

Апанасенко Д. В., асп.,  
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

### О МЕТОДАХ КЛАСТЕРИЗАЦИИ МНОЖЕСТВ СОСТАВНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

*В статье рассмотрены и решены задачи группирования элементов нечеткого множества, заданного совокупностью составных нечетких чисел треугольного вида. Предложены и проанализированы несколько методов кластеризации. Проведено тестирование работы алгоритмов на конкретном примере.*

*Ключевые слова:* кластеризация, неопределенность, нечеткое треугольное число, методы группирования данных.

Apanasenko D. V., post-graduate,  
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

### ABOUT CLUSTERIZATION METHODS FOR DATASETS OF COMPOSITE FUZZY NUMBERS

*In this article there are discussed and solved the problems of fuzzy set elements grouping. Fuzzy sets are formalized by complex fuzzy sets. A few methods of clusterization are proposed and analyzed. The use of the algorithm is provided on the real example.*

*Key words:* clusterization, uncertainty, fuzzy triangle number, methods of data grouping.

УДК 519.6

О. Ю. Грищенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
Г. О. Загородня, магістр,  
В. В. Оноцький, канд. фіз.-мат. наук, асист.,  
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

### ДВОКРОКОВИЙ СИМЕТРИЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ В ДЕФОРМУЮЧОМУ СЕРЕДОВИЩІ

*Розглянуто математичну модель, що описує процес розповсюдження високоенергетичних пучків випромінювання, що опієється системою диференціальних рівнянь в частинних похідних з комплексними коефіцієнтами. Для чисельного моделювання запропоновано модифікацію двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму). Досліджено основні властивості даного алгоритму.*

*Ключові слова:* різницевої схеми, двокроковий симетризований різницевий алгоритм, ДС-алгоритм, чисельне моделювання, процес розповсюдження оптичного випромінювання.

**Вступ.** Загальні моделі адаптивної оптики запропоновано в 80-ті роки минулого сторіччя [1, 2]. Адаптивна (квазі-лінійна) оптика це наука, що в даний час знаходиться на грані між інженерними розробками та науковими дослідженнями. Вона вивчає процеси розповсюдження високоенергетичного оптичного випромінювання в середовищі, яке змінює свої властивості під дією енергетичного поля самого пучка випромінювання і тим самим деформує початковий напрям розповсюдження пучка.

Такі явища виникають при роботі лазерних приладів, як високоточних, що використовуються у медицині (лазерна хірургія, офтальмологія), так і потужних промислових облаштуваннях лазерної різки та зварювання об'єктів, тощо. Тепловий потік цих приладів приводить до нагрівання навколишнього середовища, оптичних елементів, а це часто призводить до відхилення променя та зменшення якості роботи. Нелінійність розповсюдження високоенергетичних пучків випромінювання також частково пояснюється нерівномірним збуренням середовища, в якому розповсюджується пучок. Ці збурення є наслідком впливу енергетичного поля випромінювання на щільність середовища, а отже і на коефіцієнт проникнення світла. Нерівномірний нагрів призводить до утворення місцевої деформуючої сили, що впливає на зміну напрямку розповсюдження пучка. Введення адаптивної корекції в цих умовах дозволяє компенсувати негативні ефекти.

Адаптивної корекції потребують як скануючі мікроскопи, так і потужні астрономічні телескопи, а також прилади, які досліджують атмосферу та проводять спостереження за наземними об'єктами з космосу. При роботі приладів у атмосферному середовищі значний вплив на якість роботи мають погодні умови, "прозорість" атмосфери та інші фактори.

Основним завданням чисельного моделювання таких процесів є дослідження енергетичних полів, можливість "викривлень" таких оптичних випромінювань та можливість їх компенсації.

В даній роботі розглядається функціонування системи, робота якої вивчається в умовах "теплого самозбурення". При цьому враховується, що методи, побудовані на основі чисто фазового керування пучком не дають повної інформації [1]. Тому в моделі враховуються як амплітудні так і фазові ефекти. Це приводить до дослідження комплексно-значних енергетичних полів.

**1. Постановка задачі.** Базова система рівнянь для моделювання пучка "типу гаусівського випромінювання", який розповсюджується в умовах теплового саморозігріву середовища має вигляд [2]

$$2ik \left[ \frac{\partial E}{\partial z} + a \frac{\partial E}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + bE + v_0 E + v_1 E,$$

$$\rho C_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (V \nabla) T \right] - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \alpha |E|.$$

тут  $E$  – комплексно-значна функція енергії пучка,  $T$  – теплота, яка виділяється при його випромінюванні,  $k, \rho, C_p, V, a, b, v_0, v_1, \alpha$  – фізичні коефіцієнти та параметри керування системою. В системі перше рівняння – це рів-

няння розповсюдження енергетичного пучка у середовищі, – друге визначає температурне поле, утворене енергією пучка. Потрібно за допомогою чисельного моделювання вибрати параметри  $v_0, v_1$  так, щоб одержати найбільш сприятливий стан функціонування системи, а саме створити ефективні енергетичне та теплове поля. Постановка задачі оптимального керування, коли  $E = E(T)$  є складною і мало дослідженою. Керуваність таких систем у лінійно-му випадку доводиться за допомогою теорії, розробленої професором С. І. Ляшком [3].

В для проведення чисельного моделювання вказаного процесу нами запропоновано модифікацію чисельного ДС-алгоритму до даної системи рівнянь. Досліджено основні властивості даного алгоритму.

В загальному випадку поставлену задачу потрібно досліджувати в два етапи. На першому, до входження в атмосферу, промінь рухається всередині приладу, випромінювання проходить в зоні застою (немає ніяких зовнішніх впливів і потік формувався лише за рахунок власної конвекції). Другий пов'язаний безпосередньо зовнішні середовищем, яке збурюється.

Одним з можливих варіантів такої моделі є початково-крайова задача для лінійного нестационарного рівняння, що описує процес розповсюдження гаусівського пучка з комплексною функцією розподілу енергії  $E(x, y, z, t)$  у випадково-неоднорідному слабкопоглинаючому середовищі [1]:

$$2i \left( k_1 \frac{\partial E}{\partial x} + k_2 \frac{\partial E}{\partial y} + k_3 \frac{\partial E}{\partial z} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \alpha E + H, \quad (1)$$

в області

$$\Omega = \{ (x, y, z) | 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, 0 < z < l_z \}, \quad 0 < t < t_1$$

з початковими

$$E|_{t=0} = f \quad (2)$$

та граничними умовами

$$E|_{\partial\Omega} = g. \quad (3)$$

тут  $x, y$  – координати в площині, перпендикулярній напрямку розповсюдження пучка,  $z$  – координата в напрямку його розповсюдження; всі коефіцієнти дійсні,  $k_i$  – дійсні хвильові функції, залежні від відповідної просторової координати,  $\gamma$  – величина, обернена до групової швидкості хвилі,  $\alpha$  – коефіцієнт, що враховує заломлення пучка, який в загальному випадку може залежати від температури середовища,  $g$  – експериментально визначена функція,  $E(x, y, z, t)$  – шукана функція для якої:  $E = u + iv$ ,  $H = \phi + i\psi$ .

Тоді

$$2i \left( k_1 \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + k_2 \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} + k_3 \frac{\partial(u+iv)}{\partial z} + \gamma \frac{\partial(u+iv)}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2(u+iv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u+iv)}{\partial y^2} + \alpha(u+iv) + \phi + i\psi$$

Розкривши дужки та врахувавши, що  $i^2 = -1$ , і виділивши з рівняння дійсну та уявну частини отримаємо систему:

$$2 \left( k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u}{\partial y} + k_3 \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha v + \psi, \quad (4)$$

$$2 \left( k_1 \frac{\partial v}{\partial x} + k_2 \frac{\partial v}{\partial y} + k_3 \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha u - \phi \quad (5)$$

при початкових та граничних умовах:

$$u|_{t=0} = \operatorname{Re} f, \quad v|_{t=0} = \operatorname{Im} f, \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \operatorname{Re} g, \quad v|_{\partial\Omega} = \operatorname{Im} g, \quad (7)$$

$f$  та  $g$  задані функції.

Далі рівняння (4)–(5) у подамо у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L^{(1)}(u, v),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L^{(2)}(u, v),$$

де

$$L^{(1)}(u, v) = - \left( \frac{k_1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k_2}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k_3}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha v}{2\gamma} + \frac{\psi}{2\gamma}$$

$$L^{(2)}(u, v) = - \left( \frac{k_1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k_2}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{k_3}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\alpha u}{2\gamma} - \frac{\phi}{2\gamma}$$

**2. Чисельна модель.** Широковживані явні, неявні, тришарові різницеві схеми, тощо, мають певні недоліки та переваги. Явні схеми прості у реалізації, але мають жорсткі умови стійкості, неявні схеми є безумовно стійкими, але приводять до великих систем алгебраїчних рівнянь, які потрібно розв'язувати на кожному часовому кроці. Тришарові схеми мають другий порядок апроксимації, але вимагають задання додаткових, непритаманних диференціальним задачам, умов. В роботі для розв'язання поставленої задачі використовується двокроковий алгоритм (ДС-алгоритм), в якому в кожній фіксованій просторовій точці на двох послідовних часових кроках за певним алгоритмом використовується явні та неявні схеми. Ідею послідовного в часі використання явних та неявних схем було анонсовано ще у 60 рр. Саульєвим [4] та Гурлі [5]. Для параболічних лінійних та нелінійних рівнянь та систем рівнянь Нав'є – Стокса цей метод досліджувався в наших роботах [6–9]. В даній роботі ДС-алгоритм, розповсюджений на системи рівнянь вказаних вище.

Ідея ДС-алгоритму полягає в наступному. На області  $\Omega \times [0, t_1]$  вводиться рівномірна сітка

$$\Omega_{nt} = \left\{ (x_i, y_j, z_k, t_n), i \in I_1, j \in I_2, k \in I_3, n \in I_4 \right\},$$

яка розбивається на дві підмножини:

$$\Omega_1^n = \left\{ (x_i, y_j, z_k, t_n) \mid (i + j + k + n) \bmod 2 = 0 \right\}$$

$$\Omega_2^n = \left\{ (x_i, y_j, z_k, t_n) \mid (i + j + k + n) \bmod 2 = 1 \right\}.$$

На Рис. 1 точки множини  $\Omega_1^n$  позначено хрестиками, а  $\Omega_2^n$  кружечками.

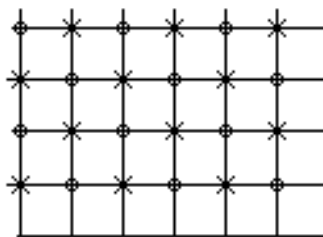


Рис. 1

Значення функцій  $u^{2n+1}, v^{2n+1}$  спочатку шукається у всіх точках сітки  $\Omega_1^{2n+1}$  за явними різницевиими схемами:

$$\begin{cases} u^{2n+1} = u^{2n} + \tau L_h^{(1)}(u^{2n}, v^{2n}), \\ v^{2n+1} = v^{2n} + \tau L_h^{(2)}(u^{2n}, v^{2n}), \end{cases} \quad (8)$$

де  $L_h^{(1)}$  та  $L_h^{(2)}$  - різницеві оператори, що апроксимують  $L^{(1)}$  та  $L^{(2)}$  відповідно

$$\begin{aligned} L_h^{(1)}(u_{i,j}^{2n}, v_{i,j}^{2n}) &= -\frac{k_1}{\gamma} \frac{u_{i+1,jk}^{2n} - u_{i-1,jk}^{2n}}{2h_x} - \frac{k_2}{\gamma} \frac{u_{ij+1k}^{2n} - u_{ij-1k}^{2n}}{2h_y} - \frac{k_3}{\gamma} \frac{u_{ijk+1}^{2n} - u_{ijk-1}^{2n}}{2h_z} + \\ &+ \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{v_{i+1,jk}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{i-1,jk}^{2n}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{ij-1k}^{2n}}{h_y^2} \right) + \frac{a}{2\gamma} v_{ijk}^{2n} + \frac{\psi}{2\gamma} \\ L_h^{(2)}(u_{i,j}^{2n}, v_{i,j}^{2n}) &= -\frac{k_1}{\gamma} \frac{v_{i+1,jk}^{2n} - v_{i-1,jk}^{2n}}{2h_x} - \frac{k_2}{\gamma} \frac{v_{ij+1k}^{2n} - v_{ij-1k}^{2n}}{2h_y} - \frac{k_3}{\gamma} \frac{v_{ijk+1}^{2n} - v_{ijk-1}^{2n}}{2h_z} - \\ &- \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{u_{i+1,jk}^{2n} - 2u_{ijk}^{2n} + u_{i-1,jk}^{2n}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1k}^{2n} - 2u_{ijk}^{2n} + u_{ij-1k}^{2n}}{h_y^2} \right) - \frac{a}{2\gamma} u_{ijk}^{2n} - \frac{\phi}{2\gamma} \end{aligned}$$

В точках множини  $\Omega_2^{2n+1}$  знаходиться решта значень  $u_{i,j,k}^{2n+1}, v_{i,j,k}^{2n+1}$  за допомогою неявних різницевиих схем:

$$\begin{cases} u^{2n+1} = u^{2n} + \tau L_h^{(1)}(u^{2n+1}, v^{2n+1}), \\ v^{2n+1} = v^{2n} + \tau L_h^{(2)}(u^{2n+1}, v^{2n+1}). \end{cases} \quad (9)$$

Значення  $u_{i,j,k}^{2n+1}$  та  $v_{i,j,k}^{2n+1}$  сприймаємо як допоміжні, а розв'язком вважаємо значення  $u_{i,j,k}^{2n+2}, v_{i,j,k}^{2n+2}$ , обчислені за тими ж розрахунковими формулами, але уже для множин  $\Omega_1^{2n+2}$  та  $\Omega_2^{2n+2}$  відповідно.

Відзначимо, що у даному випадку розв'язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь не потрібно. Дійсно. Перепишемо систему (9) у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} u_{ijk}^{2n+1} + \left( \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{a}{2\gamma} \right) v_{ijk}^{2n+1} &= u_{ijk}^{2n} + \tau \left( -\frac{k_1}{\gamma} \frac{u_{i+1,jk}^{2n+1} - u_{i-1,jk}^{2n+1}}{2h_x} - \frac{k_2}{\gamma} \frac{u_{ij+1k}^{2n+1} - u_{ij-1k}^{2n+1}}{2h_y} \right) + \\ + \tau \left( -\frac{k_3}{\gamma} \frac{u_{ijk+1}^{2n+1} - u_{ijk-1}^{2n+1}}{2h_z} + \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{v_{i+1,jk}^{2n+1} + v_{i-1,jk}^{2n+1}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{2n+1} + v_{ij-1k}^{2n+1}}{h_y^2} \right) + \frac{\psi}{2\gamma} \right) \\ \left( \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{a}{2\gamma} \right) u_{ijk}^{2n+1} + v_{ijk}^{2n+1} &= v_{ijk}^{2n} + \tau \left( -\frac{k_1}{\gamma} \frac{v_{i+1,jk}^{2n} - v_{i-1,jk}^{2n}}{2h_x} - \frac{k_2}{\gamma} \frac{v_{ij+1k}^{2n} - v_{ij-1k}^{2n}}{2h_y} \right) + \\ + \tau \left( -\frac{k_3}{\gamma} \frac{v_{ijk+1}^{2n} - v_{ijk-1}^{2n}}{2h_z} - \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{u_{i+1,jk}^{2n} + u_{i-1,jk}^{2n}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1k}^{2n} + u_{ij-1k}^{2n}}{h_y^2} \right) - \frac{\phi}{2\gamma} \right). \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\tau}, \quad E = \frac{1}{\tau}, \quad B = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{a}{2\gamma}, \quad D = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) + \frac{a}{2\gamma} \\ C_{ijk} &= \frac{u_{ijk}^{2n}}{\tau} + \left( -\frac{k_1}{\gamma} \frac{u_{i+1,jk}^{2n+1} - u_{i-1,jk}^{2n+1}}{2h_x} - \frac{k_2}{\gamma} \frac{u_{ij+1k}^{2n+1} - u_{ij-1k}^{2n+1}}{2h_y} \right) + \\ + \left( -\frac{k_3}{\gamma} \frac{u_{ijk+1}^{2n+1} - u_{ijk-1}^{2n+1}}{2h_z} + \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{v_{i+1,jk}^{2n+1} + v_{i-1,jk}^{2n+1}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{2n+1} + v_{ij-1k}^{2n+1}}{h_y^2} \right) + \frac{\psi}{2\gamma} \right) \\ F_{ijk} &= \frac{v_{ijk}^{2n}}{\tau} + \left( -\frac{k_1}{\gamma} \frac{v_{i+1,jk}^{2n} - v_{i-1,jk}^{2n}}{2h_x} - \frac{k_2}{\gamma} \frac{v_{ij+1k}^{2n} - v_{ij-1k}^{2n}}{2h_y} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left( -\frac{k_3}{\gamma} \frac{v_{ijk+1}^{2n} - v_{ijk-1}^{2n}}{2h_z} - \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{u_{i+1jk}^{2n} + u_{i-1jk}^{2n}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1k}^{2n} + u_{ij-1k}^{2n}}{h_y^2} \right) - \frac{\varphi}{2\gamma} \right)$$

Тоді останню систему можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} Au_{ijk}^{2n+1} + Bv_{ijk}^{2n+1} = C_{ijk} \\ Du_{ijk}^{2n+1} + Ev_{ijk}^{2n+1} = F_{ijk} \end{cases} \quad (10)$$

Отже, в кожній точці сітки маємо систему лінійних рівнянь, але лише з двома невідомими. Тобто, замість розв'язання системи з  $M = (N_x - 1)(N_y - 1)(N_z - 1)$  лінійних алгебраїчних рівнянь з  $M$  невідомими, що притаманно для неявних схем, ми знаходимо розв'язок за явними формулами

$$u_{ijk}^{2n+1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{ijk} & B \\ F_{ijk} & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}} \quad \text{та} \quad v_{ijk}^{2n+1} = \frac{\begin{vmatrix} A & C_{ijk} \\ D & F_{ijk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}}.$$

Легко переконатися, що має місце твердження.

**Твердження.** На кожному часовому кроці система (10) має єдиний розв'язок.

Для доведення достатньо показати, що головний визначник системи не рівний нулю. Підрахуємо його значення

$$\begin{aligned} \Delta &= AE - BD = \frac{1}{\tau^2} - \left( \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{a}{2\gamma} \right) \left( -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) + \frac{a}{2\gamma} \right) = \\ &= \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\gamma^2} \left( \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{a}{2} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

Отримані значення  $u^{2n+1}, v^{2n+1}$  ми вважаємо допоміжним розв'язком, а за розв'язок приймаємо значення, отримані на парних часових кроках. Рівняння для знаходження значень  $u^{2n+2}, v^{2n+2}$  на парних часових кроках отримуються за аналогічними формулами, що і для непарних часових кроків.

**Теорема (про порядок апроксимації)**

ДС-алгоритм (9)–(10) для задачі (4)–(7) має другий порядок апроксимації.

Доведення. Розглянемо перше рівняння (4) системи

$$2 \left( k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u}{\partial y} + k_3 \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha v + \psi.$$

Запишемо апроксимацію цього рівняння в довільній фіксованій точці  $(x_i, y_j, z_k)$  в момент часу  $2n+1$  (явна схема)

$$\begin{aligned} 2\gamma \frac{u_{ijk}^{2n+1} - u_{ijk}^{2n}}{\tau} + 2 \left( k_1 \frac{u_{i+1jk}^{2n} - u_{i-1jk}^{2n}}{2h_x} + k_2 \frac{u_{ij+1k}^{2n} - u_{ij-1k}^{2n}}{2h_y} + k_3 \frac{u_{ijk+1}^{2n} - u_{ijk-1}^{2n}}{2h_z} \right) = \\ = \frac{v_{i+1jk}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{i-1jk}^{2n}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{ij-1k}^{2n}}{h_y^2} + \alpha v_{ijk}^{2n} + \psi_{ijk}^{2n} \end{aligned}$$

та в момент часу  $2n+2$  (неявна схема)

$$\begin{aligned} 2\gamma \frac{u_{ijk}^{2n+2} - u_{ijk}^{2n+1}}{\tau} + 2 \left( k_1 \frac{u_{i+1jk}^{2n+2} - u_{i-1jk}^{2n+2}}{2h_x} + k_2 \frac{u_{ij+1k}^{2n+2} - u_{ij-1k}^{2n+2}}{2h_y} + k_3 \frac{u_{ijk+1}^{2n+2} - u_{ijk-1}^{2n+2}}{2h_z} \right) = \\ = \frac{v_{i+1jk}^{2n+2} - 2v_{ijk}^{2n+2} + v_{i-1jk}^{2n+2}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{2n+2} - 2v_{ijk}^{2n+2} + v_{ij-1k}^{2n+2}}{h_y^2} + \alpha v_{ijk}^{2n+2} + \psi_{ijk}^{2n+2} \end{aligned}$$

Додамо ці два рівняння та зведемо подібні доданки:

$$\begin{aligned} 2\gamma \left( \frac{u_{ijk}^{2n+1} - u_{ijk}^{2n}}{\tau} + \frac{u_{ijk}^{2n+2} - u_{ijk}^{2n+1}}{\tau} \right) + 2k_1 \left( \frac{u_{i+1jk}^{2n} - u_{i-1jk}^{2n}}{2h_x} + \frac{u_{i+1jk}^{2n+2} - u_{i-1jk}^{2n+2}}{2h_x} \right) + \\ + 2k_2 \left( \frac{u_{ij+1k}^{2n} - u_{ij-1k}^{2n}}{2h_y} + \frac{u_{ij+1k}^{2n+2} - u_{ij-1k}^{2n+2}}{2h_y} \right) + 2k_3 \left( \frac{u_{ijk+1}^{2n} - u_{ijk-1}^{2n}}{2h_z} + \frac{u_{ijk+1}^{2n+2} - u_{ijk-1}^{2n+2}}{2h_z} \right) = \\ = \alpha (v_{ijk}^{2n} + v_{ijk}^{2n+2}) + \psi_{ijk}^{2n} + \psi_{ijk}^{2n+2} + \left( \frac{v_{i+1jk}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{i-1jk}^{2n}}{h_x^2} + \frac{v_{i+1jk}^{2n+2} - 2v_{ijk}^{2n+2} + v_{i-1jk}^{2n+2}}{h_x^2} \right) + \\ + \left( \frac{v_{ij+1k}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{ij-1k}^{2n}}{h_y^2} + \frac{v_{ij+1k}^{2n+2} - 2v_{ijk}^{2n+2} + v_{ij-1k}^{2n+2}}{h_y^2} \right). \end{aligned}$$

Розкладемо тепер кожен доданок у ряд Тейлора відносно відповідної точки:  $u_{i\pm 1} = u_i \pm hu'_i + \frac{h^2}{2}u''_i \pm \frac{h^3}{3!}u'''_i + O(h^4)$ ,

де  $h_i$  – крок по відповідній змінній.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1jk}^{2n} - u_{i-1jk}^{2n}}{2h_x} &= \left( u'_x + \frac{h_x^2}{3} u''_x \right)^{2n} + O(h_x^3), & \frac{u_{i+1jk}^{2n+2} - u_{i-1jk}^{2n+2}}{2h_x} &= \left( u'_x + \frac{h_x^2}{3} u''_x \right)^{2n+2} + O(h_x^3) \\ \frac{u_{ij+1k}^{2n} - u_{ij-1k}^{2n}}{2h_y} &= \left( u'_y + \frac{h_y^2}{3} u''_y \right)^{2n} + O(h_y^3), & \frac{u_{ij+1k}^{2n+2} - u_{ij-1k}^{2n+2}}{2h_y} &= \left( u'_y + \frac{h_y^2}{3} u''_y \right)^{2n+2} + O(h_y^3) \\ \frac{u_{ijk+1}^{2n} - u_{ijk-1}^{2n}}{2h_z} &= \left( u'_z + \frac{h_z^2}{3} u''_z \right)^{2n} + O(h_z^3), & \frac{u_{ijk+1}^{2n+2} - u_{ijk-1}^{2n+2}}{2h_z} &= \left( u'_z + \frac{h_z^2}{3} u''_z \right)^{2n+2} + O(h_z^3) \\ \left( \frac{u_{ijk}^{2n+1} - u_{ijk}^{2n}}{\tau} + \frac{u_{ijk}^{2n+2} - u_{ijk}^{2n+1}}{\tau} \right) &= \left( \frac{u_{ijk}^{2n+2} - u_{ijk}^{2n}}{\tau} \right) = \left( 2u'_t + \frac{\tau^2}{3} u''_t \right)^{2n+1} + O(\tau^3) \\ \frac{v_{i+1jk}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{i-1jk}^{2n}}{h_x^2} &= (v''_x)^{2n} + O(h_x^2), \\ \frac{v_{i+1jk}^{2n+2} - 2v_{ijk}^{2n+2} + v_{i-1jk}^{2n+2}}{h_x^2} &= (v''_x)^{2n+2} + O(h_x^2) \\ \frac{v_{ij+1k}^{2n} - 2v_{ijk}^{2n} + v_{ij-1k}^{2n}}{h_y^2} &= (v''_y)^{2n} + O(h_y^2), \\ \frac{v_{ij+1k}^{2n+2} - 2v_{ijk}^{2n+2} + v_{ij-1k}^{2n+2}}{h_y^2} &= (v''_y)^{2n+2} + O(h_y^2) \end{aligned}$$

Підставивши це все у рівняння і скориставшись тим, що  $F(u^{2n} + u^{2n+2}) = 2F(u^{2n+1}) + O(\tau^2)$  отримаємо:

$$\begin{aligned} &2\gamma \left( 2u'_t + \frac{\tau^2}{3} u''_t \right)^{2n+1} + O(\tau^3) + 2k_1 \cdot 2 \left( u'_x + \frac{h_x^2}{3} u''_x \right)^{2n+1} + O(h_x^3) + \\ &+ 2k_2 \cdot 2 \left( u'_y + \frac{h_y^2}{3} u''_y \right)^{2n+1} + O(h_y^3) + 2k_3 \cdot 2 \left( u'_z + \frac{h_z^2}{3} u''_z \right)^{2n+1} + O(h_z^3) = \\ &= 2\alpha v_{ijk}^{2n+1} + 2\psi_{ijk}^{2n+1} + 2(v''_x)^{2n+1} + 2(v''_y)^{2n+1} \end{aligned} \tag{11}$$

Перепишемо наше початкове рівняння у вигляді  $2\gamma u'_t + 2k_1 u'_x + 2k_2 u'_y + 2k_3 u'_z = v''_x + v''_y + \alpha v + \psi$ , помножимо його на 2 та віднімемо від (11) на кроці  $2n + 1$ . Маємо:

$$\begin{aligned} &2\gamma \left( 2u' + \frac{\tau^2}{3} u'' \right)^{2n+1} + 2k_1 \cdot 2 \left( u' + \frac{h_x^2}{3} u'' \right)^{2n+1} + 2k_2 \cdot 2 \left( u' + \frac{h_y^2}{3} u'' \right)^{2n+1} + \\ &+ 2k_3 \cdot 2 \left( u' + \frac{h_z^2}{3} u'' \right)^{2n+1} - (4k_1 u'_x + 4k_2 u'_y + 4k_3 u'_z + 4\gamma u'_t)^{2n+1} + O(h_x^3) + O(h_y^3) + O(h_z^3) + \\ &+ O(\tau^3) = 2\alpha v_{ijk}^{2n+1} + 2\psi_{ijk}^{2n+1} + 2(v''_x)^{2n+1} + 2(v''_y)^{2n+1} - (2v''_x + 2v''_y + 2\alpha v + 2\psi)^{2n+1} \end{aligned}$$

Після зведення подібних доданків, отримаємо, що залишковий член похибки апроксимації рівний

$$\begin{aligned} \zeta &= 2k_1 \left( \frac{h_x^2}{3} u'' \right)^{2n+1} + 2k_2 \left( \frac{h_y^2}{3} u'' \right)^{2n+1} + 2k_3 \left( \frac{h_z^2}{3} u'' \right)^{2n+1} + \gamma \left( \frac{\tau^2}{3} u'' \right)^{2n+1} + \\ &+ O(h_x^3) + O(h_y^3) + O(h_z^3) + O(\tau^3). \end{aligned}$$

В силу довільності точки  $(x_i, y_j, z_k)$ , можна стверджувати, що похибка апроксимації розв'язку нашої задачі буде  $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$ . Для рівняння (5) за тією ж схемою провести дослідження та отримати аналогічний результат.

Якщо коефіцієнти системи різницевих рівнянь сталі, то безумовна стійкість ДС-алгоритму, як і у [6], встановлюється за допомогою методу фон Неймана. Отже за теоремою Філіпова – Лакса маємо, що при  $\tau \rightarrow 0$  і  $h \rightarrow 0$  чисельний розв'язок збігається до розв'язку диференціального рівняння зі швидкістю збіжності  $\tau^2 + h^2$ .

**Тестові обчислювальні експерименти.** Для верифікації алгоритму були проведено обчислювальні експерименти на двох моделях з відомим точним розв'язком.

**Задача 1.** Покладаємо:  $E = e^{i(wi+x+y+(0.5-w)z)}$ ,  $w = 1$ ,  $t_1 = 1$ ,  $l_x = l_y = l_z = \pi/2$ ,  $k_1 = k_2 = H \equiv 0$ ,  $k_3 = \gamma = \alpha = 1$ ,  $h_x = h_y = h_z = \pi/200$ ,  $\tau = 0.001$ .

Рис. 3 Максимальні значення абсолютних похибок для розв'язку  $u$  та  $v$ .

Рисунки 1 та 2 практично підтверджують стійкість запропонованого ДС-алгоритму. Абсолютна похибка алгоритму не перевищує 0,008 (див. рис. 3).

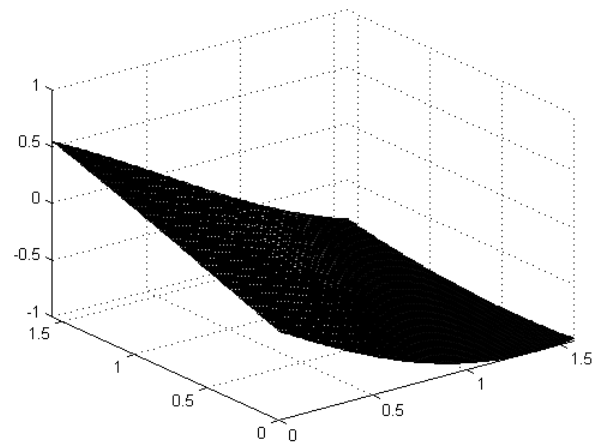


Рис. 1. Переріз поверхні графіка розв'язку  $u$  площиною  $x = \frac{\pi}{4}$  при  $t = 1$

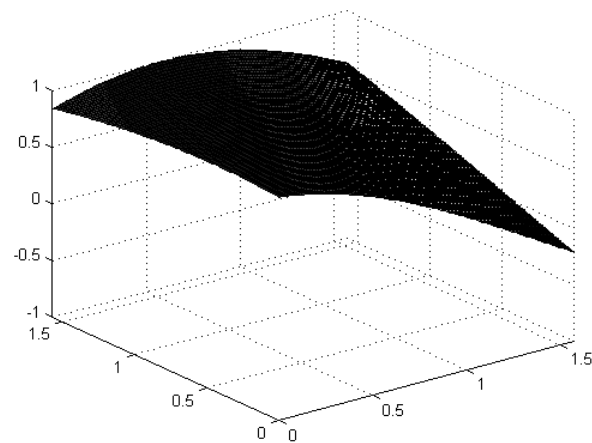


Рис. 2. Переріз поверхні графіка розв'язку  $v$  площиною  $x = \frac{\pi}{4}$  при  $t = 1$

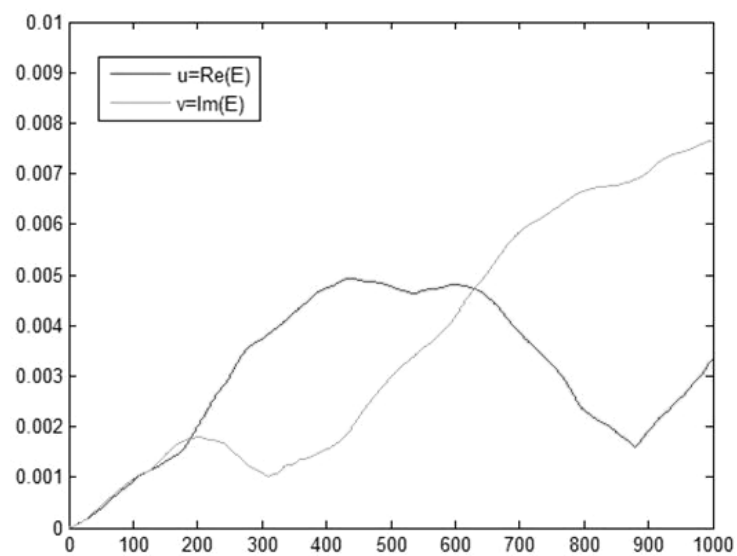


Рис. 3. Максимальні значення абсолютних похибок для розв'язку  $u$  та  $v$

Рисунки 1 та 2 практично підтверджують стійкість запропонованого ДС-алгоритму. Абсолютна похибка алгоритму не перевищує 0,008 (див. рис. 3).

**Задача 2.** Коефіцієнти  $k_i(x)$  вибиралися так, щоб при прямуванні  $x$  до  $\pi/2$  вони швидко затухали:

$$k_i(x) = \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-1}\right); \quad i = 1, 2, 3; \quad \gamma = \alpha = 1; w = 1; \quad l_x = l_y = l_z = \pi/2; t_1 = 1. \quad \text{Точним розв'язком цієї задачі є}$$

$$E = e^{i(wt+x+y+(0.5-w)z)}.$$

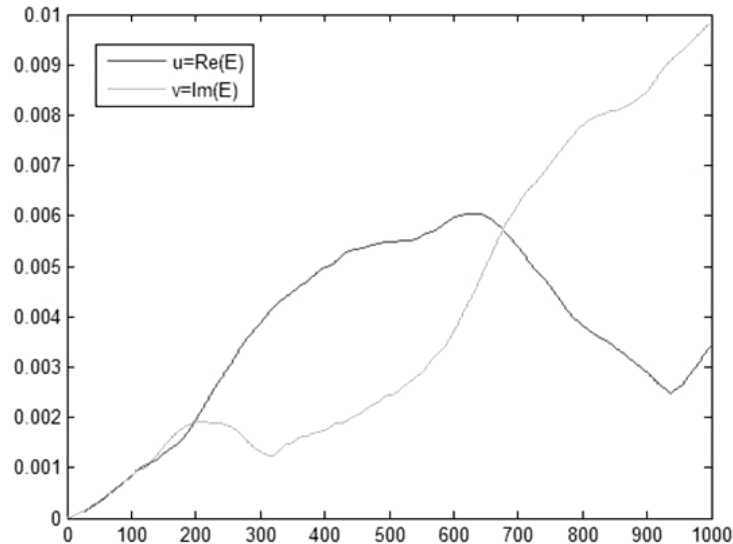


Рис. 4 Графіки максимальних абсолютних похибок для розв'язків  $u$  та  $v$

Можна помітити, що в даному випадку похибка досягає 0.01, що дає підставу вважати, що алгоритм дає більш точний розв'язок в задачі зі сталими коефіцієнтами, аніж із змінними.

**Висновки.** Запропоновано ефективний двокроковий симетризований алгоритм другого порядку апроксимації  $O(\tau^2 + h^2)$  для чисельного моделювання. Проведені чисельні експерименти на тестових задачах, наведені відповідні малюнки і графіки. Стійкість запропонованого ДС-алгоритму встановлена експериментально.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Воронцов М. А. Принципы адаптивной оптики / Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
2. Канев Ф. Ю. Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования / Канев Ф. Ю., Лукин В. П. – Томск.: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2005. – 250 с.
3. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами / Ляшко С. И. – К.: Наукова думка, 1998. – 466 с.
4. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / Саульев В. К. – М.: ГИМФЛ, 1960 г., – 324 с.
5. Gourlay A. R. Hopscotch a fast second-order partial differential equation solver / Gourlay A. R. – I. Inst. Math. Appl. , 1970. – V.6. – P. 375–390.
6. Грищенко О. Ю. ДС-різницевий алгоритм розв'язання крайових задач для параболических рівнянь другого порядку / Грищенко О. Ю. // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки, 2000. – В.1. – С.227–231.
7. Gristhenko O. Yu. On an Algorithm for a Numerical Study of the Visualisation of Holographic Relief / Gristhenko O. Yu. // J. of Math. Sciences. - Kluwer Academic Press / Plenum Publishers, 2000. – Vol. 102. – No. 1. – P. 3749–3755.
8. Грищенко О. Ю. Двокроковий різницевий алгоритм знаходження періодичних розв'язків рівнянь типу Шредінгера / Грищенко О. Ю., Слюсаренко В. Г., Оноцький В. В. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки, 2004. – Вып. №2. – С. 204–209.
9. Грищенко О. Ю. Модифікація ДС-алгоритму розв'язування початково-крайових задач для систем рівнянь Нав'є-Стокса / Грищенко О. Ю., Довбня П. І.; Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2011. – №3(106). – С. 17–25.
10. Gryshchenko A. Yu. A two-stepsplitting algorithm in heat and mass transfer problems / Gryshchenko A. Yu. and. Martsafei A. S. // Cybernetics and Systems Analysis, 2011. – Vol.47. – Issue 6. – pp. 941–947.
11. Грищенко О. Ю. Numerical simulation of the process of optical radiation in the deforming medium / Грищенко О. Ю., Загородня Г. О., Оноцький В. В. // XXIV Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties" (PDMU-2014), Чеський Рудолець (Чеська республіка), 1–5 вересня 2014 р. – с. 111–112.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.15

Грищенко А. Е., д-р физ.-мат. наук, проф.  
 Загородная А. А., магистр,  
 Оноцкий В. В., канд. физ.-мат. наук, ассист.  
 КНУ имени Тараса Шевченка, Киев

**ДВУШАГОВЫЙ СИММЕТРИЗОВАННЫЙ АЛГОРИТМ  
 ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ  
 В ИСКАЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ**

*Рассмотрено математическую модель, которая описывает процесс распространения высокоэнергетических пучков излучения, который описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с комплексными коэффициентами. Для численного моделирования предложено модификацию двушагового симметризованного разностного алгоритма (ДС-алгоритма) Исследовано основные свойства данного алгоритма.*

**Ключевые слова:** разностные схемы, двушаговый симметризованный разностный алгоритм, ДС-алгоритм, численное моделирование, процесс распространения оптического излучения.

Gryshchenko Oleksandr, Dr. Sci., prof.,  
Zagorodnia Ganna, stud.  
Onotskyi Viacheslav, Ph.D, assist.,  
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

### SYMMETRIZED TWO-STEP DIFFERENCE ALGORITHM FOR THE NUMERICAL MODELING OF THE PROCESS OF RADIATION PROPAGATION IN DEFORMING ENVIRONMENT

The mathematical model, describing the process of high energy beams radiation propagation is considered. The model is described by a system of partial differential equations with complex coefficients. A two-step finite difference algorithm (DS-algorithm) is proposed for numerical modeling. The main properties of the algorithm are investigated.

**Key words:** finite difference schemes, two-step symmetrized finite difference algorithm, DS-algorithm, numerical modeling, propagation of optic radiation process.

УДК 519.87

Є. В. Івохін, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

### ВИКОРИСТАННЯ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ НЕЧІТКИХ ТРИКУТНИХ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

В статті запропоновано конструктивний підхід для представлення величини міри належності нечітких трикутних цілих чисел, в основу якого покладено ідею використання послідовності простих чисел спеціального вигляду. Запропоновано формалізацію операцій над нечіткими числами, наведено ряд практичних прикладів, в яких застосовується розроблена технологія. Запропонований підхід може бути використаний при розв'язанні різних задач підтримки прийняття рішень в умовах невизначеності.

**Ключові слова:** нечіткі множини та числа, прості числа, трикутні нечіткі числа, функція належності.

При проведенні різних досліджень в умовах невизначеності важливо коректно формалізувати процеси, що відбуваються в об'єкті дослідження. Дуже часто формалізація пов'язана з встановленням параметрів, які мають цілочисельний вигляд (кількість повторень, розмір об'єкта, бальна оцінка і т. і.). Врахування "наближеного" характеру згаданих параметрів можливо, наприклад, за допомогою нечіткого представлення цілих чисел, що базується на використанні нечітких трикутних чисел [1] та залучення спеціальних послідовностей простих чисел.

Класичне поняття нечіткої множини заданої універсальної множини  $X$  у відповідності до Заде [2] формулюється наступним чином.

**Означення 1.** [2] Нечіткою множиною  $\tilde{A}$  універсальної множини  $X$ , називають сукупність пар  $\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\}$ , де  $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$  – відображення множини  $X$  в одиничний відрізок  $[0,1]$ , яке називається функцією належності нечіткій множині.

Величина функції належності  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  для елемента  $x \in X$  визначає ступінь належності до нечіткої множини. Інтерпретацією ступеня належності  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  є суб'єктивна міра того, наскільки елемент  $x \in X$  відповідає поняттю, сенс якого формалізується нечіткою множиною  $\tilde{A}$ .

Визначимо в якості універсальної множини  $X$  простір над полем дійсних чисел  $R^1$ , тобто  $X = R^1$ . У цьому випадку розглядаються нечіткі величини, а при розв'язанні прикладних задач для формалізації нечіткості використовують інші більш конструктивні та прагматичні означення нечітких величин, що еквівалентні класичному означенню 1.

**Означення 2.** [3] Нечітким числом  $\tilde{b}$  називають впорядковану пару функцій  $(u(r), v(r))$ ,  $r \in [0,1]$ , які задовольняють наступним умовам

1.  $u(r)$  обмежена, неперервна зліва, неспадна функція на  $[0,1]$ ;
2.  $v(r)$  обмежена, неперервна зліва, незростаюча функція на  $[0,1]$ ;
3.  $u(r) \leq v(r)$ ,  $r \in [0,1]$ .

**Означення 3.** [1] Нечітким трикутним числом  $\tilde{b}$  називають впорядковану трійку чисел  $(a, b, c)$ ,  $a \leq b \leq c$ , що визначає функцію належності  $\mu_{\tilde{b}}(x)$  у вигляді:

1.  $\mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ ,  $x \in [a, b]$ ;
2.  $\mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{c-x}{c-b}$ ,  $x \in [b, c]$ ;
3.  $\mu_{\tilde{b}}(x) = 0$ ,  $x \notin [a, c]$ .

Нечітке трикутне число  $\tilde{b}$ , задане у вигляді трійки  $(a, b, c)$ , іноді називають триплетом, при чому, для довільного числа  $x \in [a, b]$  справедливе представлення  $x = a + \lambda(b-a)$ , а для довільного  $x \in [b, c]$  –  $x = c - \lambda(c-b)$ , де  $0 \leq \lambda \leq 1$  – заданий рівень міри належності числа  $x$  нечіткій множині  $\tilde{b}$ . Нечітке трикутне число виду  $(a, b, b)$ , яке називається лівим нечітким трикутним числом, визначається функцією належності

$$\mu_{\tilde{b}}(x) = 0, x < a; \quad \mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]; \quad \mu_{\tilde{b}}(x) = 1, x > b, \quad (3)$$