3. Dehghan M., Hashemi B. Iterative solution of fuzzy linear systems// Appl. Math. Comput., 2006. – 175. – P.645–674.
4. Івохін Є. В. Про застосування спеціальних множин простих чисел для визначення міри належності нечітких множин / Є. В. Івохін // Журнал обчислювальної та прикл. математики. – №4. – 2013. – С.87–94.
5. Яншин В. В. Обработка изображений на языке С для IBM PC / В. В. Яншин, Г. А. Калинин – М.: Мир, 1994. – 241 с.
6. Івохін Є. В. Про підхід до реалізації нечітких баз даних / Є. В. Івохін, К. О.Косинський // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 2. – С. 83–87.
7. Івохін Є. В. Про реалізацію кількісних запитів в нечітких базах даних / Є. В. Івохін, Д. О.Вадньов // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. – Вип. 2. – С. 93–96.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.15

Ивохин Е. В., д-р физ.-мат. наук, проф.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В статье предложен конструктивный подход для представления величины меры принадлежности нечетких треугольных целых чисел, в основу которого положена идея использования последовательности простых чисел специального вида. Предложена формализация операций над нечеткими числами, приведен ряд практических примеров, в которых применяется разработанная технология. Предложенный подход может быть использован при решении разных задач поддержки принятия решений в условиях неопределенности.

Ключевые слова: *нечеткие множества и числа, простые числа, треугольные нечеткие числа, функция пренадлежности.*

Ivokhin E. V., Dr. Sci., prof.,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

A SIMPLE NUMBERS USING FOR INTERVAL DETERMINATION OF FUZZY TRIANGULAR INTEGERS

The article suggests a constructive approach to represent the values of the measures of fuzzy trsangular integers, which is based on the idea of using a sequence of prime numbers of a special form. A formalization of operations on fuzzy numbers is proposed, some practical examples thet use the the developed technology are given. The proposed approach can be used in solving various problems of decision-making support under uncertainty.

Key words: *fuzzy sets and numbers, simple numbers, simple numbers, triangle fuzzy numbers, membership function.*

УДК 519.925.51

В. Р. Кулян, канд. техн. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
О. О. Юнькова, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ

МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ДИВЕРСИФІКАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ ІНВЕСТИЦІЙ

Розглядається проблема дослідження оптимальної структури портфеля інвестицій. Для розроблених математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій сформульовано задачі оптимального керування структурою таких інвестицій. Досліджено властивості та особливості застосування динамічних моделей, побудованих у класі систем звичайних диференціальних рівнянь, на прикладі нових задач оптимального інвестування у цінні папери. Розглянуто широкий спектр прикладних задач, пов'язаних з оптимізацією інвестиційних операцій з цінними паперами.

Ключові слова: математичне моделювання, оптимальне керування, портфель інвестицій

Як показано в роботах [1] та [2], математичні моделі формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій у загальному вигляді можуть бути записані так

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_{i_0},\ t \in [t_0, T],\ \ i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t) \qquad (2)$$

відповідно, та є заданими параметрично. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

Розглянемо для таких моделей нові прикладні задачі портфельного інвестування.

Задача 1.

Дано: математична модель динаміки формування ринкової вартості інвестиційного портфеля (2); бажаний рівень прибутковості портфеля у момент часу T $\ r_p(T) = r_{p_T}$; часовий інтервал $t \in [t_0, T]$; обмеження на керування у кожен момент часу $x(t) \in U(t)$; критерій якості

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{T} (r_p(t) - r_p(T))^2 dt + \Phi(r_p(t_0)) \to \min_{x(t)\in U(t)} .$$

тут $\Phi(r_p(t_0))$ – задана функція.

Необхідно: визначити $x(t_0)$ та, відповідно, $r_p(t_0)$.

При цьому нагадаємо, що вектор x описує частки акцій різних видів у портфелі і є таким $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Тут n – кількість видів акцій у інвестиційному портфелі.

Для розв'язання поставленої вище задачі як задачі оптимального керування із одним закріпленим кінцем траєкторії та фіксованим часом застосуємо принцип максимуму. В результаті отримаємо можливість визначити $x(t_0)$ і на його основі $r_p(t_0)$. Функція Гамільтона матиме вигляд

$$H(r_p(t),\psi(t),t,x(t)) = -(r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i) .$$

Необхідна умова її оптимальності за керуванням є такою

$$\frac{\partial(-(r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i))}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Розв'язком рівняння (3) є функція керувань інвестиційним портфелем $x^*(\psi(t), r_p(t), t)$. Побудуємо спряжену систему у вигляді

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(r_p(t),\psi(t),t,x(t))}{\partial r_p},$$

$$\dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r_p(T)) + \psi(t) * f'_{r_p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i) .$$

Сформуємо умову трансверсальності на лівому кінці траєкторії

$$\psi(t_0) = -\frac{\partial \Phi(r_p(t_0))}{\partial r_p}.$$

Крайова задача принципу максимуму матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r_p(T)) + \psi(t) * f'_{r_p}((r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i) \\ \dot{r}_p(t) = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}) \end{cases}$$

при умовах $\psi(t_0) = \psi_0, \quad r_p(T) = r_{p_T}$.

Аналізуючи математичну модель динаміки формування ринкової вартості однієї акції, видно, що права частина рівнянь залежить від параметрів $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, де A – замкнута обмежена множина параметрів моделі.

Сформулюємо додаткові рівняння для коректної постановки задачі

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \psi(t) \frac{\partial f_i(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i)}{\partial \alpha_j} dt = 0 , \; j = 1,2.$$

Скористаємось твердженнями теореми про оптимальність керування для задачі з одним закріпленим кінцем траєкторії та фіксованим часом. Розв'язавши побудовану систему звичайних диференціальних рівнянь, визначимо функції $r_p(t)$, $\psi(t)$, які, будучи підставленими у розв'язок $x^*(\psi(t), r_p(t), t)$, дадуть можливість визначити структуру оптимального інвестиційного портфеля на вибраному інтервалі часу.

Аналіз описаного вище алгоритму дає можливість відмітити деякі недоліки, найбільш важливими із яких є параметрично задана цільова функція та суттєві обмеження на функцію керувань.

Математична процедура диверсифікації портфеля інвестицій дає можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачу вибору початкового портфеля інвестицій при відомому значенні його очікуваної прибутковості на обраний у майбутньому момент часу.

Задача 2.

Дано: математична модель динаміки формування ринкової вартості інвестиційного портфеля (2); прибутковість портфеля у початковий момент часу $r_p(t_0) = r_{p_0}$; бажаний рівень прибутковості портфеля у момент часу T $r_p(T) = r_{p_T}$; часовий інтервал $t \in [t_0, T]$; обмеження на керування у кожен момент часу $x(t) \in X(t)$; критерій якості

$$J(x(T)) = r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) . \tag{4}$$

Необхідно: визначити оптимальні $x(t_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Сформульовану постановку можна розглянути як задачу оптимального керування із двома закріпленими кінцями траєкторії та фіксованим часом при обмеженнях на функцію керувань.

Для її розв'язання, як і для задачі з одним закріпленим кінцем траєкторії та фіксованим часом, можна застосувати процедуру принципу максимуму. При цьому слід звернути увагу на параметричне представлення математичної моделі динамічного формування ринкової вартості однієї акції. Тому, як і раніше, додаємо умову

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \psi_i(t) \frac{\partial f_i(r_p, x_i, \dot{x}_i, \dot{r}_i)}{\partial \alpha_j} dt = 0 , \; j = 1,2.$$

Задача 3.

Як задача оптимального керування з фіксованим часом, закріпленим лівим кінцем та вільним правим кінцем траєкторії розглядається у розумінні максимуму функціонала

$$J = \sum_i x_i(T) r_i(T) , \tag{5}$$

де $x_i(t)$ – задані величини, які характеризують структуру портфеля. Варіюючи такими частками протягом вибраного інтервалу часу, будемо розв'язувати задачу оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля або з точки зору формального математичного моделювання, або як задачу оптимального керування складовими портфеля акцій.

Математичну модель портфеля акцій, як і раніше, розглянемо у вигляді

$$\frac{dr_p}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}\right), \; i \neq j. \tag{6}$$

Граничну умову, що характеризує ринкову вартість портфеля акцій у початковий t_0 момент часу сформулюємо у вигляді

$$r_p(t_0) = r_{p0}. \tag{7}$$

У задачі оптимального керування (5), (6), (7) за змінну фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій r_p.

Можемо припустити, що застосовуючи "наївну політику" інвестування для заданого інтервалу часу ці величини є постійними. Таким чином, необхідно побудувати оптимальний процес, що починається у заданій точці x_0 для моменту часу t_0 і надає функціоналу (14) оптимального значення.

$$J = \sum_i x_i r_i(T) = \sum_i x_i (r_i(T) - r_i(t_0)) + \sum_i x_i r_i(t_0) = \sum_i x_i \int_{t_0}^{T} f_i(r(t), x(t))dt + const = \int_{t_0}^{T} \sum_i x_i f_i(r(t), x(t))dt + const.$$

Із наведеного вище слідує, що $J = I + const$, де I – функціонал в задачі принципу максимуму.

Тому розв'язок даної задачі безпосередньо слідує із відповідної теореми про оптимальність розв'язку задачі оптимального керування із закріпленим часом [2]. Можна показати також, що, як і в задачі 1, побудова відповідних множин досяжності для моменту $t_1 \in [t_0, T]$ може бути зведена до розв'язання серії задач мінімізації функціонала $J = (x, r_p(T))$. Варіюючи складовими вектора x і, розв'язуючи відповідні задачі оптимального керування для різних значень x, отримаємо точки границі множини досяжності і опорні гіперплощини у цих точках.

У розвиток розглянутої математичної моделі та формулювання для неї задачі оптимального керування можна побудувати послідовність оптимальних на інтервалах часу керувань, яка б враховувала можливості оптимальної диверсифікації портфеля акцій у фіксовані моменти часу.

Зважаючи на властивості математичної моделі (2), а саме на те, що задана вона у параметричному вигляді, розглянемо ще одну задачу оптимального керування портфелем інвестицій із закріпленим одним кінцем траєкторії та фіксованим часом у такому вигляді

$$\frac{dr_p(t,\alpha)}{dt} = f(r_p(t), x(t), \alpha, t), \tag{8}$$

$$r_p(t_0) = r_{p0},$$

$t_0 \le t \le T$, $x(t) \in U$, де U – множина допустимих керувань; $\alpha \in A$ – вектор параметрів моделі. Для параметрично заданої математичної моделі (2) сформулюємо оптимізаційну задачу з таким критерієм якості

$$I(x(t),t) = \min_{x(t)\in U(t)} \left(\int_{t_0}^{T} f^0(r_p(t), x(t), \alpha, t)dt + \Phi(r_p(T)\right).$$

Вважаємо, що функція $\Phi(r_p(T))$ – відома. Тут моменти часу t_0, T – задані; $x = (x_1, ..., x_n)$, $f^0 = (f_1^0, ..., f_n^0)$; керування $u_i(t)$ є кусково-неперервними функціями на заданому відрізку; $f_i(x, r_p, \alpha, t)$ та $\Phi(r_p(T))$ – задані функції; параметр $\alpha \in A$, де A – обмежена замкнута множина. Таким чином, переходимо до розв'язання задачі

$$x^0 = \arg\min_{x\in U} \max_{\alpha\in A} I(x, r_p, \alpha),$$

де символом x^0 позначено оптимальне керування.

На цьому етапі формулювання ітераційної оптимізаційної процедури задамо деяке початкове значення $x_0 \in U$, тоді відповідне значення параметрів моделі α_0 знайдемо як розв'язок задачі

$$\alpha_0 = \arg\max_{\alpha\in A} I(x_0, \alpha).$$

Відповідно на k – тому кроці процедури отримаємо

$$\alpha_k = \arg\max_{\alpha\in A} I(x_k, \alpha).$$

Згідно принципу максимуму, умова доповнюючої нежорсткості має вигляд

$$\phi(T) = -\nabla_{r_p} \Phi(r_p(T, r_p(T))), \tag{9}$$

де символом $\nabla_{r_p}\Phi$ позначено градієнт функції Φ за змінною r_p. Парі $(r_p(t), x(t))$ поставимо у відповідність систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = -\nabla_{r_p} f(x(t), r_p(t), t)^* \phi(t) + \nabla_{r_p} f^0(x(t), r_p(t), \alpha, t), \qquad i = \overline{1,n}.$$

Ця система лінійна і однорідна, тому при довільних початкових умовах для ϕ вона допускає єдиний розв'язок, визначений на всьому інтервалі часу, для якого побудуємо керування $x(t)$ та відповідну фазову траєкторію $r_p(t)$. Значення $\phi(T)$ для деякого крокового множника h та довільного моменту часу t такого, що $t_0 < t \le T$, можемо визначити

$$\phi(t-h) = \phi(t) + h\nabla_{r_p} f(x(t), r_p(t), \alpha, t)^* \phi(t) - h\nabla_{r_p} f^0(x(t), r_p(t), \alpha, t).$$

Повторюючи наведену вище процедуру визначимо $\phi(t_0)$. Таким чином, маємо можливість сформулювати задачу Коші для $\phi(t)$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\nabla_{r_p} f(x(t), r_p(t), \alpha, t)^* \phi(t) + \nabla_{r_p} f^0(x(t), r_p(t), \alpha, t), \quad \phi(t_0) = \phi_0,$$

і, підставивши знайдене значення функції $\phi(t)$ в рівняння моделі, знайдемо оптимальний розв'язок $x^o(t)$, такий, що

$$x^0 = \arg\max_{x\in U}((\phi^k(t), f_{r_p}(x, r_{p_k}, \alpha_k, t)) - f^0_{r_p}(x, r_{p_k}, \alpha_k, t)).$$

Скориставшись цим розв'язком, перейдемо до розв'язання траєкторної задачі

$$\dot{r}^0_p(t) = f(x(t), r_p(t), t),$$
$$r_p(t_0) = r_{p0}.$$

Умову зупинки процедури побудови оптимального керування сформулюємо, використавши $\Phi(x(T))$

$$\left\|\phi_k(T) - \nabla_x(\Phi(x_k(T))\right\| < \varepsilon, \tag{10}$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке наперед задане число, яке задається в залежності від умов функціонування системи і характеризує відхилення розрахункової траєкторії $r_{p_k}(t)$, отриманої при керуванні $x_k(t)$, від умови на правому кінці.

За умови невиконання нерівності (19) завершимо пошук оптимальних значень параметрів математичної моделі (2), інакше – визначимо

$$\phi_{k+1}(T) = [\nabla_{r_p}\Phi(r^o_p(T), u^0) - \phi_k(T)]h + \phi_k(T),$$

і повторимо цикл операцій з формування нового керування $x_k(t)$ та траєкторії фазових змінних $r_{p_k}(t)$.

Задача 4.

Актуальною постановкою задачі про оптимальне інвестування може бути формулювання, що використовує "програмну траєкторію". Така траєкторія, з огляду на властивості прикладної задачі, може бути побудована дослідником і змістом її буде бажаний рівень очікуваної прибутковості інвестиційного портфеля у кожен момент часу на обраному інтервалі. Позначимо її $r^*(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Формально постановка задачі може бути такою: для математичної моделі (2), за умов

$$r_p(t_0) = r_{p_0},\ r_p(T) = r_{p_T},\ t \in [t_0, T] \tag{11}$$

та критерію якості

$$J(r_p(t), t) = \int_{t_0}^{T} (r_p(t) - r^*(t))^2 dt \tag{12}$$

визначити функцію $r_p(t)$, яка на заданому інтервалі часу надає оптимального значення критерію якості (21) та задовольняє наведені умови.

Для розв'язання задачі (2), (11), (12) як задачі оптимального керування із двома закріпленими кінцями траєкторії та фіксованим часом, застосуємо процедуру принципу максимуму. Побудуємо функцію Гамільтона

$$H(\psi(t), t, u(t)) = -(r_p(t) - r^*(t))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i).$$

$$\frac{\partial(-(r_p(t) - r^*(t))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i))}{\partial r_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Нехай розв'язком рівняння (13) є функція керувань інвестиційним портфелем $x^*(t)$. Побудуємо спряжену систему у вигляді

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(r_p(t), \psi(t), t)}{\partial r_p}.$$

Крайова задача принципу максимуму матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r^*(t)) + \psi(t) * f'_{r_p}((r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}) \\ \dot{r}_p(t) = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}) \end{cases}$$

при умовах $r_p(t_0) = r_{p_0}$, $r_p(T) = r_{p_T}$.

Скористаємось твердженнями теореми про оптимальність керування для задачі з двома закріпленими кінцями траєкторії та фіксованим часом.

Розв'язавши побудовану систему звичайних диференціальних рівнянь, визначимо функції $r_p(t)$, $\psi(t)$, які, будучи підставленими у розв'язок рівняння (2), дадуть можливість визначити структуру оптимального інвестиційного портфеля на вибраному інтервалі часу.

Важливо відмітити, що у даній постановці задачі необхідно у кожен момент часу враховувати обмеження $r_p(t) \in R_p(t)$, де $R_p(t)$ – обмежена замкнута множина допустимих портфелів.

Висновки. Наведені математичні процедури дають можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачі оптимального управління інвестиціями і на основі розроблених алгоритмів визначити допустимі множини траєкторій динаміки ринкової вартості однієї акції для математичної моделі (1) та розв'язати задачу оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів на основі моделі (2).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гаращенко Ф. Г., Кулян В. Р., Рутицкая В. В. Моделирование и анализ динамики инвестиций. // Проблемы управления и информатики. – 2001. – № 6. – С.109–119.

2. Гаращенко Ф. Г., Кулян В. Р., Рутицька В. В. Застосування методів практичної стійкості для розв'язування задач інвестиційного менеджменту. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – Випуск 3. – 2005р. – С.232–239.

3. Fedir G. Garashchenko, Viktor R. Kulian, Vladislava V. Rutitskaya Modelling and Analysis of Investment Trends. // Journal of Automation and Information. – New York, Connecticut – 2011. – v. 43, issue 12, – P.48–58.
4. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука, 1988. – С. 320.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.15

Кулян В. Р., канд. техн. наук, доц.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,
Юнькова Е. А., канд. физ.-мат. наук, доц.,
Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана, Киев

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТИЦИЙ

Рассматривается проблема исследования оптимальной структуры портфеля инвестиций. Для построенных математических моделей формирования рыночной стоимости одной акции и портфеля акций сформулировано задачи оптимального управления структурой таких инвестиций. Исследованы свойства и особенности использования динамических моделей, построенных в классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений, на примере новых задач оптимального инвестирования в ценные бумаги. Рассмотрен широкий спектр прикладных задач, связанных с оптимизацией инвестиционных операций с ценными бумагами.

Ключевые слова: *математическое моделирование, оптимальное управление, портфель инвестиций*

Kulian V. R., Ph.D.
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Iunkova O. O., Ph.D. in Math
Vadim Getman National Ekonomy University of Kyiv

METHODS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM IN THE DIVERSIFICATION OF THE PORTFOLIO

The problem of the optimal structure of the portfolio is researched. To construct a mathematical model of the market value of one share and the share portfolio is formulated as optimal control problem of such investments. The properties and characteristics of the dynamic models, constructed in the class of ordinary differential equations, on the example of the new problems of optimal investment in securities are reviewed.

Key words: *Mathematical modeling, optimal control, investment portfolio*

УДК 519.87

М. Ф. Махно, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ГІБРИДНУ МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ПРОЦЕСУ ОБРОБКИ СУКУПНОСТІ ЗАВДАНЬ

В статті розглянуто та розв'язано задачу формалізації процесу обліку ресурсів обчислювального пристрою при обробці сукупності завдань у вигляді гібридної моделі з функціональних та диференціальних рівнянь. Отримано твердження про вигляд фундаментальної матриці розв'язків моделі. Проведено тестування її роботи для заданого способу обліку ресурсів.

Ключові слова: гібридна модель, динаміка процесів, послідовність задач, фундаментальна матриця, задача Коші.

Одним із стандартних підходів, що використовуються при моделюванні динамічних систем, є опис еволюції станів системи шляхом задання початкових значень координат системи та рівнянь, які визначають зміну координат з часом. Складна динамічна система, як правило, представляє собою сукупність підсистем, для кожної з яких можлива власна математична формалізація. Традиційно система називається гібридною, якщо її підсистеми описуються різними типами моделей.

З іншої сторони, вивчення процесів керування складними системами зумовлює появу поняття ієрархічної структури взаємодії окремих складових (підсистем) системи та привело до формулювання специфічних для такого підходу математичних та інженерних проблем [1].

Однією з характерних особливостей складних ієрархічних систем є наявність у кожної підсистеми власної задачі керування. У даному випадку для керування процесами на рівні підсистем послідовно розв'язуються три основні задачі: отримання даних про об'єкт, аналіз структури й визначення процесів керування, а також використання результатів дослідження для оптимізації функціонування підсистем. Однак наявність у підсистем стратегій самоорганізації часто приводить до виникнення конфліктів в їх діях. Це, як правило, пов'язано з антагоністичністю критеріїв функціонування підсистем, що, у свою чергу, приводить до необхідності вирішення проблем узгодження їх діяльності.

Досить часто [2] розв'язування задач управління в складних ієрархічних системах здійснюють на прикладі дворівневих систем, що складаються з однієї підсистеми верхнього рівня та скінченної кількості (*M*) підсистем ниж-нього. Такий підхід можна пояснити відносною простотою аналізу функціонування дворівневих ієрархічних систем і відповідністю більшості реальних систем дворівневій моделі взаємодії окремих їх складових.

Аналізу ієрархічних систем керування та дослідженню процесів взаємодії окремих підсистем присвячено багато наукових робіт [1, 3, 4, 5]. Докладно вивчено проблеми керування та координації процесів функціонування в таких системах. При цьому важливим залишається аналіз задач самоорганізації підсистем і впливу антагоністичних факторів їх діяльності на функціонування системи в цілому.

У даній роботі розглядається гібридна динамічна система, яка описує процес обробки довільної кількості задач (не більше заданого *N*), які надходять на виконання на обчислювальний пристрій (процесор).

Припустимо, що задачі, які мають виконуватися, характеризуються поняттям складності, яку можна оцінити за обсягом необхідних для виконання ресурсів. Відповідно до цього обчислювальний пристрій виділяє необхідний об-