3. Fedir G. Garashchenko, Viktor R. Kulian, Vladislava V. Rutitskaya Modelling and Analysis of Investment Trends. // Journal of Automation and Information. – New York, Connecticut – 2011. – v. 43, issue 12, – P.48–58.
4. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука, 1988. – С. 320.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.15

Кулян В. Р., канд. техн. наук, доц.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,
Юнькова Е. А., канд. физ.-мат. наук, доц.,
Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана, Киев

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТИЦИЙ

Рассматривается проблема исследования оптимальной структуры портфеля инвестиций. Для построенных математических моделей формирования рыночной стоимости одной акции и портфеля акций сформулировано задачи оптимального управления структурой таких инвестиций. Исследованы свойства и особенности использования динамических моделей, построенных в классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений, на примере новых задач оптимального инвестирования в ценные бумаги. Рассмотрен широкий спектр прикладных задач, связанных с оптимизацией инвестиционных операций с ценными бумагами.

Ключевые слова: *математическое моделирование, оптимальное управление, портфель инвестиций*

Kulian V. R., Ph.D.
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Iunkova O. O., Ph.D. in Math
Vadim Getman National Ekonomy University of Kyiv

METHODS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM IN THE DIVERSIFICATION OF THE PORTFOLIO

The problem of the optimal structure of the portfolio is researched. To construct a mathematical model of the market value of one share and the share portfolio is formulated as optimal control problem of such investments. The properties and characteristics of the dynamic models, constructed in the class of ordinary differential equations, on the example of the new problems of optimal investment in securities are reviewed.

Key words: *Mathematical modeling, optimal control, investment portfolio*

УДК 519.87

М. Ф. Махно, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ГІБРИДНУ МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ПРОЦЕСУ ОБРОБКИ СУКУПНОСТІ ЗАВДАНЬ

В статті розглянуто та розв'язано задачу формалізації процесу обліку ресурсів обчислювального пристрою при обробці сукупності завдань у вигляді гібридної моделі з функціональних та диференціальних рівнянь. Отримано твердження про вигляд фундаментальної матриці розв'язків моделі. Проведено тестування її роботи для заданого способу обліку ресурсів.

Ключові слова: гібридна модель, динаміка процесів, послідовність задач, фундаментальна матриця, задача Коші.

Одним із стандартних підходів, що використовуються при моделюванні динамічних систем, є опис еволюції станів системи шляхом задання початкових значень координат системи та рівнянь, які визначають зміну координат з часом. Складна динамічна система, як правило, представляє собою сукупність підсистем, для кожної з яких можлива власна математична формалізація. Традиційно система називається гібридною, якщо її підсистеми описуються різними типами моделей.

З іншої сторони, вивчення процесів керування складними системами зумовлює появу поняття ієрархічної структури взаємодії окремих складових (підсистем) системи та привело до формулювання специфічних для такого підходу математичних та інженерних проблем [1].

Однією з характерних особливостей складних ієрархічних систем є наявність у кожної підсистеми власної задачі керування. У даному випадку для керування процесами на рівні підсистем послідовно розв'язуються три основні задачі: отримання даних про об'єкт, аналіз структури й визначення процесів керування, а також використання результатів дослідження для оптимізації функціонування підсистем. Однак наявність у підсистем стратегій самоорганізації часто приводить до виникнення конфліктів в їх діях. Це, як правило, пов'язано з антагоністичністю критеріїв функціонування підсистем, що, у свою чергу, приводить до необхідності вирішення проблем узгодження їх діяльності.

Досить часто [2] розв'язування задач управління в складних ієрархічних системах здійснюють на прикладі дворівневих систем, що складаються з однієї підсистеми верхнього рівня та скінченної кількості (M) підсистем ниж-нього. Такий підхід можна пояснити відносною простотою аналізу функціонування дворівневих ієрархічних систем і відповідністю більшості реальних систем дворівневій моделі взаємодії окремих їх складових.

Аналізу ієрархічних систем керування та дослідженню процесів взаємодії окремих підсистем присвячено багато наукових робіт [1, 3, 4, 5]. Докладно вивчено проблеми керування та координації процесів функціонування в таких системах. При цьому важливим залишається аналіз задач самоорганізації підсистем і впливу антагоністичних факторів їх діяльності на функціонування системи в цілому.

У даній роботі розглядається гібридна динамічна система, яка описує процес обробки довільної кількості задач (не більше заданого N), які надходять на виконання на обчислювальний пристрій (процесор).

Припустимо, що задачі, які мають виконуватися, характеризуються поняттям складності, яку можна оцінити за обсягом необхідних для виконання ресурсів. Відповідно до цього обчислювальний пристрій виділяє необхідний обсяг ресурсів пропорційно складності кожної задачі, що виконується в даний момент. Обробка задачі у часі приводить до зменшення складності завдання зі швидкістю, обернено пропорційною загальній складності усіх задач.

Опис стану обчислювального пристрою може бути здійснений на основі підходу, що розглядається для моделювання процесів у нейронах. Роботу процесора опишемо за допомогою моделі функціонування нейроподібного елементу, що має n входів і один вихід. Стан елемента подається скалярною величиною завантаженості $u(t)$, яка називається потенціалом (величину $u(t)$ можна інтерпретувати як усереднене за часом значення завантаженості обчислювального пристрою [6]).

Позначимо через $x_i(t)$ – величину складності i-ї задачі у момент часу t, $i=1,2,...,N$; $w(t)=(w_1(t),...,w_N(t))$ – вектор булівських компонент, одиничне значення яких ($w_i(t)=1$) визначає обслуговування, а нульове ($w_i(t)=0$) – не обслуговування i-ї задачі у момент часу t, $i=1,2,...,N$; $b(t)$ – сумарну величину складності задач у момент часу t. Розглянемо процес функціонування обчислювального пристрою на інтервалі $[t_0,T]$, де T – довільне додатне число.

Потенціал процесора зростає за часом пропорційно зваженій сумі $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i(t)x_i(t)$ поточних рівнів складності задач $x_i(t)$, $i=1,2,...,N$. Поява кожної нової задачі та завершення виконання задач визначають дискретні моменти часу t_0^i і t_E^i, $i=1,2,...,N$, відповідно. Для всіх проміжків $T_i=t_E^i-t_0^i$, $i=1,2,...,N$, можна знайти найбільше спільне кратне Δt, таке, що $t_E^i=t_0^i+k_i\Delta t$, $k_i\in \mathrm{N}$, $i=1,2,...,N$. Без обмеження загальності, можна вважати, що $t_0=0$ і $\Delta t=1$.

Інтервал роботи кожної задачі $t\in[t_0^i,t_0^i+k_i\Delta t]$, $i=1,2,...,N$, в межах якого процесор здійснює виконання задачі, розглядається у вигляді суми проміжних часових інтервалів $[t_0^i+k_j^i\Delta t, t_0^i+k_{j+1}^i\Delta t]$, $j=0,1,2,...,r_i$, $i=1,2,...,N$, $k_j^i\in \mathrm{N}\cup\{0\}$, $k_0^i=0$, $\sum_{j=0}^{r_i+1}k_j^i=k_i$. Це розбиття необхідне, тому що в межах кожного інтервалу виконання i-ї задачі відбуваються події, зв'язані з появою та завершенням інших задач. Зрозуміло, що якщо на інтервалі роботи i-ї задачі $[t_0^i,t_0^i+k_i\Delta t]$, $i=1,2,...,N$, жодних інших подій не спостерігається, то $r_i=0$ і відповідно маємо $k_0^i=0$ та $k_1^i=k_i$.

Зміна сумарної величини складності задач $b(t)$, що виконуються у момент часу t, також пов'язана з моментами появи і завершення задач. Відповідно до запропонованих припущень щодо часової дискретизації визначаються моменти часу $t_k=k\Delta t=k$, $k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$, в які відбувається зміна величини $b(t)$. Нескладно перевірити, що

$$b(t_{k+1})=b(t_k)+\sum_{\substack{i=1\\ w_i(t_{k+1})>w_i(t_k)}}^{N}2^{i-1}-\sum_{\substack{i=1\\ w_i(t_{k+1})<w_i(t_k)}}^{N}2^{i-1},\ b(t_0)=b(0)=0, \tag{1}$$

і на кожному проміжку $[t_k,t_{k+1})$ величина $b(t)\equiv const$. Крім цього, послідовність $t_k=k$, $k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$ повністю визначає моменти подій, що відбуваються в системі і описуються за допомогою розглянутих вище значень $t_0^i+k_j^i\Delta t$, $j=0,1,2,...,r_i$, $i=1,2,...,N$, $k_j^i\in \mathrm{N}\cup\{0\}$, $k_0^i=0$, $\sum_{j=0}^{r_i+1}k_j^i=k_i$.

Таким чином, гібридна динамічна система, яка використовується для моделювання процесу обробки заданої кількості задач за допомогою обчислювального пристрою, складається з однієї лінійної функціональної підсистеми (1) та *N+1* лінійної диференціальної підсистеми, які записуються у вигляді

$$\dot{x}_i(t)=-\tfrac{1}{b(t)}x_i(t),\ x_i(t_0^i)=x_0^i,\ i=1,2,...,N, \tag{2}$$

$$t\in[t_0^i+k_j^i\Delta t, t_0^i+k_{j+1}^i\Delta t],\ j=0,1,2,...,r_i,\ i=1,2,...,N,\ k_j^i\in \mathrm{N}\cup\{0\},\ \sum_{j=0}^{r_i+1}k_j^i=k_i,$$

$$\dot{u}(t)=-u(t)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w_i(t)x_i(t),\ u(t_0)=u(0)=0,\ t\in[t_0,T], \tag{3}$$

$$b(t)=b(t-1)+\sum_{\substack{i=1\\ w_i(t)>w_i(t-1)}}^{N}2^{i-1}-\sum_{\substack{i=1\\ w_i(t)<w_i(t-1)}}^{N}2^{i-1},\ b(0)=0,\ t=k,\ k\in \mathrm{N}\cup\{0\}, \tag{4}$$

$$w_i(t)=\begin{cases}0\\1\end{cases},\ i=1,2,...,N,\ t=k,\ k\in \mathrm{N}\cup\{0\}, \tag{5}$$

де x_0^i – початкова складність i-ї задачі, що поступає на виконання процесору, $i=1,2,...,N$.

Зважаючи на різну складність завдань, будемо впорядковувати наявні на обробці завдання за спаданням складності. Це не впливає на вигляд моделі, а лише призводить до перенумерації задач і, відповідно, до перестановці елементів вектора $w(t)=(w_1(t),...,w_N(t))$ у моменти появи нових задач. При чому, якщо складність нової задачі дорівнює складності деяких поточних (наявних) задач, то формально вважаємо нову задачу більш складною (потребує деяких додаткових дій, не врахованих у моделі).

Відомо, що для лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\quad x(t)\in R^n,\ t\geq 0, \tag{6}$$

розв'язок задачі Коші може бути представлений у вигляді добутку фундаментальної матриці рішень, нормованої при $t=t_0=0$, на вектор, що визначає початковий стан

$$x(t) = e^{At}x_0 \,. \tag{7}$$

тут e^{At} матрична функція, що є матричним рядом, яка називається матричним експоненціалом [7].

Розглянемо узагальнену гібридну динамічну систему, складену зоднієї лінійної диференціальної стаціонарної підсистеми розмірності n та однієї лінійної функціональної підсистеми наступного вигляду

$$\dot{x}(t) = A(y([t]))x(t)\,, \quad x(t_0) = x(0) = x_0\,,\ t \ge 0\,, \tag{8}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + y(k-1)\,, \quad k = 0,1,2,... \tag{9}$$

У даній системі A-квадратна $(n \times n)$– матриця з постійними коефіцієнтами на кожному з інтервалів $t \in [k,k+1)$, $k = 0,1,2,...$, $x(t) \in R^n$, $t \ge 0$, $y(k) \in R^1$, $k = 0,1,2,...$, C – вектор з n елементів. Під розв'язком системи (8), (9) будемо розуміти вектор-функцію $(x_1(t),...,x_n(t),y(t))$, $t \ge 0$, що складається з векторної функції $x(t)$, яка є кусково неперервно-диференційовною та має розриви похідної у вузлових точках $t = k$, $k = 1,2,...$, і кусково-постійної функції $y(t)$, яка має зліва розриви першого роду у вузлових точках $t = k$, $k = 0,1,2,...$. Початкові умови для розв'язку системи (8), (9) мають вигляд

$$x(0) = x_0\,, \quad y(t) \equiv 0\,, \quad -1 \le t \le 0\,. \tag{10}$$

Отримаємо представлення фундаментальної матриці рішень системи (8), (9) і, відповідно, розв'язок задачі Коші (8), (9), (10).

Вектор x_0 початкових станів системи будемо записувати у вигляді $x^0(0)$, а розв'язок $(x(t),y(t)) = (x_1(t),...,x_n(t),y(t))$, визначений на проміжку $k \le t < k+1$, $k = 0,1,2,...$, – у вигляді $(x^k(t),y(k))$.

Лема 1. *Справедливе наступне співвідношення*

$$\int_{i-1}^{i} e^{A(1-s)}ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}\left[(2-i)^{k+1} - (1-i)^{k+1}\right]. \tag{11}$$

Причому, якщо матриця A невироджена, тобто існує A^{-1}, то

$$\int_{i-1}^{i} e^{A(1-s)}ds = A^{-1}\left[e^{A(i-2)} - e^{A(i-1)}\right]. \tag{12}$$

Доведення. Використовуючи вираз для матричного экспоненциала e^{At} [7], отримуємо наступне

$$\int_{i-1}^{i} e^{A(1-s)}ds = \int_{i-1}^{i}\left[I + A\frac{1-s}{1!} + A^2\frac{(1-s)^2}{2!} + ... + A^k\frac{(1-s)^k}{k!} + ...\right]ds =$$

$$= \left[-I\frac{1-s}{1!} - A\frac{(1-s)^2}{2!} - A^2\frac{(1-s)^3}{3!} - ... - A^k\frac{(1-s)^{k+1}}{(k+1)!} + ...\right]_{s=i-1}^{s=i} =$$

$$= \left[I\frac{2-i}{1!} + A\frac{(2-i)^2}{2!} + A^2\frac{(2-i)^3}{3!} + ... + A^k\frac{(2-i)^{k+1}}{(k+1)!} + ...\right] - \left[I\frac{1-i}{1!} + A\frac{(1-i)^2}{2!} + A^2\frac{(1-i)^3}{3!} + ... + A^k\frac{(1-i)^{k+1}}{(k+1)!} + ...\right].$$

Отже, маємо $\int_{i-1}^{i} e^{A(1-s)}ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}\left[(2-i)^{k+1} - (1-i)^{k+1}\right]$, звідки випливає справедливість співвідношення (11).

Припустимо, що матриця A невироджена, тобто існує A^{-1}. Тоді отриманувище залежність можна спростити наступним чином

$$\int_{i-1}^{i} e^{A(1-s)}ds = A^{-1}\left[I + A\frac{2-i}{1!} + A^2\frac{(2-i)^2}{2!} + ... + A^{k+1}\frac{(2-i)^{k+1}}{(k+1)!} + ... - I\right] -$$

$$-A^{-1}\left[I + A\frac{1-i}{1!} + A^2\frac{(1-i)^2}{2!} + ... + A^{k+1}\frac{(1-i)^{k+1}}{(k+1)!} + ... - I\right] = A^{-1}\left(e^{A(2-i)} - e^{A(1-i)}\right),$$

звідки слідує справедливість співвідношення (12).

Наслідок 1. *Справедливе співвідношення*

$$\int_{k-1}^{t} e^{A(t-k+1-s)}ds = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{(j+1)!}\left[t^{j+1} - (1-k)^{j+1}\right]. \tag{13}$$

Причому, якщо матриця A невироджена, тобто існує A^{-1}, то

$$\int_{k-1}^{t} e^{A(t-k+1-s)}ds = A^{-1}\left[e^{At} - e^{A(1-k)}\right]. \tag{14}$$

Доведення. Повторюючи викладення, наведені в лемі, отримаємо

$$\int_{k-1}^{t} e^{A(t-k+1-s)}ds = -\left(I\frac{t-k+1-s}{1!} + A\frac{(t-k+1-s)^2}{2!} + ... + A^j\frac{(t-k+1-s)^{j+1}}{(j+1)!} + ...\right)_{s=k-1}^{s=t} =$$

$$=\left[I\frac{t}{1!}+A\frac{t^2}{2!}+...+A^j\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}+...\right]-\left[I\frac{1-k}{1!}+A\frac{(1-k)^2}{2!}+...+A^j\frac{(1-k)^{j+1}}{(j+1)!}+...\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{(j+1)!}\left[t^{j+1}-(1-k)^{j+1}\right].$$

Якщо матриця A невироджена, то

$$\int_{k-1}^{t}e^{A(t-k+1-s)}ds=A^{-1}\left[I+A\frac{t}{1!}+A^2\frac{t^2}{2!}+...+A^{j+1}\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}+...-I\right]-$$

$$-A^{-1}\left[I+A\frac{1-k}{1!}+A^2\frac{(1-k)^2}{2!}+...+A^{j+1}\frac{(1-k)^{j+1}}{(j+1)!}+...-I\right]=A^{-1}\left[e^{At}-e^{A(1-k)}\right].$$

З використанням отриманих допоміжних результатів, знайдемо вигляд фундаментальної матриці рішень гібридної системи (8), (9).

Теорема 1. *На проміжку* $k\le t<k+1$ *фундаментальна матриця розв'язків гібридної системи* (8), (9) *має вигляд*

$$\Phi(t)=Z_k(t)Z(k), \tag{15}$$

$$Z_k(t)=\begin{bmatrix}e^{A(y(k))(t-k)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad k\le t<k+1, \tag{16}$$

$$Z(k)=\begin{pmatrix}\prod_{j=1}^{k}e^{A(y(k-j))} & 0\\ \sum_{j=1}^{k}C(k-j+1)\prod_{i=1}^{k+1-j}e^{A(y(k+1-j-i))} & 1\end{pmatrix},\ j=\overline{1,k}. \tag{17}$$

Доведення. Розглянемо перший проміжок $0\le t<1$ інтегрування системи (8), (9). Враховуючи, що $y(0)=0$, підсистема диференціальних рівнянь системи (8), (9) буде мати вигляд

$$\dot{x}^0(t)=A(y(0))x^0(t)=A(0)x^0(t),\quad 0\le t<1.$$

Розв'язок $x^0(t)$ підсистеми (8) на проміжку $0\le t<1$ має вигляд

$$x^0(t)=e^{A(y(0))t}x^0(0)=e^{A(0)t}x^0(0),$$

де e^{At} – матричний експоненціал $e^{At}=I+A\frac{t}{1!}+A^2\frac{t^2}{2!}+...+A^k\frac{t^k}{k!}+...$, а загальний розв'язок системи (8), (9) записується у вигляді

$$\begin{pmatrix}x^0(t)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{A(0)t}x^0(0)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Розглянемо другий проміжок $1\le t<2$ інтегрування системи (8), (9). У цьому випадку розв'язок функціональної підсистеми має вигляд $y(1)=C(1)x^1(1)+y(0)$.

Виходячи умови неперервності векторної функції $x(t)$ у вузловій точці $t=1$, маємо $x^1(1)=x^0(1)=e^{A(0)}x^0(0)$. Тоді розв'язок $y(1)$ запишеться у вигляді

$$y(1)=C(1)x^0(1)+y(0)=C(1)e^{A(0)}x^0(0)+y(0). \tag{19}$$

Повернемося до першої підсистеми. На проміжку $1\le t<2$ вона приймає вигляд

$$\dot{x}^1(t)=A(y(1))x^1(t),$$

розв'язок $x^1(t)$ якої записується у формі

$$x^1(t)=e^{A(y(1))(t-1)}x^1(1). \tag{20}$$

Враховуючи умови неперервності, отримуємо

$$x^1(t)=e^{A(y(1))(t-1)}x^1(1)=e^{A(y(1))(t-1)}x^0(1)=e^{A(y(1))(t-1)}e^{A(y(0))}x^0(0).$$

Продовжуючи цей процес далі, отримаємо, що на проміжку $k\le t<k+1$ розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix}x^k(t)\\ y(k)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}e^{A(y(k))(t-k)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^k(k)\\ y(k)\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Розглянемо послідовно вузлові точки $t=1,2,...,k-1,k$. Як випливає з умов неперервності

$$\begin{pmatrix}x^1(1)\\ y(1)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ C(1) & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^0(1)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ C(1) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{A(y(0))} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^0(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{A(y(0))} & 0\\ C(1)e^{A(y(0))} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0(0)\\ y(0)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x^2(2)\\ y(2)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ C(2) & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^1(2)\\ y(1)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ C(2) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{A(y(1))} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^1(1)\\ y(1)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}e^{A(y(1))} & 0\\ C(2)e^{A(y(1))} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^1(1)\\ y(1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}e^{A(y(1))} & 0\\ C(2)e^{A(y(1))} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ C(1) & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}e^{A(y(0))} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}e^{A(y(1))} & 0\\ C(2)e^{A(y(1))} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}e^{A(y(0))} & 0\\ C(1)e^{A(y(0))} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0(0)\\ y(0)\end{pmatrix},\ \dots, \tag{22}$$

$$\begin{pmatrix} x^k(k) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^{k-1}(k) \\ y(k-1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{A(y(k-1))} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^{k-1}(k-1) \\ y(k-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{A(y(k-1))} & 0 \\ C(k)e^{A(y(k-1))} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C(k-1) & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{A(y(k-2))} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{k-2}(k-2) \\ y(k-2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A(y(k-1))} & 0 \\ C(k)e^{A(y(k-1))} & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{A(y(k-2))} & 0 \\ C(k-1)e^{A(y(k-2))} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{k-2}(k-2) \\ y(k-2) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} e^{A(y(k-1))} & 0 \\ C(k)e^{A(y(k-1))} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{A(y(k-2))} & 0 \\ C(k-1)e^{A(y(k-2))} & 1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} x^0(0) \\ y(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \prod_{j=1}^{k} e^{A(y(k-j))} & 0 \\ \sum_{j=1}^{k} C(k-j+1) \prod_{i=1}^{k+1-j} e^{A(y(k+1-j-i))} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Враховуючи (21), маємо

$$\begin{pmatrix} x^k(t) \\ y(k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A(y(k))(t-k)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \prod_{j=1}^{k} e^{A(y(k-j))} & 0 \\ \sum_{j=1}^{k} C(k-j+1) \prod_{i=1}^{k+1-j} e^{A(y(k+1-j-i))} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \; k \le t < k+1. \quad (23)$$

Таким чином, фундаментальна матриця розв'язків системи (8), (9) складається з двох частин, неперервної і дискретної. Як випливає (23), фундаментальна матриця рішень гібридної системи (8), (9) на проміжку $k \le t < k+1$ має вигляд $\Phi(t) = Z_k(t)Z(k)$, де $Z_k(t)$ і $Z(k)$ мають вигляд (16), (17) відповідно.

***Наслідок 2**. Для гібридної системи* (8), (9) *розв'язок задачі Коші з початковими умовами* $x(0) = x_0$ *,* $y(t) \equiv y_0$ *,* $-1 \le t \le 0$ *на проміжку* $k \le t < k+1$ *має вигляд*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

де фундаментальна матриця $\Phi(t)$ *задається у вигляді* (15).

Повернемося до системи (2)–(5). Її можна записати у вигляді гібридної моделі (8),(9), динаміка станів якої задається вектором $(x_1(t),...,x_N(t),u(t),y(t))$, що складається з векторної функції $x(t) = (x_1(t),...,x_N(t),x_{N+1}(t))$ ($N+1$ змінна визначає стан потенціалу $u(t)$ обчислювального пристрою), $t \ge 0$. Квадратна матриця A зпостійними коефіцієнтами на кожному з інтервалів $t \in [k,k+1)$, $k = 0,1,2,...$, розмірності $(N+1 \times N+1)$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -1/b(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1/b(t) & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & -1/b(t) & 0 \\ w_1(t)/N & w_2(t)/N & \ldots & w_N(t)/N & -1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$\mathrm{y(k)} = \mathrm{b}(t) \in R^1, k = 0,1,2,$ C вектор з N елементів, формальний результат застосування якого у виразі $\mathrm{C(k)\,x}(k), \mathrm{k} = 0,1,2,\ \ldots$, визначається величиною $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ w_i(t) > w_i(t-1)}}^{N} 2^{i-1} - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ w_i(t) < w_i(t-1)}}^{N} 2^{i-1}$.

Без обмеження загальності моделі будемо вважати початковим моментом функціонування системи $t = 0$ момент початку роботи першої задачі, виконання якої здійснюється обчислювальним пристроєм. Тоді розв'язок задачі Коші для системи (2)–(5) з початковими умовами $x(0) = (x_1(0),...,x_N(0),0) = x_0$, $y(t) = y_0 \equiv 0$, $-1 \le t \le 0$ на проміжку $k \le t < k+1$ буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

де фундаментальна матриця $\Phi(t)$ задається у вигляді (15).

Проведено обчислювані експерименти, в яких на основі отриманих теоретичних результатів здійснено моделювання процесів обробки заданої кількості задач за допомогою одного пристрою. Визначено шляхи оптимізації обсягів обчислювальних ресурсів в процесі виконання довільної сукупності задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Михалевич В. С. Вычислительные методы исследования и проектиро–вания сложных систем / В. С.Михалевич, В. Л.Волкович. – М.: Наука, 1982. – 286 с.
2. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М.:Наука, 1975. – 273 с.
3. Кухтенко А. И. Основные задачи теории управления сложными системами/ А. И. Кухтенко // Сложные системы управления. – 1968. – Вып. 1. – С. 3–10.
4. Поспелов Г. С. Программно–целевое планирование и управление/ Г. С. Поспелов, В. А. Ириков. – М.:Наука, 1976. – 261 с.
5. Хусаїнов Д. Я. Представление решений гибридных систем, составленных из дифференциальных и функциональных подсистем / Д. Я.Хусаїнов, Є В.Івохін, О. І.Кузьмич // Журнал обчислювальної та прикл. математики. – 2007.– № 1.– С. 110–116.
6. Jang J. S. Neuro–Fuzzy and soft computing/ J.S. Jang, C.T. Sun, E. Mizutani – N. Y.: Prentice Hall, 1997. – 176 p.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц /Ф.Р.Гантмахер. – М.: Наука, 1966.– 576с.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.15

Махно М. Ф., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О ГИБРИДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ СОВОКУПНОСТИ ЗАДАНИЙ

В статье рассмотрена и решена задача формализации процесса учета ресурсов вычислительного устройства при обработке совокупности заданий в виде гибридной модели из функциональных и дифференциальных уравнений. Получено утверждение о виде фундаментальной матрицы решений системы. Проведено тестирование ее работы для заданного способа учета ресурсов.

Ключевые слова: *гибридная модель, динамика процессов, последовательность задач, фундаментальная матрица, задача Коши.*

Makhno M. F., post-graduate,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

ABOUT HYBRID MODEL OF DYNAMICS OF THE JOBS COLLECTION PROCESSING

In this article there are discussed and solved the problem of formalizing the process of resource accounting of computing device when processing a set of tasks. The hybrid model of functional and differential equations is proposed. An assertion about a fundamental matrix of the solutions was obtained. The use of the model is demonstrated for the given method of resource accounting.

Key words: *hybrid model, processes dynamics, job collection, fundamental matrix, Cauchy problem.*

УДК 517.929

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

УМОВИ СТІЙКОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Стаття присвячена дослідженню стійкості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода зі сталими коефіцієнтами у гільбертових просторах

Ключові слова: Гільбертів простір, стійкість, стохастичні диференціальні рівняння.

Вступ. Одним з перспективних підходів дослідження випадкових процесів є їх представлення як кривих у гільбертовому просторі. Перенесення результатів, які стосуються стохастичних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах на нескінченновимірний випадок є далеко не тривіальним [11]. Дана робота присвячена розвиненню цієї теорії і, зокрема, цікавим фактом, на думку автора, є зведення дослідження стійкості розв'язку стохастичного диференціального рівняння у гільбертовому просторі до розв'язності операторного рівняння Сільвестра.

1. Стохастичні диференціальні рівняння Іто-Скорохода зі сталими коефіцієнтами у Гільбертових просторах.

Нехай X – сепарабельний гільбертовий простір зі скалярним добутком *(x,y)* і нормою |*x*|. на імовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \ge 0\} \subset F$ розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_t = X_t A dt + \sum_{k=1}^{\infty} (X_t B_k dW_k(t) + \int_U C_k(u) X_t \tilde{\nu}_k(dt, du)), \tag{1}$$

де *A*, B_k, $C_k(u)$ – необмежені лінійні оператори, які визначені на деякій щільній в X множині *D*, причому для $x \in D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k x|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k(u) x|^2 < \infty,$$

$W_k(t)$ – незалежні між собою вінерівські процеси, $\tilde{\nu}_k(dt, du)$ – незалежні між собою центровані пуассонівські міри.

Рівняння (1) розв'язується при заданій початковій умові X_0, незалежній від $\{W_k, k = 1,2,...\}$ та $\{\tilde{\nu}_i, i = 1,2,...\}$. Нас цікавитиме випадок, коли рівняння (1) має розв'язок, що володіє другим моментом. Зауважимо, що розв'язком цього рівняння вважається такий сильний операторний процес X_t, для якого при $x \in D$ функція $X_t x$ має стохастичний диференціал, що співпадає з результатом дії на *x* правої частини (1).

Розглянемо сильні однорідні стохастичні півгрупи U_t^s з другими моментами. Введемо позначення для півгруп перших та других моментів:

$$M_t = MU_t^0, V_t(C) = MU_t^{0*} C U_t^0 .$$

Відносно стохастичної півгрупи покладемо виконаною одну з властивостей неперервності:

а) півгрупа U_t^0 сильно неперервна в середньому квадратичному, тобто

$$\lim_{t \to \infty} M |U_t^0 x - x|^2 = 0;$$

б) півгрупа U_t^0 рівномірно неперервна в середньому квадратичному, тобто

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{|x| \le 1} M |U_t^0 x - x|^2 = 0 .$$

Умові а) задовольняють розв'язки рівняння (1). Умова б) еквівалентна умові $\lim_{t \to 0} M \| V_t(I) - I \| = 0$.

Через *Q(H)* позначимо твірний оператор півгрупи $V_t(H)$:

$$Q(H) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [V_t(H) - H] ,$$

де границя операторів вважається слабкою. Зокрема, якщо стохастична півгрупа породжується рівнянням (1), то *Q(H)* задається формулою