Q задана у вигляді

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Максимальне власне число матриці $\lambda(Q)$ =2, а власний вектор, що відповідає цьому власному числу, $w = (5/6, 1/6)$.

Відповідно до підходу, який враховує важливість ресурсних обмежень транспортної задачі, отримуємо ЗЛП наступного вигляду:

$$\max \; \lambda_0$$

з обмеженнями $32x_{11} + 40\,x_{21} + 120\,x_{31} + 60\,x_{12} + 68\,x_{22} + 104\,x_{32} + 200\,x_{13} + 80\,x_{23} + 60\,x_{33} - \lambda_0(5760 - 5560) \ge 5560,$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 28 + 2\lambda_1, \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 32 - 2\lambda_1,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 34 + 2\lambda_1, \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 38 - 3\lambda_1,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 29 + \lambda_1, \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 31 - \lambda_1,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \ge 18 + 2\lambda_2, \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 23 - 3\lambda_2,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \ge 28 + 2\lambda_2, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 33 - 3\lambda_2,$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\ge 44+\lambda_2,\ \ x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 46-\lambda_2,$$
$$5/6\le\lambda_1,\ 1/6\le\lambda_2,\ \lambda_1\ge\lambda_0,\ \lambda_2\ge\lambda_0,$$
$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,3},\ \ j=\overline{1,3},\ 0\le\lambda_p\le 1,\ \ p=0,1,2\,.$$

Оптимальний розв'язок у цьому випадку:

$$x_{11}=0.23,\ x_{21}=29.42,\ x_{31}=0,\ x_{12}=19.78,\ x_{22}=0,\ x_{32}=14.8,\ x_{13}=0,\ x_{23}=0,\ x_{33}=29.83,$$
$$\lambda_0=0.712,\ \lambda_1=0.83,\ \lambda_2=0.712,\ Z=5699.96$$

Як випливає з отриманих результатів, при використанні методики порівняння важливості обмежень транспортної задачі вдалося не лише знизити вартість перевезень, а й визначити допустимі границі ресурсних змін, за рахунок яких досягається це зменшення. Зрозуміло, що остаточний вибір величин обсягів виробництва та споживання визначатиметься особою, що приймає рішення.

Висновки. В роботі розглянуто метод пошуку оптимального розв'язку нечіткої транспортної задачі, ресурси в якій представлено нечіткими трикутними числами. Проілюстровано використання методу на прикладі реальної транспортної задачі. Розглянуто узагальнення методики вирішення нечіткої транспортної задачі з урахуванням важливості обмежень. Наведено приклад застосування розробленого підходу для вирішення нечітких транспортних задач загального вигляду. Запропонований підхід може бути розповсюджений на багатокритеріальні нечіткі транспортні задачі з нечітко заданими обмеженнями на ресурси. Це дозволить здійснювати пошук ефективних за сукупністю критеріїв розв'язків нечітких транспортних задач на множинах допустимих рішень, що визначаються із урахуванням параметрів неточності та важливості обмежень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision making in a fuzzy environment //Management Science, 17, 1970. – P.141–164.
2. Lai Y.J., Hawng C.L. Fuzzy Mathematical Programming. Lecture notes in Economics and Mathematical systems // Springer-Verlag, 1992.
3. Isermann H. The numeration of all efficient solutions for a linear multiobjective transportation problems// Naval Research Logistic Quarterly, 26, 1979. – P. 123–139.
4. Ringuest L.,Rinks D.B. Interactive solutions for the linear multiobjective transportation problem // European Journal of Operational Research, 32, 1987. – P. 96–106.
5. Chanas S., Kuchta D. Fuzzy programming in multi-objective linear programming-parametric approach // Fuzzy Set and System, 29, 1989. – P.303–313.
6. Tien Fuling. Applying interactive fuzzy multi-objective Linear programming to transportation planning decisions // Journal of information and optimization sciences. – V.27. – №1. – 2006. – P.107–126.
7. Zimmermann H.J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions // Fuzzy Sets and System, 1, 1978. – P.45–55.
8. Gasimov R.N., Yenilmez K. Soving fuzzy linear programming with linear membership functions // Turk. J.Math., 26, 2002. – P.375–396.
9. Sakawa M., Yano H. Interactive decision making for multi-objective linear fractional programming problems with fuzzy parameters // Cybernetics Systems, 16, 1985. – P.377–394.
10. Dubois D. Linear programming with fuzzy data / D. Dubois // Analysis of Fuzzy Information / J. C. Bezdek (ed.). Boca Raton : CRC Press, 1987. – Vol. 3: Applications in Engineering and Science. – P. 241–263.
11. Tanaka H., Asai K. Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems, 13, 1984. – P.1–10.
12. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model // Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – Vol.21. – №2. – 2005. – P.243–268.
13. Ivokhin E.V., Almodars Barraq Subhi Kaml. Single-Objective Linear Programming Problems With Fuzzy Coefficients and Resources // Computational and Applied Math. – №2. – 2013.
14. Reeb J., Leavengood S. Transportation Problem: A Special Case for Linear Programming Problems // Performance Eexcellence in the Wood Products Industry EM 8779, June 2002.
15. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inf. Contr., 1965. – V.8. – P.338–53.
16. Борисов А.Н. Принятия решений на основе нечетких моделей / А.Н. Борисов. - Рига: Зинатне, 1990. – 184 с.

Надійшла до редколегії 18.01.14

Ивохин Е. В., д-р физ.-мат. наук, доцент,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

О ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКИМИ РЕСУРСАМИ

Рассмотрен метод поиска оптимального решения нечеткой транспортной задачи, ресурсы в которой представлены нечеткими треугольными числами. Проиллюстрировано использование метода на примере реальной транспортной задачи. Рассмотрено обобщение методики решения нечеткой транспортной задачи с учетом важности ограничений. Предложено использование розработанного подхода для решения нечетких транспортных задач общего вида.

Ключевые слова: транспортная задача линейного программирования, множество решений, методы принятия решений, нечеткие числа.

Ivokhin E. V., Dr.Sci., Associate Professor,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

ON THE APPROACH TO SOLVING TRANSPORTATION PROBLEM WITH FUZZY RESOURCES

The paper presents a method of finding the optimal solution of fuzzy transportation problem, in which resources are represented by triangular fuzzy numbers. The using of the method is illustrated on the real transportation problem. A generalization of the method of solving the fuzzy transportation problem with regard to the importance of restrictions is considered. The fuzzy approach is proposed for solving the transportation problems of general form.

Key words: transportation task of linear programming problem, solution set, decision support methods, fuzzy numbers.