Махно М. Ф., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О ГИБРИДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ СОВОКУПНОСТИ ЗАДАНИЙ

В статье рассмотрена и решена задача формализации процесса учета ресурсов вычислительного устройства при обработке совокупности заданий в виде гибридной модели из функциональных и дифференциальных уравнений. Получено утверждение о виде фундаментальной матрицы решений системы. Проведено тестирование ее работы для заданного способа учета ресурсов.

Ключевые слова: *гибридная модель, динамика процессов, последовательность задач, фундаментальная матрица, задача Коши.*

Makhno M. F., post-graduate,
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

ABOUT HYBRID MODEL OF DYNAMICS OF THE JOBS COLLECTION PROCESSING

In this article there are discussed and solved the problem of formalizing the process of resource accounting of computing device when processing a set of tasks. The hybrid model of functional and differential equations is proposed. An assertion about a fundamental matrix of the solutions was obtained. The use of the model is demonstrated for the given method of resource accounting.

Key words: *hybrid model, processes dynamics, job collection, fundamental matrix, Cauchy problem.*

УДК 517.929

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

УМОВИ СТІЙКОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Стаття присвячена дослідженню стійкості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода зі сталими коефіцієнтами у гільбертових просторах

Ключові слова: Гільбертів простір, стійкість, стохастичні диференціальні рівняння.

Вступ. Одним з перспективних підходів дослідження випадкових процесів є їх представлення як кривих у гільбертовому просторі. Перенесення результатів, які стосуються стохастичних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах на нескінченновимірний випадок є далеко не тривіальним [11]. Дана робота присвячена розвиненню цієї теорії і, зокрема, цікавим фактом, на думку автора, є зведення дослідження стійкості розв'язку стохастичного диференціального рівняння у гільбертовому просторі до розв'язності операторного рівняння Сільвестра.

1. Стохастичні диференціальні рівняння Іто-Скорохода зі сталими коефіцієнтами у Гільбертових просторах.

Нехай X – сепарабельний гільбертовий простір зі скалярним добутком *(x,y)* і нормою |*x*|. на імовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\} \subset F$ розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_t = X_t A dt + \sum_{k=1}^{\infty} (X_t B_k dW_k(t) + \int_U C_k(u) X_t \tilde{\nu}_k(dt, du)), \quad (1)$$

де *A, Bk, Ck(u)* – необмежені лінійні оператори, які визначені на деякій щільній в X множині *D*, причому для $x \in D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} | B_k x |^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} | C_k(u) x |^2 < \infty,$$

$W_k(t)$ – незалежні між собою вінерівські процеси, $\tilde{\nu}_k(dt, du)$ – незалежні між собою центровані пуассонівські міри.

Рівняння (1) розв'язується при заданій початковій умові X_0, незалежній від $\{W_k, k = 1,2,...\}$ та $\{\tilde{\nu}_i, i = 1,2,...\}$. Нас цікавитиме випадок, коли рівняння (1) має розв'язок, що володіє другим моментом. Зауважимо, що розв'язком цього рівняння вважається такий сильний операторний процес X_t, для якого при $x \in D$ функція $X_t x$ має стохастичний диференціал, що співпадає з результатом дії на *x* правої частини (1).

Розглянемо сильні однорідні стохастичні півгрупи U_t^s з другими моментами. Введемо позначення для півгруп перших та других моментів:

$$M_t = MU_t^0, V_t(C) = MU_t^{0*} C U_t^0 .$$

Відносно стохастичної півгрупи покладемо виконаною одну з властивостей неперервності:

а) півгрупа U_t^0 сильно неперервна в середньому квадратичному, тобто

$$\lim_{t \to \infty} M | U_t^0 x - x |^2 = 0;$$

б) півгрупа U_t^0 рівномірно неперервна в середньому квадратичному, тобто

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{|x| \leq 1} M | U_t^0 x - x |^2 = 0 .$$

Умові а) задовольняють розв'язки рівняння (1). Умова б) еквівалентна умові $\lim_{t \to 0} M \| V_t(I) - I \| = 0$.

Через *Q(H)* позначимо твірний оператор півгрупи *Vt(H)*:

$$Q(H) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [V_t(H) - H] ,$$

де границя операторів вважається слабкою. Зокрема, якщо стохастична півгрупа породжується рівнянням (1), то *Q(H)* задається формулою

$$Q(H) = A^*H + HA + \sum_{k=1}^{\infty}(B_k^*HB_k + \int_U C_k^*(u)HC(u)\Pi_k(du)). \tag{2}$$

Якщо H входить в область визначення твірного оператора Q, то справедливі рівняння:

$$\frac{d}{dt}V_t(H) = Q(V_t(H)) = V_t(Q(H)) . \tag{3}$$

Означення 1. *Стохастична півгрупа U_t^s називається рівномірно асимптотично стійкою в середньому квадратичному, якщо*

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{|x|\le 1} M\,|U_t^0 x|^2 = 0, \tag{4}$$

$M\,|U_t^0 x|^2 = (V_t(I)x, x)$.

Співвідношення (4) еквівалентне умові $\|V_t(I)\| \to 0$ при $t\to\infty$. Оскільки $V_{t+s}(I) = V_t(V_s(I))$,

$$\|V_{t+s}(I)\| \le V_t(\|V_s(I)\|\, I) \le \|V_s(I)\|\|\|V_t(I)\|,$$

то з рівномірної асимптотичної стійкості в середньому квадратичному випливає експоненціальна стійкість в середньому квадратичному [1], тобто існує таке $\alpha > 0$, що

$$\|V_t(I)\| \le \frac{1}{\alpha}\exp\{-\alpha t\} . \tag{5}$$

Теорема 1. *Нехай стохастична півгрупа задовольняє умові б). Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\lim\limits_{t\to\infty}\|V_t(I)\| = 0$ *;*

2) існує додатний оператор H, який має обмежений обернений, для якого $Q(H) = -G$, де G – додатний оператор, який має обмежений обернений;

3) для всіх $x \in X$ $\int_0^{\infty}(V_t(I)x, x)dt < \infty$ *.*

Якщо виконаною є одна з цих умов, то $P_x\{\lim\limits_{t\to\infty}|U_t^0 x| = 0\} = 1$.

Доведення. З твердження 1) випливає твердження 3) на підставі оцінки (5). Якщо виконана умова 2), яку можна подати у вигляді

$$Q(H) \le \alpha H,\ \alpha > 0 ,$$

то

$$\frac{d}{dt}V_t(H) = V_t(Q(H)) \le -\alpha V_t(H)$$

і, значить,

$$V_t(H) \le \exp\{-\alpha t\}H, \|V_t(H)\| \le \exp\{-\alpha t\}\,\|H\| .$$

Оскільки при деякому $\delta > 0$ $\delta I \le H$, то

$$\|V_t(I)\| \le \frac{1}{\delta}\|V_t(H)\| \le \frac{\|H\|}{\delta}\exp\{-\alpha t\} .$$

Отже, з твердження 2) випливає твердження 1). Залишається показати, що з твердження 3) випливає твердження 2). Покладемо

$$C = \int_0^{\infty} V_t(I)dt .$$

Очевидно, що C – симетричний невід'ємний оператор. З умови б) випливає, що існує таке $\delta > 0$, що при $t < \delta$ $\|V_t(I) - I\| < \frac{1}{2}$ і, значить, $V_t(I) \ge \frac{1}{2}I$. Тому

$$C \ge \int_0^{\delta} V_t(I)dt \ge \frac{\delta}{2}I .$$

Далі з урахуванням нерівності (5),

$$Q(H) = \int_0^{\infty} Q(V_t(I))dt = \int_0^{\infty}\frac{d}{dt}V_t(I)dt = -I .$$

Отже,

$$Q(H) = -I \le -\frac{1}{\|H\|}H.$$

Нехай виконана умова 2).

Тоді $\exp\{\alpha t\}(CU_t^0 x, U_t^0 x)$ є супермартингалом: якщо F_t – потік σ-алгебр, породжених U_t^0 , то

$$M[\exp\{\alpha(t+h)\}(CU_{t+h}^t U_t^0 x, U_{t+h}^t U_t^0 x) / F_t] = \exp\{\alpha(t+h)\}(V_h(H)U_t^0 x, U_t^0 x) =$$

$$= \exp\{\alpha t\}(CU_t^0 x, U_t^0 x) + \exp\{\alpha t\}\int_0^h \frac{d}{du}\exp\{\alpha u\}(V_u(C)U_t^0 x, U_t^0 x)du = \exp\{\alpha t\}(U_t^0 x, U_t^0 x) +$$

$$+ \exp\{\alpha t\}\int_0^h([aV_u(C) + V_u(Q(C))]U_t^0 x, U_t^0 x)\exp\{\alpha u\}du = \exp\{\alpha t\}(CU_t^0 x, U_t^0 x) +$$

$$+\exp\{\alpha t\}\int_0^h (V_u(aC+Q(C))U_t^0x,U_t^0x)\exp\{\alpha t\}du \le \exp\{\alpha t\}(CU_t^0x,U_t^0x)$$

(ми використали нерівність $\alpha C+Q(C)\le 0$). Тому, $\exp\{\alpha t\}(CU_t^0x,U_t^0x)$ – величина обмежена та $(CU_t^0x,U_t^0x)=0(\exp\{-\alpha t\})$. Оскільки $C>\delta I$ при деякому $\delta>0$, то $\left|U_t^0x\right|^2=0(\exp\{-\alpha t\})$. Теорему доведено.

2. Ітераційна схема розв'язання операторного рівняння Сільвестра у гільбертовому просторі.

Розглянемо більш детально умову 2) теореми 1 попереднього пункту:

$$A^*H+HA+\sum_{k=1}^{\infty}(B_k^*HB_k+\int_U C_k^*(u)HC_k(u)\Pi_k(du))=-G\,. \tag{6}$$

Конструкція (6) є узагальненим операторним рівнянням Ляпунова-Сільвестра. Дослідимо умови розв'язності такого рівняння.

Перепишемо (6) у вигляді

$$-A^*H-HA=G+\sum_{k=1}^{\infty}(B_k^*HB_k+\int_U C_k^*(u)HC_k(u)\Pi_k(du))\,. \tag{7}$$

Позначимо

$$F[H]=-A^*H-HA\,,$$

$$D[H]=G+\sum_{k=1}^{\infty}(B_k^*HB_k+\int_U C_k^*(u)HC_k(u)\Pi_k(du))$$

і побудуємо неявний розв'язок рівняння $F[H]=D[H]$ за наступною ітераційною схемою

$$F[H_{k+1}]=D[H_k],\ k=0,1,2,... \tag{8}$$

Встановимо достатні умови збіжності методу (8) до розв'язку рівняння (7).

Теорема 2. Нехай виконуються наступні умови:

1) Спектр оператора A є від'ємним;

2) $|T^*|\le\beta$; де $T\equiv A^*\otimes I+I\otimes A$, $0<\beta<1$;

3) $|\sum_{k=1}^{\infty}(B_k^*HB_k+\int_U C_k^*(u)HC_k(u)\Pi_k(du))|<\alpha H$, $0<\alpha<1$.

Тоді послідовність $\{H_k,k\ge 1\}$ збігається до розв'язку рівняння (7).

Доведення. Оскільки оператор G є додатно визначеним, і виконується умова 1), то D – оператор, який переводить простір додатно визначених операторів у себе. Операторне рівняння Ляпунова

$$-A^*H-HA=K\,, \tag{9}$$

де K – довільний додатно визначений оператор, має розв'язком також додатно визначений оператор H, тобто F^{-1} також переводить простір додатно визначених операторів у себе (оскільки виконується умова 1)).

Введемо метрику наступним чином

$$\rho(H_1,H_2)=\|H_1-H_2\|\,.$$

Простір додатно визначених операторів із введеною таким чином метрикою буде повним метричним простором. Тоді для збіжності ітераційної схеми залишилось перевірити виконання умови того, що оператори D і F^{-1} є операторами послідовного стиснення. Згідно умови 3), отримаємо

$$\rho(F(H_1),F(H_2))<\alpha\rho(H_1,H_2)\,.$$

Запишемо рівняння (9) у вигляді

$$TH=K\,,$$

де $T\equiv A^*\otimes I+I\otimes A$ – *тензорний добуток операторів. Тоді*

$$H=T^{-1}K$$

і

$$\rho(F^{-1}(H_1),F^{-1}(H_2))=\|T^{-1}H_1-T^{-1}H_2\|\le\beta\,,$$

що і означає виконання умови послідовного стиснення.

Теорему 2 доведено.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 612 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968. – 354 с.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. 1. Общая теория. – М.: НЛ, 1962. – 895 с.
5. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. – М.: НЛ, 1965. – 605 с.
6. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
7. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. – Т.1. – М.: Наука, 1994. – 544 с.
8. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. – Т.2. – М.: Наука, 1996. – 628 с.
9. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. – 222 с.
10. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М. Наука, 1981. – 448 с.
11. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев.: Наукова думка, 1987. – 328 с.
12. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
13. Хейл Дж . Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

Стаття надійшла до редколегії 22 .07.15

Никитин А. В. канд. физ.-мат. наук, доц.
КНУ имени Тараса Шевченка, Киев

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО-СКОРОХОДА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Посвящена исследованию устойчивости решений линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: *Гильбертовое пространство, устойчивость,стохастические дифференциальные уравнения*

Nikitin A. V., Ph. D. Physics and Mathematics, assoc.prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv

STABILITY CONDITIONS ITO-SKHOROHOD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENT IN HILBERT SPACE

This article is devoted to research of stability of decisions of linear stochastic differential equations with constant coefficients in Hilbert Space

Key words: *Hilbert space, stability, stochastic differential equations*

УДК 004.42:510.69

М. С. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
С. С. Шкільняк, д-р фіз.-мат. наук, проф.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ЧИСЛЕННЯ СЕКВЕНЦІЙНОГО ТИПУ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ВИКОНУВАНОСТІ В ЛОГІКАХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Побудовано спеціальні числення для перевірки виконуваності множин формул в чистих першопорядкових логіках квазіарних предикатів – числення виконуваних множин. Проаналізовано застосовність традиційних секвенційних числень та числень виконуваних множин. Для пропонованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, числення, виконуваність, коректність та повнота

Вступ. Розвиток інформаційних технологій зумовлює розширення сфери застосування апарату математичної логіки (див., напр., [1]). Для успішного розв'язання низки задач, що виникають в сучасних програмних та інформаційних системах, необхідний ефективний пошук виведень. Потужним апаратом побудови виведень є числення секвенційного (ґенценівського) типу. Вони формалізують відношення логічного наслідку для пар множин формул. Широкий спектр таких числень розроблено для різних класів програмно-орієнтованих логічних формалізмів – композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів (див., напр., [2–4]). Водночас для практичного пошуку виведень та перевірки виконуваності формул зазвичай використовують споріднений із секвенційними численнями метод семантичних таблиць (семантичних табло), який запропонував Е. Бет [5]. Семантичні таблиці подібні до виведень в секвенційних численнях – секвенційних дерев, проте вони не вимагають переписування незмінних формул. Водночас із практичного погляду семантичні таблиці ефективніші за секвенційні дерева. Проте семантичні таблиці не дають змогу відображати конкретні ситуації з максимальною простотою, секвенційні дерева більш наглядні в плані пошуку моделей чи контрмоделей. Тому в теоретичних дослідженнях доцільніше користуватись секвенційними численнями.

Для перевірки виконуваності формули чи множини формул використовують модифікований метод семантичних таблиць (див., напр., [6]), сутність якого полягає в пошуку моделі для формули чи множини формул. На відміну від традиційних, в таких модифікованих таблицях немає специфікації формул як істинні чи хибні, на кожному кроці виведення (побудови таблиці) використовується перевірка множини формул на виконуваність.

Метою даної роботи є побудова спеціальних числень секвенційного типу в стилі модифікованих семантичних таблиць для перевірки виконуваності в чистих першопорядкових логіках квазіарних предикатів. Такі числення назвемо численнями виконуваних множин. Виведення в цих численнях мають вигляд дерев, вершинами яких є множини формул. Проаналізовано застосовність числень виконуваних множин і традиційних секвенційних числень. Для пропонованих числень виконуваних множин доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [2, 7]. Для зручності читання наведемо основні визначення.

Основні поняття та визначення. На першопорядкових рівнях предикати задаються на іменних множинах – множинах пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – значення цього імені. Такі предикати названо квазіарними.

V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це однозначна функція вигляду $d: V \to A$.

V-ІМ подаємо як $[v_1 \mapsto a_1, \ldots, v_n \mapsto a_n, \ldots]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Множину всіх V-A-ІМ будемо позначати ${}^V\!A$.

Функцію $asn: {}^V\!A \to 2^V$ вводимо так: $asn(d) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Операцію $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$ задаємо так: $d\|_{-X} = \{v \mapsto a \in d \mid v \notin X\}$.

Замість $d\|_{-\{x\}}$, де $x \in V$, будемо скорочено писати $d\|_{-x}$.

Задамо операцію ∇ накладки ІМ d на ІМ h: $h \nabla d = h\|_{-asn(\mathrm{d})} \cup d.$

Параметричну операцію реномінації $\mathrm{r}_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n}: {}^V\!A \to {}^V\!A$ задаємо так: $\mathrm{r}_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n}(d) = d \nabla [v_1 \mapsto d(x_1), \ldots, v_n \mapsto d(x_n)]$.

Якщо множина пар імен реномінації відсутня, маємо реномінацію r, її трактуємо як тотожне відображення на ${}^V\!A$.

Введемо для $y_1, \ldots, y_n$ скорочене позначення $\bar{y}$. Тоді замість $\mathrm{r}_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n}$ також пишемо $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Функцію вигляду ${}^V\!A \to \{T, F\}$. назвемо V-A-квазіарним предикатом. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

В цій роботі обмежимось розглядом часткових однозначних предикатів.