Gryshchenko Oleksangr, Dr. Sci., prof.,
Zagorodnia Ganna, stud.
Onotskyi Viacheslav, Ph.D, assist.,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

SYMMETRIZED TWO-STEP DIFFERENCE ALGORITHM FOR THE NUMERICAL MODELING OF THE PROCESS OF RADIATION PROPAGATION IN DEFORMING ENVIRONMENT

The mathematical model, describing the process of high energy beams radiation propagation is considered. The model is described by a system of partial differential equations with complex coefficients. A two-step finite difference algorithm (DS-algorithm) is proposed for numerical modeling. The main properties of the algorithm are investigated.

Key words: *finite difference schemes, two-step symmetrized finite difference algorithm, DS-algorithm, numerical modeling, propagation of optic radiation process.*

УДК 519.87

Є. В. Івохін, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ВИКОРИСТАННЯ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ НЕЧІТКИХ ТРИКУТНИХ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

В статті запропоновано конструктивний підхід для представлення величини міри належності нечітких трикутних цілих чисел, в основу якого покладено ідею використання послідовності простих чисел спеціального вигляду. Запропоновано формалізацію операцій над нечіткими числами, наведено ряд практичних прикладів, в яких застосовується розроблена технологія. Запропонований підхід може бути використаний при розв'язанні різних задач підтримки прийняття рішень в умовах невизначеності.

Ключові слова: нечіткі множини та числа, прості числа, трикутні нечіткі числа, функція належності.

При проведенні різних досліджень в умовах невизначеності важливо коректно формалізувати процеси, що відбуваються в об'єкті дослідження. Дуже часто формалізація пов'язана з встановленням параметрів, які мають цілочисельний вигляд (кількість повторень, розмір об'єкта, бальна оцінка і т. і.). Врахування "наближеного" характеру згаданих параметрів можливо, наприклад, за допомогою нечіткого представлення цілих чисел, що базується на використанні нечітких трикутних чисел [1] та залучення спеціальних послідовностей простих чисел.

Класичне поняття нечіткої множини заданої універсальної множини X у відповідності до Заде [2] формулюється наступним чином.

Означення 1. [2] Нечіткою множиною $\tilde{A}$ універсальної множини X, називають сукупність пар $\tilde{A}=\{(\mu_{\tilde{A}}(x),x)\}$, де $\mu_{\tilde{A}}(x): X\to[0,1]$ – відображення множини X в одиничний відрізок [0,1], яке називається функцією належності нечіткій множині.

Величина функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для елемента $x\in X$ визначає ступінь належності до нечіткої множини. Інтерпретацією ступеня належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ є суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x\in X$ відповідає поняттю, сенс якого формалізується нечіткою множиною $\tilde{A}$.

Визначимо в якості універсальної множини X простір над полем дійсних чисел R^1, тобто $X=R^1$. У цьому випадку розглядаються нечіткі величини, а при розв'язанні прикладних задач для формалізації нечіткості використовують інші більш конструктивні та прагматичні означення нечітких величин, що еквівалентні класичному означенню 1.

Означення 2. [3] Нечітким числом $\tilde{b}$ називають впорядковану пару функцій $(u(r),v(r)),\quad r\in[0,1]$, які задовольняють наступним умовам

1. $u(r)$ обмежена, неперервна зліва, неспадна функція на $[0,1]$;
2. $v(r)$ обмежена, неперервна зліва, незростаюча функція на $[0,1]$; (1)
3. $u(r)\le v(r)$, $r\in[0,1]$.

Означення 3. [1] Нечітким трикутним числом $\tilde{b}$ називають впорядковану трійка чисел *(a, b, c)*, $a\le b\le c$, що визначає функцію належності $\mu_{\tilde{b}}(x)$ у вигляді:

1. $\mu_{\tilde{b}}(x)=\dfrac{x-a}{b-a}, x\in[a,b]$;
2. $\mu_{\tilde{b}}(x)=\dfrac{c-x}{c-b}, x\in[b,c]$; (2)
3. $\mu_{\tilde{b}}(x)=0, x\notin[a,c]$.

Нечітке трикутне число $\tilde{b}$, задане у вигляді трійки *(a, b, c)*, іноді називають триплетом, при чому, для довільного числа $x\in[a,b]$ справедливе представлення $x=a+\lambda(b-a)$, а для довільного $x\in[b,c]$ – $x=c-\lambda(c-b)$, де $0\le\lambda\le1$ – заданий рівень міри належності числа x нечіткій множині $\tilde{b}$. Нечітке трикутне число виду *(a, b, b)*, яке називається лівим нечітким трикутним числом, визначається функцією належності

$$\mu_{\tilde{b}}(x)=0, x<a;\quad \mu_{\tilde{b}}(x)=\frac{x-a}{b-a}, x\in[a,b];\quad \mu_{\tilde{b}}(x)=1, x>b, \tag{3}$$

а нечітке трикутне число виду *(b, b, c)*, яке називається правим нечітким трикутним числом, – функцією належності

$$\mu_{\tilde{b}}(x)=1, x<b\ ;\quad \mu_{\tilde{b}}(x)=\frac{c-x}{c-b}, x\in[b,c]\ ;\quad \mu_{\tilde{b}}(x)=0, x>c\ . \qquad (4)$$

Використання простих чисел для моделювання процесів у нечітких умовах запропоновано у [4]. В рамках підходу розглянуто ефективні обчислювальні схеми, які дозволяють отримувати значення функцій належності для елементів нечітких множин, що застосовуються для опису невизначеності параметрів процесу.

Означення 4. [4] Просте число $P_j(a)\geq 0$, $a\geq 0$, $j\in Z$, яке належить інтервалу $[a,\infty)$ при $j\geq 0$ або інтервалу $[0,a)$ при $j<0$ для заданого, необов'язково простого, цілого числа $a\geq 0$, будемо називати j – тим простим числом відносно числа a .

Розглянемо довільні прості числа $P_j(a)\geq 0$ з порядковими номерами $j\in Z$ з множини простих чисел відносно числа $a\geq 0$. Нескладно перевірити, що справедливі властивості:

1) $P_0(0)=0$, $P_0(1)=1$, $P_1(0)=1$;

2) $P_0(a)=a$, якщо число $a\geq 0$ – просте, $P_0(a)$ – не існує, якщо $a\geq 0$ – непросте;

3) $P_j(a)\leq P_k(a)$, якщо $j\leq k$, $P_j(a)<P_k(a)$ при $j<k$, $j\in Z$, $k\in Z$;

4) $P_j(a)=P_j(a+1)=...=P_j(a+l)$ для всіх $1\leq l<P_{j+1}(a)-P_j(a)$, $j=0,1,2,...$, $a\geq 0$;

5) $P_j(a)=P_1(P_{j-1}(a))= =P_1(P_1(P_{j-2}(a)))=P_2(P_{j-2}(a))=...=P_{j-1}(P_1(a))$, якщо число $a\geq 0$ – просте, $j\in Z$;

6) $P_j(a)\geq a$ для усіх $j=0,1,2,...$, якщо число $a\geq 0$ - просте, $P_j(a)>a$ для усіх $j=1,2,...$, якщо $a\geq 0$ - непросте;

7) $P_j(a)<a$ для $j=-1,-2,...,j_0$, де номер $j_0<0$ визначається як найменший індекс простого числа з загальної множини, для якого $0\leq P_{j_0}(a)<a$.

Означення 5. Нечітким цілим числом $\tilde{n}$ будемо називати впорядковану трійку чисел *(k, n, l)*, $k\leq n\leq l$, $k,n,l\in Z$, де

$$k=\begin{cases}P_{-1}(n), n\geq 0,\\ -P_1(-n), n<0,\end{cases}\qquad l=\begin{cases}P_1(n), n\geq 0,\\ -P_{-1}(-n), n<0,\end{cases} \qquad (5)$$

а $P_1(\cdot),P_{-1}(\cdot)$ – наступне та попереднє прості числа відносно n , $n\geq 0$, та $-n$, $n<0$.

Іншими словами, довільне нечітке ціле число $\tilde{n}$ може бути представлене у вигляді триплету, ліве (*k*) та праве (*l*) значення якого подаються найближчими простими числами.

Такий підхід дозволяє для довільного $n\in Z$ задати нечітке ціле число $\tilde{n}$ = *(k, n, l)*, не визначаючи діапазон представлення нечіткого числа $[k,l]$: можна покласти k та l у вигляді (5) і використати лінійну функцію належності

$$\mu_{\tilde{n}}(x)=\frac{x-k}{n-k}, x\in[k,n]\ ;\quad \mu_{\tilde{n}}(x)=\frac{l-x}{l-n}, x\in[n,l]\ ;\quad \mu_{\tilde{n}}(x)=0, x\notin[k,l]\ . \qquad (6)$$

Легко перевірити, що у випадках, коли $k=0$ або $l=0$, зберігається справедливість представлення нечіткого цілого числа за означенням 5 з урахуванням властивості 1 для простих чисел, а при $n=0$ маємо представлення нечіткого числа $\tilde{0}$ = *(0, 0, 1)*.

Використання означення нечіткого цілого числа спрощує виконання традиційних арифметичних операцій додавання, віднімання, множення та ділення над нечіткими цілими числами. Для двох нечітких цілих $\tilde{n}$ та $\tilde{m}$, заданих у вигляді нечітких трикутних чисел (k_n, n, l_n) та (k_m, m, l_m) відповідно, маємо

1. $\tilde{n}\ +\ \tilde{m}\ =\ (k_+, n+m, l_+)$, (7)

де $k_+=\begin{cases}P_{-1}(n+m), n+m\geq 0,\\ -P_1(-n-m), n+m<0,\end{cases}\quad l_+=\begin{cases}P_1(n+m), n+m\geq 0,\\ -P_{-1}(-n-m), n+m<0,\end{cases}$

2 $\tilde{n}\ -\ \tilde{m}\ =\ (k_-, n-m, l_-)$, (8)

де $k_-=\begin{cases}P_{-1}(n-m), n-m\geq 0,\\ -P_1(-n+m), n-m<0,\end{cases}\quad l_-=\begin{cases}P_1(n-m), n-m\geq 0,\\ -P_{-1}(-n+m), n-m<0,\end{cases}$

3. $\tilde{n}\ *\ \tilde{m}\ =\ (k_*, n*m, l_*)$, (9)

де $k_*=\begin{cases}P_{-1}(n*m), n*m\geq 0,\\ -P_1(-n*m), n*m<0,\end{cases}\quad l_*=\begin{cases}P_1(n*m), n*m\geq 0,\\ -P_{-1}(-n*m), n*m<0,\end{cases}$

4. $\tilde{n}\ /\ \tilde{m}\ =\ (k_{div}, n/m, l_{div})$, $m\neq 0$, (10)

де $k_{div}=\begin{cases}P_{-1}(n/m), n/m\geq 0,\\ -P_1(-n/m), n/m<0,\end{cases}\quad l_{div}=\begin{cases}P_1(n/m), n/m\geq 0,\\ -P_{-1}(-n/m), n/m<0,\end{cases}$

5. $\tilde{n}\ \%\ \tilde{m}\ =\ (k_{\mathrm{mod}}, n\%m, l_{\mathrm{mod}})$, $n\geq 0, m>0$, (11)

де $k_{\mathrm{mod}}=\begin{cases}P_{-1}(n\%m), n\%m\geq 0,\\ -P_1(-n\%m), n\%m<0,\end{cases}\quad l_{\mathrm{mod}}=\begin{cases}P_1(n\%m), n\%m\geq 0,\\ -P_{-1}(-n\%m), n\%m<0,\end{cases}$

и при цьому результати не залежать від початкових інтервалів $[k_n, l_n]$ та $[k_m, l_m]$ представлення нечітких цілих чисел $\tilde{n}$ та $\tilde{m}$.

Необхідно звернути увагу ще на одну важливу деталь. Обчислення простих чисел з великими номерами відносно довільного $a \geq 0$ є досить ресурсоємним процесом. В той же час, знаходження простих чисел $P_1(a)$ та $P_{-1}(a)$ для довільного $a \geq 0$ відбувається дуже швидко і не вимагає суттєвих обчислювальних витрат.

Інший приклад є більш теоретичним і стосується принципів формування нечітких множин. Розглянемо поняття довільного нечіткого числа. За традиційним означенням 1 нечітке число $\tilde{b}$ подається у вигляді множини пар $\tilde{b} = \{(b_i, \mu(b_i)) \mid b_i \in [a, c], i \in I, a \leq b \leq c, \mu(b_i) \in [0,1], i \in I, \mu(b) = 1\}$.

Іншими словами, представлення нечіткого числа $\tilde{b}$ обов'язково залежить від самого числа b і характеризується параметрами у вигляді діапазону представлення $[a, c]$ та функції належності. Для кожного з нечітких чисел необхідно визначити свій інтервал представлення і обумовити вигляд функції належності. На основі запропонованого представлення можна побудувати нечіткі числа, що не залежать від параметрів нечіткості.

Розглянемо трикутні нечіткі числа з лінійними функціями належності. За означенням 5 нечіткого цілого числа будь-яке число $\tilde{b}$ подається у вигляді множини трійок $\tilde{b} = \{(a,b,c)\}$, $b \in Z$, a,c – прості числа, які обчислюються за формулою (6), а функція належності має вигляд

$$\mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]; \quad \mu_{\tilde{b}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b,c]; \quad \mu_{\tilde{b}}(x) = 0, x \notin [a,c]. \tag{12}$$

Таким чином, для нечіткого числа $\tilde{b}$ стає непотрібним визначення діапазону представлення $[a, c]$. Більше того, у цьому випадку можна визначати нові нечіткі поняття, наприклад, на основі нечіткого правила.

Розглянемо нечітко визначене просте число (більш коротко, нечітко просте число). Для звичайних цілих прості числа є підмножиною, яка чітко визначається правилом щодо кількості елементарних дільників. У випадку нечіткого цілого числа $\tilde{b}$ кількість дільників числа $b \in Z$ та їх задання потребують вводу додаткових представлень. Замість цього, пропонується розглядати нечітко просте число, яке для довільного $b \in Z$ буде задаватися у вигляді нечіткого числа $\tilde{b} = \{(a,b,c)\}$ з інтервалу $[a, c]$, ліва та права границі якого подаються найближчими простими числами.

На основі такого представлення довільне ціле число $b \in Z$ є нечітко простим числом $\tilde{b}$ з лінійною функцією належності (12) та представленням у вигляді трійок $\tilde{b} = \{(a,b,c)\}$. Наприклад, число 18 не є простим числом, однак воно є нечітко простим числом, яке подається у вигляді трійки $\widetilde{18} = \{(17,18,19)\}$.

В якості практичного застосування введеного представлення нечіткого цілого числа можна навести два невеликі приклади. Перший з них стосується процесу фільтрації графічної інформації на основі аналізу віконних зображень, отриманих за допомогою прямокутних апертур [5]. Як правило, розмір апертури суттєво впливає на якість результатів фільтрації та на час роботи алгоритмів обробки. Невизначеність розмірів апертури може бути усунена встановленням діапазонів представлення ширини та довжини вікна апертури на базі нечітких цілих чисел. Більше того, виходячи з правила, за яким розміри задаються лише непарними цілими числами, можна розглядати тільки половину значень з кожного діапазону (для ширини та довжини).

Зрозуміло, що такий підхід легко розповсюдити на різні поняття, в основі яких лежать правила відбору або формалізації нечітко визначених даних. Наприклад, використовуючи запропонований спосіб для подання нечітких цілих значень, можна розширити опис типів в мовах програмування новими типами для позначення нечітких чисел. Вони можуть бути утворені на основі використання лексем для стандартних типів, перед якими записується ключове слово *fuzzy* (для цілих, відповідно, *fuzzy int* або *fuzzy long*). При цьому, якщо деяка змінна ініціалізується значенням відповідного стандартного (скалярного) типу, то описана з префіксом *fuzzy* змінна передбачає подання даного значення у вигляді нечіткого трикутного числа з носієм, що задається у формі інтервалу, побудованому на основі найближчих простих чисел.

Даний підхід дозволяє також розширити семантику мов програмування операторами, що працюють з нечіткими числами. Для прикладу, оператор *for (fuzzy int i=1; i<=n; i++)* передбачає, що змінна *i* пробігає значення від *0* до *n*, при цьому *n* вважається нечітким трикутним числом з інтервалом представлення носія у формі $[P_{-1}(n), P_{+1}(n)]$, де $P_{-1}(\cdot)$, $P_{+1}(\cdot)$ – попереднє та наступне відносно заданого цілого числа прості числа. Результатом виконання такого оператора вважається нечітке трикутне значення з лінійною трикутною функцією належності, яке визначено на інтервалі, що містить послідовні значення, отримані відповідно для різних інтервалів змінної циклу $i \in [1, P_{-1}(n)]$, …, $i \in [1, n]$, …, $i \in [1, P_{+1}(n)]$. Формально цей інтервал можна записати у вигляді

$$[\min(Rfor(P_{-1}(n)),...,Rfor(P_{+1}(n))), \max(Rfor(P_{-1}(n)),...,Rfor(P_{+1}(n)))], \tag{13}$$

де через $Rfor(n)$ позначено результат роботи оператора *for (int i=1; i<=n; i++)*.

У цьому випадку значення функції належності визначаються відповідними величинами функції належності числових елементів нечіткої величини n.

Нарешті, даний підхід надає можливість створення засобів обробки слабоформалізованої інформації, визначає спосіб пошуку кортежів нечіткого відношення нечіткої бази даних за кількісними атрибутами, який базується на реалізації SQL-запитів спеціального вигляду до нечітких даних [6, 7].

Отже, запропоновані результати дослідження дозволили обґрунтувати методику застосування трикутних нечітких чисел у вигляді інтервалів, межі яких вибираються з елементів спеціальних послідовностей простих чисел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 2005. – 21(2). – P.243–268.
2. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inf. Contr. – 1965. – 8. – P. 338–353.

3. Dehghan M., Hashemi B. Iterative solution of fuzzy linear systems// Appl. Math. Comput., 2006. – 175. – P.645–674.
4. Івохін Є. В. Про застосування спеціальних множин простих чисел для визначення міри належності нечітких множин / Є. В. Івохін // Журнал обчислювальної та прикл. математики. – №4. – 2013. – С.87–94.
5. Яншин В. В. Обработка изображений на языке С для IBM PC / В. В. Яншин, Г. А. Калинин – М.: Мир, 1994. – 241 с.
6. Івохін Є. В. Про підхід до реалізації нечітких баз даних / Є. В. Івохін, К. О.Косинський // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 2. – С. 83–87.
7. Івохін Є. В. Про реалізацію кількісних запитів в нечітких базах даних / Є. В. Івохін, Д. О.Вадньов // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. – Вип. 2. – С. 93–96.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.15

Ивохин Е. В., д-р физ.-мат. наук, проф.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В статье предложен конструктивный подход для представления величины меры принадлежности нечетких треугольных целых чисел, в основу которого положена идея использования последовательности простых чисел специального вида. Предложена формализация операций над нечеткими числами, приведен ряд практических примеров, в которых применяется разработанная технология. Предложенный подход может быть использован при решении разных задач поддержки принятия решений в условиях неопределенности.

Ключевые слова: *нечеткие множества и числа, простые числа, треугольные нечеткие числа, функция пренадлежности.*

Ivokhin E. V., Dr. Sci., prof.,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

A SIMPLE NUMBERS USING FOR INTERVAL DETERMINATION OF FUZZY TRIANGULAR INTEGERS

The article suggests a constructive approach to represent the values of the measures of fuzzy trsangular integers, which is based on the idea of using a sequence of prime numbers of a special form. A formalization of operations on fuzzy numbers is proposed, some practical examples thet use the the developed technology are given. The proposed approach can be used in solving various problems of decision-making support under uncertainty.

Key words: *fuzzy sets and numbers, simple numbers, simple numbers, triangle fuzzy numbers, membership function.*

УДК 519.925.51

В. Р. Кулян, канд. техн. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
О. О. Юнькова, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ

МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ДИВЕРСИФІКАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ ІНВЕСТИЦІЙ

Розглядається проблема дослідження оптимальної структури портфеля інвестицій. Для розроблених математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій сформульовано задачі оптимального керування структурою таких інвестицій. Досліджено властивості та особливості застосування динамічних моделей, побудованих у класі систем звичайних диференціальних рівнянь, на прикладі нових задач оптимального інвестування у цінні папери. Розглянуто широкий спектр прикладних задач, пов'язаних з оптимізацією інвестиційних операцій з цінними паперами.

Ключові слова: математичне моделювання, оптимальне керування, портфель інвестицій

Як показано в роботах [1] та [2], математичні моделі формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій у загальному вигляді можуть бути записані так

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_{i_0},\ t \in [t_0, T],\ \ i = \overline{1,n} \tag{1}$$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t) \tag{2}$$

відповідно, та є заданими параметрично. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

Розглянемо для таких моделей нові прикладні задачі портфельного інвестування.

Задача 1.

Дано: математична модель динаміки формування ринкової вартості інвестиційного портфеля (2); бажаний рівень прибутковості портфеля у момент часу T $r_p(T) = r_{p_T}$; часовий інтервал $t \in [t_0, T]$; обмеження на керування у кожен момент часу $x(t) \in U(t)$; критерій якості

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{T} (r_p(t) - r_p(T))^2 dt + \Phi(r_p(t_0)) \to \min_{x(t) \in U(t)} .$$

тут $\Phi(r_p(t_0))$ – задана функція.

Необхідно: визначити $x(t_0)$ та, відповідно, $r_p(t_0)$.

При цьому нагадаємо, що вектор x описує частки акцій різних видів у портфелі і є таким $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Тут n – кількість видів акцій у інвестиційному портфелі.