

**ПРО МЕТОДИ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ МНОЖИН
СКЛАДЕНИХ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ**

В статті розглянуто та розв'язано задачі групування елементів нечіткої множини, яка задається сукупністю складених нечітких чисел трикутного вигляду. Запропоновано та проаналізовано декілька методів кластеризації. Проведено тестування роботи алгоритмів на конкретному прикладі.

Ключові слова: кластеризація, невизначеність, нечітке трикутне число, методи групування даних.

Традиційна задача групування даних у відносно однорідні групи, що виникає в самих різних сферах науки, економіки, соціуму та ін., включає в себе проблему виділення кластерів та задачу знаходження еталонних вузлів. В реалізації методів кластеризації важливу роль грають показники належності даних до групи, способи обчислення відстаней між елементами, вагові коефіцієнти, що залежать від конкретної предметної області та спостережень в рамках цієї області. Методи мають різну обчислювальну складність та різний ступінь ефективності при вирішенні конкретних прикладних задач.

Для проведення процесу кластеризації існує багато підходів, більшість з яких є евристичними методами, що базуються на певних алгоритмах дій дослідника і не вимагають складних статистичних розрахунків. Однак, їх використання у випадку обробки інформації нечіткого характеру суттєво ускладнюється або взагалі стає неможливим через специфічне представлення нечіткості.

Розробка конструктивного алгоритму для кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю нечітких чисел, включає в себе формалізацію способів пошуку кластерного центру множини даних та реалізацію процедури групування нечітких чисел в межах заданої кількості кластерів.

У літературі, присвяченій проблемам кластеризації [1–3], найчастіше розглядаються три алгоритми: C-means, пікового групування та різницевого групування. Ці методи представляють собою кардинально різні підходи до вирішення проблеми кластеризації. Як правило, перший з них потребує від дослідника точного знання кількості кластерів, на базі чого будується алгоритм. Другий метод вимагає багато часу для виконання, бо має багато нетривіальних умов для перевірки щодо належності елемента до кластеру та побудови самого кластеру. Третій – найбільш оптимальний, але для його застосування необхідне детальне знання специфічних залежностей в системі для встановлення значень важливих параметрів, без яких метод не дає бажаного результату.

Задачу кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю нечітких множин, за допомогою алгоритму нечіткого групування C-means було розглянуто в роботі [4]. Проведемо дослідження вищезгаданих методів кластеризації для випадку нечітких множин спеціального вигляду.

Означення 1. [5] Нечіткою множиною \tilde{A} універсальної множини X , називається сукупність пар $\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\}$, де $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ – відображення множини X в одиничний відрізок $[0, 1]$ і називається функцією належності нечіткої множини A .

За умов подання інформації у вигляді нечітких множин в якості універсальної множини X традиційно розглядається довільна підмножина скінченновимірного простору $R^N : X \subseteq R^N, x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$. У випадку $X \subseteq R^1$ нечітка множина \tilde{A} містить сукупність пар, що складаються з двох скалярних значень $x \in R^1$ та $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Нехай задано сукупність нечітких множин $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$, що визначені у відповідних універсальних множинах X_1, \dots, X_m , де $X_i \subseteq R^1, i = \overline{1, m}$. Тоді можна говорити, що задано множину нечітких чисел. Будемо вважати, що кожне з них має трикутний вигляд, тобто $\tilde{A}_i = \{(a_i, b_i, c_i)\}$, $a_i \leq b_i \leq c_i, i = \overline{1, m}$, з лінійними функціями належності $\mu_{\tilde{A}_i}(x), i = \overline{1, m}$, вигляду:

$$\mu_{\tilde{A}_i}(x) = \frac{x - a_i}{b_i - a_i}, x \in [a_i, b_i]; \quad \mu_{\tilde{A}_i}(x) = \frac{c_i - x}{c_i - b_i}, x \in [b_i, c_i]; \quad \mu_{\tilde{A}_i}(x) = 0, x \notin [a_i, c_i], i = \overline{1, m}.$$

Розглянемо універсальну множину X у вигляді декартового добутку $X = \prod_{i=1}^m X_i$. Сформуємо множину

$$\tilde{A}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), \dots, (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m))\}, \tag{1}$$

де $x^i \in X_i, i = \overline{1, m}$.

Означення 2. Множину \tilde{A}^m назвемо складеним нечітким числом в універсальній множині $\prod_{i=1}^m X_i$.

Скінченний набір складених нечітких чисел \tilde{A}^m у множині $X = \prod_{i=1}^m X_i$ позначимо $K(\tilde{A}^m), |K(\tilde{A}^m)| = k$.

Означення 3. Множину

$$L_0^m = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, \dots, x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) > 0, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) > 0, \dots, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) > 0\}, \tag{2}$$

$$L_0^m \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m,$$

будемо називати носієм складеного нечіткого числа \tilde{A}^m .

Означення 4. Множину

$$L^m(\alpha) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, \dots, x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \alpha, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \alpha, \dots, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) \geq \alpha\} \quad (3)$$

назвемо множиною рівня $\alpha \in (0, 1]$ складеного нечіткого числа \tilde{A}^m .

Розглянемо два довільних складених нечітких числа

$$\begin{aligned} \tilde{U}^m &= \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}^U(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}^U(x^2)), \dots, (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}^U(x^m))\}, \\ \tilde{V}^m &= \{(y^1, \mu_{\tilde{A}_1}^V(y^1)), (y^2, \mu_{\tilde{A}_2}^V(y^2)), \dots, (y^m, \mu_{\tilde{A}_m}^V(y^m))\}. \end{aligned}$$

Обчислимо величину $\gamma = \min_{i=1, m} \min \{\mu_{\tilde{A}_i}^U(x^i), \mu_{\tilde{A}_i}^V(y^i)\}$, яка є мінімальним значенням серед значень мір належності окремих елементів обох множин \tilde{U}^m, \tilde{V}^m . Це значення дозволяє побудувати дві множини рівня γ у вигляді звичайних множин $L_{\tilde{U}}^m(\gamma), L_{\tilde{V}}^m(\gamma)$, що визначають точки універсальної множини $X = \prod_{i=1}^m X_i$, між якими може бути обчислена евклідова відстань $d = \|L_{\tilde{U}}^m(\gamma) - L_{\tilde{V}}^m(\gamma)\|$.

На основі введеного поняття відстані між складеними нечіткими числами та способу їх порівняння можна сформулювати алгоритми нечіткого групування даних, поданих у вигляді сукупності складених нечітких чисел $\{\tilde{A}^{m(j)}, j = \overline{1, p}\}$ з $K(\tilde{A}^m)$. Будемо вважати, що цю сукупність можна згрупувати в k кластерів.

На початку процесу задається величина $\gamma \in (0, 1]$, яка буде визначати рівень нечіткості даних, що розглядаються. Припустимо, що складені нечіткі числа $\tilde{A}^{m(j)}, j = \overline{1, q}, q \leq p$, мають непорожні множини рівня $L^m(\gamma)$. Будемо розглядати їх як звичайні вектори $S(\tilde{A}^{m(j)}) = \{x^{1(j)}, x^{2(j)}, \dots, x^{m(j)}\}, j = \overline{1, q}$.

Алгоритм пікового групування. У алгоритмі пікового групування, який був запропонований Р. Єгером та Д. Фільовим [6], розглянуто міру щільності розміщення векторів $S(\tilde{A}^{m(j)}), j = \overline{1, q}$, для чого генеруються так звані пікові функції. При застосуванні p вхідних векторів створюється сітка, що рівномірно накриває простір векторів $S(\tilde{A}^{m(j)}), j = \overline{1, q}$. Вузли цієї сітки розглядаються як потенційні нечіткі центри

$$\tilde{C}^{m(i)} = \{(x^{1(i)}, \mu_{\tilde{A}_1}(x^{1(i)})), (x^{2(i)}, \mu_{\tilde{A}_2}(x^{2(i)})), \dots, (x^{m(i)}, \mu_{\tilde{A}_m}(x^{m(i)}))\}, i = \overline{1, k},$$

і для кожного з них розраховується пікова функція $M(S(\tilde{C}^{m(i)})), i = \overline{1, k}$,

$$M(S(\tilde{C}^{m(i)})) = \sum_{j=1}^p \exp\left(-\|S(\tilde{C}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)})\|^{2b} / 2\sigma^2\right), \quad (4)$$

де $\|S(\tilde{C}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)})\|, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, p}$ - це евклідові відстані між парами векторів, що визначають центри $\tilde{C}^{m(i)}, i = \overline{1, k}$ та складені нечіткі числа $\tilde{A}^{m(j)}, j = \overline{1, p}$, відповідно, коефіцієнт σ - це константа, що індивідуально підбирається для кожної конкретної задачі, а b - показник ступеню узагальненої функції Гауса.

Величина функції $M(S(\tilde{C}^{m(i)})), i = \overline{1, k}$, розглядається як оцінка висоти пікової функції. Вона пропорційна кількості векторів $S(\tilde{A}^{m(j)}), j = \overline{1, q}$, що знаходяться в околі потенційного центра $S(\tilde{C}^{m(i)}), i = \overline{1, k}$. Мале значення $M(S(\tilde{C}^{m(i)})), i = \overline{1, k}$, свідчить про те, що центр $S(\tilde{C}^{m(i)}), i = \overline{1, k}$, розташований в області, в якій зосереджено невелику кількість векторів $S(\tilde{A}^{m(j)}), j = \overline{1, q}$. Слід звернути увагу на те, що коефіцієнт σ має незначний вплив на кінцеві пропорції між $M(S(\tilde{C}^{m(i)})), i = \overline{1, k}$, для різних значень $S(\tilde{C}^{m(i)}), i = \overline{1, k}$, тому підбір його величини не є критичним.

Після обрахунку значень $M(S(\tilde{C}^{m(i)})), i = \overline{1, k}$, для усіх потенціальних центрів відбираються перші k_1 точки, що мають найбільше значення $M(S(\tilde{C}_1^{m(i)})), i = \overline{1, k_1}$. Для вибору наступних центрів необхідно, перш за все, виключити k_1 центрів та вузли, що розташовані в безпосередній близькості від них. Це можна зробити шляхом перевизначення пікової функції за рахунок відсікання від неї значень функції Гауса з центрами в точках $S(\tilde{C}_1^{m(l)}), l = \overline{1, k_1}$. Якщо цю знов визначену функцію позначити як $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(l)})), i = \overline{1, k}$, то

$$M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)})) = M(S(\tilde{C}^{m(i)})) - M(S(\tilde{C}_1^{m(l)})) \exp\left(-\|S(\tilde{C}_1^{m(l)}), S(\tilde{C}^{m(i)})\|^{2b} / 2\sigma^2\right). \quad (5)$$

Необхідно звернути увагу на те, що функція $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)})), i = \overline{1, k}$, набуває нульового значення в точках $S(\tilde{C}_1^{m(l)}), l = \overline{1, k_1}$. Звідси зрозуміло, що послідовне відсікання центрів (з максимальним значенням пікової функції) дозволяє виявляти та усувати наступні центри.

Процес знаходження наступних центрів $S(\tilde{C}_2^{m(l)}), l = \overline{k_1 + 1, k_2}, S(\tilde{C}_3^{m(l)}), l = \overline{k_2 + 1, k_3}, \dots$, здійснюється послідовно на модифікованих значеннях функції $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)})), i = \overline{1, k}$, що отримуються при видаленні близького оточення центру, виявленого на попередньому етапі. Він завершується в момент локалізації усіх центрів, що використовуються в моделі. Метод пікового групування ефективний, якщо розмірність вектора $S(\tilde{A}^{m(j)}), j = \overline{1, q}$ невелика. В іншому випадку (за великої кількості компонент $S(\tilde{A}^{m(j)}), j = \overline{1, q}$), кількість потенційних центрів зростає досить швидко, і процес розрахунку чергових пікових функцій стає довготривалим, а процедура малоефективною.

Алгоритм різницевого групування даних [6] – це модифікація алгоритму пікового групування, в якій усі навчальні вектори $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j = \overline{1, q}$, розглядаються в якості k потенційних центрів, $k = q$. Пікова функція $D(S(\tilde{A}^{m(i)}))$, $i = \overline{1, k}$, у цьому алгоритмі задається у вигляді

$$D(S(\tilde{A}^{m(i)})) = \sum_{j=1}^p \exp \left(-\|S(\tilde{A}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)})\|^{2b} / \left(r_a/2 \right)^2 \right), \quad i = \overline{1, k}. \quad (6)$$

Значення коефіцієнта r_a визначає сферу сусідства. На значення $D(S(\tilde{A}^{m(i)}))$, $i = \overline{1, k}$, істотно впливають лише ті вектори $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j = \overline{1, q}$, що розташовані в межах цієї сфери. При великій щільності точок в околі $S(\tilde{A}^{m(i)})$, $i = \overline{1, k}$, (потенційного центра) значення функції $D(S(\tilde{A}^{m(i)}))$, $i = \overline{1, k}$, велике. Навпаки, її мале значення свідчить про те, що в околі $S(\tilde{A}^{m(i)})$, $i = \overline{1, k}$, незначна кількість даних. Така точка вважається "невдалими" кандидатом в центри. Після розрахунку значень пікової функції для кожної точки $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j = \overline{1, q}$, відбирається вектор $S(\tilde{A}^m)$, для якого міра щільності $D(S(\tilde{A}^m))$ виявилась найбільшою. Саме ця точка стає першим відібраним центром $S(\tilde{C}_1^m)$. Вибір наступного центра можливий після виключення попереднього центру і всіх точок, що лежать в його околі. Так само, як і в методі пікового групування, пікова функція перевизначається у вигляді

$$D_{new}(S(\tilde{A}^{m(i)})) = D(S(\tilde{A}^{m(i)})) - D(S(\tilde{C}_1^m)) \exp \left(-\|S(\tilde{A}^{m(i)}), S(\tilde{C}_1^m)\|^{2b} / \left(r_a/2 \right)^2 \right), \quad i = \overline{1, k}. \quad (7)$$

При новому визначенні функції $D(S(\tilde{A}^m))$ коефіцієнт r'_a задає нове значення константи, яка окреслює сферу сусідства чергового центра. Зазвичай дотримується умова $r'_a \geq r_a$. Пікова функція $D_{new}(S(\tilde{A}^{m(i)}))$, $i = \overline{1, k}$, приймає нульове значення при $S(\tilde{A}^{m(i)}) = S(\tilde{C}_1^m)$, $i = \overline{1, k}$, і близька до нуля в найближчому околі цієї точки.

Після модифікацій значень пікової функції знаходиться наступна точка $S(\tilde{A}^m)$, для якої величина $D_{new}(S(\tilde{A}^m))$ максимальна. Ця точка стає наступним центром $S(\tilde{C}_2^m)$. Процес пошуку чергового центра поновлюється після видалення компонентів, відповідних вже отриманим точкам.

Кожен з методів має свої власні особливості та уточнення в залежності від умов застосування та його структурно-концептуальної реалізації. Головним чинником, звичайно, виступає показник конструктивності метода, що на практиці суттєво залежить від умов конкретної задачі. Результати практичного застосування методів кластеризації на заданій сітці двомірних складених нечітких чисел дозволив зробити ряд висновків.

Якщо у методі C-means необхідно обирати початкові коефіцієнти [4], що показують ступінь належності кластеру, виключно випадково, то в алгоритмі пікового групування головну роль грає покриття площини рівномірною сіткою з розмірами комірок, залежними від максимального та мінімального значень двомірних даних по-координатно. Вузли цієї сітки будуть виступати як претенденти в центри майбутніх кластерів і виявляється, що обрати розміри комірок цієї сітки також є задачею, залежною від конкретної ситуації. Дану задачу можна вирішувати за правилом Рунге, яке полягає в знаходженні такого розбиття області, при якому величина $\Delta_{2n} \approx \Theta |I_{2n} - I_n|$, (тут I_n – результат розрахунку, отриманого при використанні n вузлів по кожній координаті сітки), досягає своєї наперед заданої точності. В обчислювальних експериментах для знаходження результатів вважалось $\Theta = 1/3$. Точність правила Рунге задається користувачем в залежності від умов прикладної області.

Параметри b та σ , що використовуються у методі, також підбираються індивідуально для кожної задачі. При обчисленні експоненціального виразу для оцінки згущення точок навколо кандидата, виникає проблема нульового значення виразу для деяких претендентів (через обмеженість розміру чисел в машинній інтерпретації), тому перед тим, як підставляти отримані в перетвореннях значення в показник експоненти, їх бажано поділити на константу (в обчислювальних прикладах, що розглядалися було використано значення 1000). Крім цього, при реалізації виникає проблема врахування близькості вузла сітки – кандидата в центри кластера, що робить значення суми експоненціальних виразів дуже великим, навіть без урахування значення цієї функції для інших точок. Тому вважається за потрібне ввести обмеження на ступінь близькості можливого кандидата у центри кластера до інших точок. Як варіант, пропонується визначати мінімально допустиму відстань за правилом Рунге.

Алгоритм різницевого групування представляє собою спрощену, але більш ефективну модифікацію алгоритму пікового групування. Усі зауваження, зроблені для метода пікового групування, у цьому випадку несуттєві. Єдиним невіршеним питанням залишається значення коефіцієнта r_a , що визначає сферу сусідства. При практичному використанні це значення може також визначатися за правилом Рунге з заданою точністю. Головним же плюсом алгоритму є те, що кандидатами в центри кластерів виступають самі нечіткі вхідні дані.

Проведено тестування методів розв'язання задачі кластеризації на прикладі групування станів нечіткої системи, що функціонує у двовимірному просторі [7].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Jamba M. Hierarchical cluster analysis and compliance/ M. Jamba. – Moscow: Finance and Statistics, 1988. – 345 p.
2. Durand B. Cluster analysis/ B. Durand, P. Odell. – Moscow: Statistics, 1977. – 128 p.
3. Viattchenin D. A. Fuzzy methods of automatic classification/ D. A. Viattchenin. – Minsk: Tehnoprint, 2004. – 219 c.
4. Івохін Є. В. Один метод кластеризації складених нечітких множин / Є. В. Івохін, К. О. Косинський // Журнал обчислювальної та прикл. математики. – 2007. – № 2. – С. 54–58.
5. Zadeh L. A. Fuzzy sets / L. A. Zadeh. // Inf. Contr. – 1965. – V.8. – P. 308–353.
6. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации / С. Осовский. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 343 с.
7. Shumetov V. G. Cluster analysis: an approach to the use of computers / V. G. Shumetov, L. Shumetova. – Orel: OrelGTU, 2000. – 118 с.

Апанасенко Д. В., асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

О МЕТОДАХ КЛАСТЕРИЗАЦИИ МНОЖЕСТВ СОСТАВНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

В статье рассмотрены и решены задачи группирования элементов нечеткого множества, заданного совокупностью составных нечетких чисел треугольного вида. Предложены и проанализированы несколько методов кластеризации. Проведено тестирование работы алгоритмов на конкретном примере.

Ключевые слова: кластеризация, неопределенность, нечеткое треугольное число, методы группирования данных.

Apanasenko D. V., post-graduate,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

ABOUT CLUSTERIZATION METHODS FOR DATASETS OF COMPOSITE FUZZY NUMBERS

In this article there are discussed and solved the problems of fuzzy set elements grouping. Fuzzy sets are formalized by complex fuzzy sets. A few methods of clusterization are proposed and analyzed. The use of the algorithm is provided on the real example.

Key words: clusterization, uncertainty, fuzzy triangle number, methods of data grouping.

УДК 519.6

О. Ю. Грищенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Г. О. Загородня, магістр,
В. В. Оноцький, канд. фіз.-мат. наук, асист.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ДВОКРОКОВИЙ СИМЕТРИЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ В ДЕФОРМУЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто математичну модель, що описує процес розповсюдження високоенергетичних пучків випромінювання, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних з комплексними коефіцієнтами. Для чисельного моделювання запропоновано модифікацію двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму). Досліджено основні властивості даного алгоритму.

Ключові слова: різницевої схеми, двокроковий симетризований різницевий алгоритм, ДС-алгоритм, чисельне моделювання, процес розповсюдження оптичного випромінювання.

Вступ. Загальні моделі адаптивної оптики запропоновано в 80-ті роки минулого сторіччя [1, 2]. Адаптивна (квазі-лінійна) оптика це наука, що в даний час знаходиться на грані між інженерними розробками та науковими дослідженнями. Вона вивчає процеси розповсюдження високоенергетичного оптичного випромінювання в середовищі, яке змінює свої властивості під дією енергетичного поля самого пучка випромінювання і тим самим деформує початковий напрям розповсюдження пучка.

Такі явища виникають при роботі лазерних приладів, як високоточних, що використовуються у медицині (лазерна хірургія, офтальмологія), так і потужних промислових облаштуваннях лазерної різки та зварювання об'єктів, тощо. Тепловий потік цих приладів приводить до нагрівання навколишнього середовища, оптичних елементів, а це часто призводить до відхилення променя та зменшення якості роботи. Нелінійність розповсюдження високоенергетичних пучків випромінювання також частково пояснюється нерівномірним збуренням середовища, в якому розповсюджується пучок. Ці збурення є наслідком впливу енергетичного поля випромінювання на щільність середовища, а отже і на коефіцієнт проникнення світла. Нерівномірний нагрів призводить до утворення місцевої деформуючої сили, що впливає на зміну напрямку розповсюдження пучка. Введення адаптивної корекції в цих умовах дозволяє компенсувати негативні ефекти.

Адаптивної корекції потребують як скануючі мікроскопи, так і потужні астрономічні телескопи, а також прилади, які досліджують атмосферу та проводять спостереження за наземними об'єктами з космосу. При роботі приладів у атмосферному середовищі значний вплив на якість роботи мають погодні умови, "прозорість" атмосфери та інші фактори.

Основним завданням чисельного моделювання таких процесів є дослідження енергетичних полів, можливість "викривлень" таких оптичних випромінювань та можливість їх компенсації.

В даній роботі розглядається функціонування системи, робота якої вивчається в умовах "теплого самозбурення". При цьому враховується, що методи, побудовані на основі чисто фазового керування пучком не дають повної інформації [1]. Тому в моделі враховуються як амплітудні так і фазові ефекти. Це приводить до дослідження комплексно-значних енергетичних полів.

1. Постановка задачі. Базова система рівнянь для моделювання пучка "типу гаусівського випромінювання", який розповсюджується в умовах теплового саморозігріву середовища має вигляд [2]

$$2ik \left[\frac{\partial E}{\partial z} + a \frac{\partial E}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + bE + v_0 E + v_1 E,$$

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (V \nabla) T \right] - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \alpha |E|.$$

тут E – комплексно-значна функція енергії пучка, T – теплота, яка виділяється при його випромінюванні, $k, \rho, C_p, V, a, b, v_0, v_1, \alpha$ – фізичні коефіцієнти та параметри керування системою. В системі перше рівняння – це рів-