Никитин А. В. канд. физ.-мат. наук, доц.
КНУ имени Тараса Шевченка, Киев

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО-СКОРОХОДА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Посвящена исследованию устойчивости решений линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: *Гильбертовое пространство, устойчивость,стохастические дифференциальные уравнения*

Nikitin A. V., Ph. D. Physics and Mathematics, assoc.prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv

STABILITY CONDITIONS ITO-SKHOROHOD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENT IN HILBERT SPACE

This article is devoted to research of stability of decisions of linear stochastic differential equations with constant coefficients in Hilbert Space

Key words: *Hilbert space, stability, stochastic differential equations*

УДК 004.42:510.69

М. С. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
С. С. Шкільняк, д-р фіз.-мат. наук, проф.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ЧИСЛЕННЯ СЕКВЕНЦІЙНОГО ТИПУ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ВИКОНУВАНОСТІ В ЛОГІКАХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Побудовано спеціальні числення для перевірки виконуваності множин формул в чистих першопорядкових логіках квазіарних предикатів – числення виконуваних множин. Проаналізовано застосовність традиційних секвенційних числень та числень виконуваних множин. Для пропонованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, числення, виконуваність, коректність та повнота

Вступ. Розвиток інформаційних технологій зумовлює розширення сфери застосування апарату математичної логіки (див., напр., [1]). Для успішного розв'язання низки задач, що виникають в сучасних програмних та інформаційних системах, необхідний ефективний пошук виведень. Потужним апаратом побудови виведень є числення секвенційного (ґенценівського) типу. Вони формалізують відношення логічного наслідку для пар множин формул. Широкий спектр таких числень розроблено для різних класів програмно-орієнтованих логічних формалізмів – композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів (див., напр., [2–4]). Водночас для практичного пошуку виведень та перевірки виконуваності формул зазвичай використовують споріднений із секвенційними численнями метод семантичних таблиць (семантичних табло), який запропонував Е. Бет [5]. Семантичні таблиці подібні до виведень в секвенційних численнях – секвенційних дерев, проте вони не вимагають переписування незмінних формул. Водночас із практичного погляду семантичні таблиці ефективніші за секвенційні дерева. Проте семантичні таблиці не дають змогу відображати конкретні ситуації з максимальною простотою, секвенційні дерева більш наглядні в плані пошуку моделей чи контрмоделей. Тому в теоретичних дослідженнях доцільніше користуватись секвенційними численнями.

Для перевірки виконуваності формули чи множини формул використовують модифікований метод семантичних таблиць (див., напр., [6]), сутність якого полягає в пошуку моделі для формули чи множини формул. На відміну від традиційних, в таких модифікованих таблицях немає специфікації формул як істинні чи хибні, на кожному кроці виведення (побудови таблиці) використовується перевірка множини формул на виконуваність.

Метою даної роботи є побудова спеціальних числень секвенційного типу в стилі модифікованих семантичних таблиць для перевірки виконуваності в чистих першопорядкових логіках квазіарних предикатів. Такі числення назвемо численнями виконуваних множин. Виведення в цих численнях мають вигляд дерев, вершинами яких є множини формул. Проаналізовано застосовність числень виконуваних множин і традиційних секвенційних числень. Для пропонованих числень виконуваних множин доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [2, 7]. Для зручності читання наведемо основні визначення.

Основні поняття та визначення. На першопорядкових рівнях предикати задаються на іменних множинах – множинах пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – значення цього імені. Такі предикати названо квазіарними.

V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це однозначна функція вигляду $d : V \to A$.

V-ІМ подаємо як $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Множину всіх V-A-ІМ будемо позначати ${}^V\!A$.

Функцію $asn : {}^V\!A \to 2^V$ вводимо так: $asn(d) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Операцію $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$ задаємо так: $d\|_{-X} = \{v \mapsto a \in d \mid v \notin X\}$.

Замість $d\|_{-\{x\}}$, де $x \in V$, будемо скорочено писати $d\|_{-x}$.

Задамо операцію ∇ накладки ІМ d на ІМ h: $h \nabla d = h\|_{-asn(\mathrm{d})} \cup d$.

Параметричну операцію реномінації $\mathrm{r}^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n} : {}^V\!A \to {}^V\!A$ задаємо так: $\mathrm{r}^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(d) = d \nabla [v_1 \mapsto d(x_1),...,v_n \mapsto d(x_n)]$.

Якщо множина пар імен реномінації відсутня, маємо реномінацію r, її трактуємо як тотожне відображення на ${}^V\!A$.

Введемо для $y_1,..., y_n$ скорочене позначення $\bar{y}$. Тоді замість $\mathrm{r}^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}$ також пишемо $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

Функцію вигляду ${}^V\!A \to \{T, F\}$. назвемо V-A-квазіарним предикатом. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

В цій роботі обмежимось розглядом часткових однозначних предикатів.

Клас *V-A*-квазіарних предикатів позначимо Pr^A.

Кожний *V-A*-квазіарний предикат *P* однозначно задається двома множинами – областями істинності та хибності. Це множини $T(P) = \{d\in{}^VA \mid P(d) = T\}$ та $F(P) = \{d\in{}^VA \mid P(d) = F\}$.

Для однозначних предикатів маємо $T(P)\cap F(P) = \varnothing$.

Предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ назвемо:

– неспростовним (частково істинним), якщо $F(P) = \varnothing$;

– виконуваним, якщо $T(P) \neq \varnothing$.

Предметне ім'я $x\in V$ (строго) неістотне для квазіарного предиката *P*, якщо $d_1\,\|_{-x} = d_2\,\|_{-x} \Rightarrow P(d_1) = P(d_2)$.

Базовими композиціями квазіарних предикатів на рівні чистих першопорядкових композитійно-номінативних логік (ЧКНЛ) є логічні зв'язки $\neg$ та $\vee$, реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, квантори $\exists x$.

Дамо визначення цих композицій через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$; $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q)$; $F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q)$;

$T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d\in{}^VA \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)\in T(P)\}$; $F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d\in{}^VA \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)\in F(P)\}$;

$T(\exists xP) = \{d\in{}^VA \mid P(\nabla x\mapsto a) = T$ для деякого $a\in A\}$; $F(\exists xP) = \{d\in{}^VA \mid P(d\nabla x\mapsto a) = F$ для всіх $a\in A\}$.

Композиції $\to$, &, $\forall x$ є похідними, вони задаються так: $P\to Q = \neg P\vee Q$; $P\&Q = \neg(\neg P\vee\neg Q)$; $\forall xP = \neg\exists x(\neg P)$.

Властивості композицій $\neg$, $\vee$, $\to$, & аналогічні властивостям відповідних класичних [8] логічних зв'язок (див [2, 7]). Традиційні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$ в основному аналогічні властивостям відповідних класичних кванторів.

Для немонотонних квазіарних предикатів невірні [2, 7] деякі закони класичної логіки. Це пов'язано з тим, що значення $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до *d* компонента з певним іменем. Наприклад:

– існують спростовні предикати вигляду $P\to\exists xP$;

– існують виконувані предикати вигляду $\neg\exists xP\,\&\,P$.

Справді, задамо предикат *P* так: $P(d) = T$ при $x\notin asn(d)$ та $P(d) = F$ при $x\in asn(d)$. Для таких *d*, що $x\notin asn(d)$, маємо $P(d) = T$ та $\exists xP(d) = F$.

Таким чином, при інтерпретаціях формул доцільно явно вказувати означені та неозначені предметні імена. Для цього використаємо спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати εz (див. [9]), які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем *z*. Предикати-індикатори εz задаємо так:

$T(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in{}^VA \mid z\notin asn(d)\}$; $F(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in{}^VA \mid z\in asn(d)\}$.

Наведемо основні властивості композицій $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (див. також [2, 7]):

R) $\mathrm{R}(P) = P$ – тотожна реномінація.

RI) $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – згортка тотожної пари імен у реномінації.

R$\neg$) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – R$\neg$-дистрибутивність.

R$\vee$) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\vee Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\vee\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$ – R$\vee$-дистрибутивність.

RR) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)$ – згортка реномінацій.

RU) Нехай $z\in V$ неістотне для предиката *P*. Тоді $\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

Ren) Якщо *z* неістотне для *P*, то $\exists yP = \exists z\mathrm{R}_z^y(P)$ – перейменування кванторного імені.

R$\exists$s) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, якщо $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$ – проста (обмежена) R$\exists$-дистрибутивність.

R$\exists$) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(P)$, якщо *z* неістотне для *P* та $z\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$ – R$\exists$-дистрибутивність.

Семантичними моделями ЧКНЛ є композиційні системи квазіарних предикатів вигляду CS = (A, Pr^A, C), де множина композицій $C = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$. Така композиційна система визначає композиційну алгебру *V-A*-квазіарних предикатів (Pr^A, C) та алгебру (алгебраїчну систему) даних (A, Pr^A). Надалі розглядаємо ЧКНЛ, розширені шляхом виділення підмножини $U\subseteq V$ тотально неістотних предметних імен, тобто імен, неістотних для всіх базових предикатів.

Побудова композиційної алгебри дає змогу визначити мову ЧКНЛ. Алфавіт мови: множина предметних імен (змінних) *V*, множина тотально неістотних предметних імен $U\subseteq V$; множина *Ps* предикатних символів (ПС); множина $\{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ символів базових композицій. Множина *Fr* формул мови ЧКНЛ визначається індуктивно:

– $Ps\subseteq Fr$; формули вигляду $p\in Ps$ – атомарні;

– $\Phi, \Psi\in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi\in Fr$.

Множину *Ps* назвемо сигнатурою мови ЧКНЛ. Формули вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ назвемо *R*-формулами.

Атомарні формули та формули вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$, де $p\in Ps$, назвемо примітивними.

Нехай $\Gamma\subseteq Fr$. Позначимо $nm(\Gamma)$ множину всіх $x\in V$, які фігурують у символах реномінації та квантифікації, що входять до складу формул множини Γ.

Для множини $\Gamma\subseteq Fr$ будемо скорочено позначати:

$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J)$ як $T^{\wedge}(\Gamma)$, $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J)$ як $F^{\wedge}(\Gamma)$), $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J)$ як $T^{\vee}(\Gamma)$, $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J)$ як $F^{\vee}(\Gamma)$.

Символи *Fs* позначають (виділяють) базові предикати в множині Pr^A. Для опису такого позначення задаємо тотальне однозначне відображення $I : Ps\to Pr^A$. При цьому кожне $z\in U$ неістотне для кожного $P\in I(Ps)$. Продовжимо *I* до відображення інтерпретації $I : Fr\to Pr^A$ згідно побудови формул із простіших за допомогою символів композицій:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi));\ I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi));\ I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi));\ I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi)).$$

Трійку J = (CS, Ps, I) назвемо *інтерпретацією* (моделлю) мови ЧКНЛ сигнатури Ps. Скорочено інтерпретації мови також позначаємо як (A, Ps, I) чи (A, I).

Предикат $I(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації $J = (A, I)$, позначаємо Φ_J.

Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо для кожної $J = (A, I)$ ім'я x неістотне для Φ_J.

Для кожної $\Phi\in Fr$ задамо множину $\nu(\Phi)$ гарантовано неістотних предметних імен.

Для кожного $p\in Ps$ візьмемо $\nu(p) = U$, далі задаємо індукцією за побудовою формули:

$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$; $\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi)\cap\nu(\Psi)$; $\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi)\cup\{x\}$; $\nu(R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Phi) = (\nu(\Phi)\cup\{v_1,\ldots,v_n\})\setminus\{x_i \mid v_i\notin\nu(\Phi),\ i\in\{1,\ldots,n\}\}$.

Нехай $\Gamma\subseteq Fr$. Тоді задаємо $\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi\in\Gamma}\nu(\Phi)$.

Множину "нових" для формул множини Γ неістотних імен задамо так: $fu(\Gamma) = U\setminus nm(\Gamma)$.

Можна довести (див. [2, 7]): $x\in fu(\Gamma) \Rightarrow x\in\nu(\Gamma) \Rightarrow x$ неістотне для кожної $\Phi\in\Gamma$.

Формула Φ неспростовна при інтерпретації J, якщо предикат Φ_J неспростовний, тобто $F(\Phi_J) = \varnothing$.

Формула Φ неспростовна (частково істинна), якщо Φ є неспростовною при кожній інтерпретації J.

Формула Φ виконувана при інтерпретації J, якщо предикат Φ_J виконуваний, тобто $T(\Phi_J) \neq \varnothing$.

Формула Φ виконувана, якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації J.

Множина $\Gamma\subseteq Fr$ виконувана, якщо $T^\wedge(\Gamma)\neq\varnothing$ для деякої інтерпретації J.

Це означає, що існують інтерпретація $J = (A, I)$ та $\delta\in{}^VA$ такі: $\Phi_J(\delta) = T$ для всіх $\Phi\in\Gamma$.

Таку пару (J, δ) назвемо моделлю множини формул Γ.

Отже, Γ виконувана $\Leftrightarrow$ Γ має модель.

Відношення логічного наслідку. Для логік квазіарних предикатів можна ввести [7] низку відношень логічного наслідку для множин формул. Як зазначено вище, ми розглядаємо логіки однозначних предикатів.

Задамо відношення наслідку для множин формул при фіксованій інтерпретації. Нехай $\Gamma, \Delta\subseteq Fr$, J – інтерпретація.

Δ є ID-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{ID}\Delta$), якщо $T^\wedge(\Gamma)\cap F^\wedge(\Delta)=\varnothing$.

Δ є T-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{T}\Delta$), якщо $T^\wedge(\Gamma)\subseteq T^\vee(\Delta)$.

Δ є F-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{F}\Delta$), якщо $F^\wedge(\Delta)\subseteq F^\vee(\Gamma)$.

Δ є TF-наслідком Γ при J (позн. $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{TF}\Delta$), якщо $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{T}\Delta$ та $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{F}\Delta$.

Відповідні відношення логічного наслідку визначаємо за схемою:

$\Gamma\ |\!\!=_{*}\Delta$, якщо $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{*}\Delta$ для кожної інтерпретації J.

Властивості відношень $|\!\!=_{ID}$, $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$, $|\!\!=_{TF}$ досліджено в [7]. Відношення $|\!\!=_{ID}$ в цій роботі позначається як $|\!\!=_{Cl}$.

Для відношення $|\!\!=_{ID}$ можна переносити формулу з лівої частини у праву і навпаки, накидаючи заперечення:

Твердження 1. $\Phi, \Gamma\ |\!\!=_{ID}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ |\!\!=_{ID}\Delta, \neg\Phi$; $\Gamma\ |\!\!=_{ID}\Delta, \Phi \Leftrightarrow \neg\Phi, \Gamma\ |\!\!=_{ID}\Delta$.

Водночас (див. [7]) для відношень $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$ та $|\!\!=_{TF}$ таке перенесення неможливе.

Розглянемо особливості відношень $|\!\!=_{ID}$, $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$, коли одна з множин Γ чи Δ – порожня.

$\varnothing\ {}_J|\!\!=_{ID}\Delta$ та $\varnothing\ {}_J|\!\!=_{F}\Delta$ означають $F^\wedge(\Delta)=\varnothing$.

$\varnothing\ {}_J|\!\!=_{T}\Delta$ означає $T^\vee(\Delta)={}^VA$; $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{F}\varnothing$ означає $F^\vee(\Gamma)={}^VA$.

$\Gamma\ {}_J|\!\!=_{ID}\varnothing$ та $\Gamma\ {}_J|\!\!=_{T}\varnothing$ означають $T^\wedge(\Gamma)=\varnothing$.

Таким чином, встановлення виконуваності можна звести до встановлення відсутності логічного наслідку:

множина формул Γ виконувана $\Leftrightarrow$ $T^\wedge(\Gamma)\neq\varnothing$ для деякої $J \Leftrightarrow \Gamma\ |\!\!\neq_{ID}\varnothing \Leftrightarrow \Gamma\ |\!\!\neq_{T}\varnothing$.

Позначимо $^\neg\Delta = \{\neg\Phi \mid \Phi\in\Delta\}$. Тоді на основі твердження 1 маємо:

Твердження 2. $\Gamma\ |\!\!=_{ID}\Delta \Leftrightarrow \Gamma, {}^\neg\Delta\ |\!\!=_{ID}\varnothing \Leftrightarrow \Gamma, {}^\neg\Delta$ невиконувана.

Це означає, що встановлення $\Gamma\ |\!\!=_{ID}\Delta$ можна звести до встановлення невиконуваності $\Gamma, {}^\neg\Delta$.

Водночас для відношень $|\!\!=_{T}$, $|\!\!=_{F}$ та $|\!\!=_{TF}$ таке зведення неможливе, адже для цих відношень не можна переносити формулу з лівої частини у праву і навпаки, накидаючи заперечення.

Таким чином, метод перевірки наявності логічного наслідку для множин формул істотно універсальніший за метод перевірки виконуваності множини формул навіть для логік однозначних предикатів. Для логік тотальних чи часткових неоднозначних предикатів метод перевірки виконуваності не працює через тривіальність в таких логіках самого поняття виконуваності: для таких логік клас виконуваних формул збігається з класом усіх формул мови. Водночас секвенційні числення побудовано для різних відношень логічного наслідку в логіках як однозначних, так і тотальних чи часткових неоднозначних предикатів.

Згідно твердження 2, кожне відношення $\Gamma\ |\!\!=_{ID}\Delta$ можна подати як $\Gamma, {}^\neg\Delta\ |\!\!=_{ID}\varnothing$. Отже, властивості відношення $|\!\!=_{ID}$ можна переписати як властивості відношення $|\!\!=_{ID}\varnothing$. З іншого боку, множина формул Σ виконувана $\Leftrightarrow \Sigma\ |\!\!\neq_{ID}\varnothing$, тому властивості виконуваності множини формул *дуальні* до властивостей відношення $|\!\!=_{ID}\varnothing$.

Таким чином, отримуємо наступні властивості виконуваності множини формул.

Властивості пропозиційного рівня:

MS) Нехай $\Gamma\subseteq\Delta$, тоді Δ виконувана $\Rightarrow$ Γ виконувана;

$\neg\neg$) $\neg\neg\Phi, \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ Φ, Γ виконувана;

$\vee$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ Φ, Γ виконувана або Ψ, Γ виконувана;

$\neg\vee$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma$ виконувана.

Властивості спрощення:

R) $R(\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ Φ, Γ виконувана;

$\neg$R) $\neg R(\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg\Phi, \Gamma$ виконувана;

RI) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана;

¬RI) $\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана;

RU) за умови $y\in\nu(\Phi)$ маємо: $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана;

¬RU) за умови $y\in\nu(\Phi)$ маємо: $\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана.

Властивості еквівалентних перетворень:

RR) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi), \Gamma$ виконувана;

¬RR) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi), \Gamma$ виконувана;

R¬) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана;

¬R¬) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана;

R∨) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma$ виконувана;

¬R∨) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$, $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma$ виконувана;

R∃s) за умови $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$ маємо: $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана;

¬R∃s) за умови $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$ маємо: $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg\exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma$ виконувана;

R∃) за умови $z\in fu(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists x\Phi))$ маємо: $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi), \Gamma$ виконувана;

¬R∃) за умови $z\in fu(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists x\Phi))$ маємо: $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi), \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg\exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z} (\Phi), \Gamma$ виконувана.

Властивості елімінації кванторів, ε-розподілу та первісного означення:

∃) за умови $z\in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi))$ маємо: $\exists x\Phi, \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $R^{x}_{z}(\Phi), \neg\varepsilon z, \Gamma$ виконувана;

¬∃) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma$ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg\exists x\Phi, \neg R^{x}_{y}(\Phi), \neg\varepsilon y, \Gamma$ виконувана;

εd) Γ виконувана $\Leftrightarrow$ $\varepsilon y, \Gamma$ виконувана або $\neg\varepsilon y, \Gamma$ виконувана;

εv) за умови $z\in fu(\Gamma)$ маємо: Γ виконувана $\Leftrightarrow$ $\neg\varepsilon z, \Gamma$ виконувана.

Доведемо для прикладу εv. Твердження $\Leftarrow$ очевидне, доведемо твердження $\Rightarrow$.

Нехай Γ виконувана, тобто існують інтерпретація J та $d\in{}^{V}\!A$ такі, що $\Gamma_J(d) = T$. Але $z\in fu(\Gamma)$, тому $\Gamma_J(d\nabla z\mapsto a) = T$ для кожного $a\in A$. За визначенням εz маємо $\neg\varepsilon z(d\nabla z\mapsto a) = T$. Отже, множина $\neg\varepsilon z, \Gamma$ теж виконувана.

Числення виконуваних множин. Наведена аргументація переваг традиційних семантичних таблиць та секвенційних числень стосовно модифікованих семантичних таблиць, орієнтованих на перевірку виконуваності, ніяк не применшує важливість побудови засобів перевірки виконуваності для множин формул логік квазіарних предикатів.

Ми пропонуємо спеціальні числення секвенційного типу для перевірки виконуваності множини формул в чистих першопорядкових логіках квазіарних предикатів – числення виконуваних множин. Назвемо їх *QSF*-численнями.

Зазначені числення будуємо так: множина формул Σ невиконувана $\Leftrightarrow$ Σ має виведення.

Виведення в *QSF*-численнях мають вигляд дерев, вершинами яких є множини формул. Такі дерева назвемо семантичними. Аксіомами *QSF*-числень є замкнені (невиконувані) множини формул, правилами виведення – форми декомпозиції формули.

QSF-числення множин в певному розумінні еквівалентні секвенційним численням для відношення $|=_{ID}$, названих [3] *QSC*-численнями: секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ має виведення в *QSC*-численні $\Leftrightarrow$ $\Gamma \models_{ID} \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \neg\Delta \models_{ID} \varnothing \Leftrightarrow \Gamma, \neg\Delta$ невиконувана.

Звідси отримуємо: множина формул Σ виконувана $\Leftrightarrow$ $\Sigma \not\models_{ID} \varnothing$ $\Leftrightarrow$ секвенція $\vdash\Sigma$ не має виведення в *QSC*-численні $\Leftrightarrow$ існують інтерпретація $J = (A, I)$ та $\delta\in{}^{V}\!A$ такі, що $\Phi_J(\delta) = T$ для всіх $\Phi\in\Gamma$. При цьому A може бути нескінченною навіть для 1-елементної множини Σ.

Отже, треба переформувати виведення секвенції $\vdash\Sigma$ так, щоб усі вершини будованого дерева мали вигляд $\vdash\Lambda$. Це означатиме побудову в *QSF*-численні семантичного дерева для множини формул Σ. Тоді множина формул Σ виконувана $\Leftrightarrow$ можна збудувати модель для Σ (скінченну чи нескінченну) на основі виведення Σ в *QSF*-численні.

Можливість отримання нескінченної моделі робить встановлення виконуваності множини формул неконструктивним. Водночас встановлення невиконуваності множини формул конструктивне в такому розумінні:

Σ невиконувана $\Leftrightarrow$ $\vdash\Sigma$ вивідна в *QSC*-численні $\Leftrightarrow$ маємо скінченне замкнене секвенційне дерево для $\vdash\Sigma$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ множина Σ вивідна в *QSF*-численні $\Leftrightarrow$ маємо скінченне замкнене семантичне дерево для Σ.

При побудові секвенційного дерева в *QSC*-численні ми перевіряємо ***відсутність*** логічного наслідку для множин формул кожної секвенції-вершини, тому при побудові семантичного дерева в *QSF*-численні ми для кожної вершини Σ будемо перевіряти $\Sigma \not\models_{ID} \varnothing$, тобто перевіряти ***виконуваність*** Σ. Це означає, що форми декомпозиції формули для *QSF*-числень повинні індукуватися властивостями виконуваності множини формул.

Форми декомпозиції (далі просто форми) будемо записувати у вигляді $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$.

Множини формул над рискою назвемо засновками, під рискою – висновками.

Індуктивне визначення семантичного дерева:

1) множина формул Σ утворює тривіальне семантичне дерево з єдиною вершиною Σ, яка є коренем дерева;

2) α – семантичне дерево з коренем Σ, $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ – форма $\Rightarrow$ $\begin{array}{c}\alpha\\ \mid\\ \Omega\end{array}$ – семантичне дерево з коренем Ω;

3) α та β – семантичні дерева з коренями Σ та Υ, $\dfrac{\Sigma \quad \Upsilon}{\Omega}$ – форма $\Rightarrow$ $\begin{array}{c}\alpha \quad \beta\\ \backslash\,/\\ \Omega\end{array}$ – семантичне дерево з коренем Ω.

Множина формул X – наступник множини формул Y у семантичному дереві δ з коренем Σ, якщо в δ існує шлях $\Sigma = \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \ldots, \Sigma_m, \ldots$ такий, що $\mathrm{X} = \Sigma_n$ та $\mathrm{Y} = \Sigma_m$.

Множина формул Σ ***вивідна*** в *QSF*-численні, або ***має виведення***, якщо існує ***замкнене*** семантичне дерево з коренем Σ. Таке дерево називають виведенням множини формул Σ.

Тривіальне семантичне дерево замкнене, якщо це замкнена множина формул.

Нетривіальне семантичне дерево замкнена, якщо кожний його лист (кінцева вершина, відмінна від кореня) – замкнена множина формул.

Опишемо умови замкненості множини формул. Спочатку наведемо необхідні визначення.

Прикладами формул $\exists x\Phi$, $\neg\exists x\Phi$ назвемо відповідно формули вигляду $R_y^x(\Phi), \neg R_y^x(\Phi)$.

Для множини формул Σ запис $\Sigma_J(d) = T$ далі буде означати, що $\Phi_J(d) = T$ для кожної $\Phi \in \Sigma$.

Прикладами формул $\exists x\Phi$ чи $\neg\exists x\Phi$ можуть бути лише формули вигляду $R_y^x(\Phi)$ чи $\neg R_y^x(\Phi)$, де y – означене. Тому при побудові виведень треба враховувати множини означених та неозначених предметних імен. Виділення означених та неозначених імен робимо за допомогою ПС вигляду εx, які є іменами відповідних предикатів-індикаторів εx.

Таким чином, при побудові виведення використовуємо збагачені множини, до складу яких можуть входити символи εx. В наших численнях предикати-індикатори εx є допоміжним інструментом побудови виведень, тому символи εx не входять до складу інших формул, вони можуть фігурувати лише як окремі атомарні формули. Початкова множина формул, для якої будуємо виведення, не містить символів εx.

Введемо для $\Gamma \subseteq Fr$ множини *означених* та *неозначених* предметних імен, або множини *val*-змінних та *unv*-змінних:

$$val(\Gamma) = \{x \in V \mid \neg\varepsilon x \in \Gamma\};\ unv(\Gamma) = \{x \in V \mid \varepsilon x \in \Gamma\}.$$

Множину *нерозподілених* для Γ імен введемо так: $ud(\Gamma) = nm(\Gamma) \setminus (val(\Gamma) \cup unv(\Gamma))$.

Rs-формою *R*-формули $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$, де $\{\bar{u}\} \subseteq \nu(\Phi)$, назвемо *R*-формулу $R_{\bar{z}}^{\bar{v}}(\Phi)$, утворену із $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$ спрощенням зовнішньої реномінації на основі властивостей *RI*, *RU* та *R* (*R* може дати *Rs*-форму Φ, яка не є *R*-формулою).

Властивості *RI*, *RU*, *R* гарантують:

якщо Ψ та ϑ мають однакові *Rs*-форми, то для всіх *J* маємо $T(\Psi_J) = T(\vartheta_J)$ та $F(\Psi_J) = F(\vartheta_J)$.

Нехай $Un = unv(\Gamma)$, формула $R_{s_1,\ldots,s_k,y_1,\ldots,y_n,v_1,\ldots,v_m}^{r_1,\ldots,r_k,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m}\Phi$ така: $\{r_1,\ldots,r_k, s,\ldots,s_k, y_1,\ldots,y_n\} \subseteq Un$, $\{x_1,\ldots,x_n, v_1,\ldots,v_m\} \cap Un = \varnothing$.

Вираз $R_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon,v_1,\ldots,v_m}^{x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m}\Phi$, де ε позначає невизначене значення, назвемо *Un-unv*-формою формули $R_{s_1,\ldots,s_k,y_1,\ldots,y_n,v_1,\ldots,v_m}^{r_1,\ldots,r_k,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m}\Phi$.

Зауважимо, що *Un-unv*-форма *R*-формули Ψ може "втратити" зовнішню реномінацію (якщо отримуємо порожню реномінацію). Для формули Ψ, яка не є *R*-формулою, її *Un-unv*-форма збігається із самою Ψ.

R-формули Ψ та Ξ назвемо *Rs-unv-еквівалентними відносно Un*, або *Rs-Un-еквівалентними*, якщо Ψ та Ξ мають однакові *Rs*-форми, або ці *Rs*-форми мають однакові *Un-unv*-форми.

Якщо Ψ та Ξ *Rs-Un*-еквівалентні, то $\neg\Psi$ та $\neg\Xi$ теж назвемо *Rs-Un*-еквівалентними.

Будемо вважати, що кожна $\Phi \in Fr$ *Rs-Un*-еквівалентна сама собі (рефлексивність).

Твердження 3. Якщо формули Ψ та Ξ *Rs-Un*-еквівалентні, то для кожної інтерпретації *J* із виділеною *Un* маємо $T(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = T(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A$ та $F(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = F(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A$.

Це означає, що $\Psi_J(d) = \Xi_J(d)$ для кожних *J* та $d \in {}^{V}A$, для яких $\varepsilon u(d) = T$ для всіх $u \in Un$ (тобто $asn(d) \cap Un = \varnothing$).

На основі твердження 3 доводиться

Теорема 1. Нехай $\Gamma \subseteq Fr$, $Un = \{x \mid \varepsilon x \in \Gamma\}$, нехай формули Ψ та Ξ – *Rs-Un*-еквівалентні. Тоді $\Phi, \neg\Psi, \Gamma$ невиконувана та $\neg\Phi, \Psi, \Gamma$ невиконувана.

Поняття замкненої множини формул вводимо так, щоб виконувалась умова:

якщо множина формул Γ замкнена, то Γ невиконувана.

Базові форми декомпозиції та умови замкненості множини формул. *QSF*-числення задається базовими формами декомпозиції та умовами замкненості (невиконуваності) множини формул.

Умова замкненості множини формул Γ із множиною *unv*-змінних *Un* (ця умова індукована теоремою 1):

C) існують *Rs-Un*-еквівалентні формули Ψ та Ξ такі: $\Psi \in \Gamma$ та $\neg\Xi \in \Gamma$;

зокрема, якщо існує формула Φ така: $\Phi \in \Gamma$ та $\neg\Phi \in \Gamma$.

Наведемо базові форми декомпозиції *QSF*-числень.

Допоміжні форми спрощення:

$$\mathrm{R}\ \frac{\Phi, \Sigma}{R(\Phi), \Sigma}; \qquad \neg\mathrm{R}\ \frac{\neg\Phi, \Sigma}{\neg R(\Phi), \Sigma};$$

$$\mathrm{RI}\ \frac{R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}; \qquad \neg\mathrm{RI}\ \frac{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Sigma};$$

$$\mathrm{RU}\ \frac{R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}, \text{ де } y \in \nu(\Phi); \qquad \neg\mathrm{RU}\ \frac{\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}, \text{ де } y \in \nu(\Phi).$$

Основні базові форми:

$$\mathrm{RR}\ \frac{R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi), \Sigma}{R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma}; \qquad \neg\mathrm{RR}\ \frac{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi), \Sigma}{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma};$$

$$\mathrm{R}\neg\ \frac{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma}; \qquad \neg\mathrm{R}\neg\ \frac{\neg\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma};$$

$$\mathrm{R}\vee\ \frac{R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi),\Sigma}{R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};\qquad \neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi),\Sigma}{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};$$

$$\mathrm{R}\exists\mathrm{s}\ \frac{\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma}{R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma},\text{ де } y\notin\{\bar{v},\bar{x}\};\qquad \neg\mathrm{R}\exists\mathrm{s}\ \frac{\neg\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Sigma}{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma},\text{ де } y\notin\{\bar{v},\bar{x}\};$$

$$\neg\neg\ \frac{\Phi,\ \Sigma}{\neg\neg\Phi,\ \Sigma};$$

$$\vee\ \frac{\Phi,\ \Sigma\qquad \Psi,\ \Sigma}{\Phi\vee\Psi,\ \Sigma};\qquad \neg\vee\ \frac{\neg\Phi,\ \neg\Psi,\ \Sigma}{\neg(\Phi\vee\Psi),\ \Sigma};$$

$$\mathrm{R}\exists\ \frac{\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(\Phi),\Sigma}{R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma},\text{ де } z\in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi));\qquad \neg\mathrm{R}\exists\ \frac{\neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(\Phi),\Sigma}{\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi),\Sigma},\text{ де } z\in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi));$$

$$\exists\ \frac{R_z^x(\Phi),\neg\varepsilon z,\Sigma}{\exists x\Phi,\Sigma}\text{ за умови: } z\in fu(\Sigma,\exists x\Phi);\qquad \neg\exists\ \frac{\neg\exists x\Phi,\ \neg R_y^x(\Phi),\neg\varepsilon y,\Sigma}{\neg\exists x\Phi,\neg\varepsilon y,\Sigma}\ (\text{тут } \varepsilon y\notin\Sigma).$$

Форма ε-розподілу (застосовується при елімінації кванторів перед застосуванням $\neg\exists$):

$$\varepsilon\mathrm{d}\ \frac{\varepsilon x,\ \Sigma\qquad \neg\varepsilon x,\ \Sigma}{\Sigma}\text{ за умови: } \varepsilon x \text{ не входить до } \Sigma.$$

Теорема 2 (основна властивість форм декомпозиції). Нехай $\frac{\Sigma}{\Delta}$ та $\frac{\mathrm{X}\quad \mathrm{Y}}{\Omega}$ – базові форми. Тоді:

1) Σ невиконувана $\Leftrightarrow$ Δ невиконувана; X невиконувана та Y невиконувана $\Leftrightarrow$ Ω невиконувана;
2) Σ має модель $\Leftrightarrow$ Δ має модель; Ω має модель $\Leftrightarrow$ X має модель або Y має модель.

Твердження п.1 та п. 2 еквівалентні, тому доводимо для п. 2.

Для однозасновкових форм R, ¬R, RI, ¬RI, RU, ¬RU, RR, ¬RR, R¬, ¬R¬, R∨, ¬R∨, R∃s, ¬R∃s, R∃, ¬R∃, ¬¬ твердження теореми випливає з наступного факту. Нехай Φ та Ψ – виділені формули засновку та висновку такої форми; тоді для кожної інтерпретації J та $d\in{}^VA$ маємо $\Phi_J(d) = \Psi_J(d)$.

Форма $\vee$. Покажемо: $\Phi\vee\Psi,\Sigma$ має модель $\Leftrightarrow$ Φ,Σ має модель або Ψ,Σ має модель.

Для довільних інтерпретації J та $d\in{}^VA$ маємо $\Phi\vee\Psi_J(d) = T \Leftrightarrow \Phi_J(d) = T$ або $\Psi_J(d) = T$. Звідси отримуємо: $\Phi\vee\Psi,\Sigma$ має модель $\Leftrightarrow$ $\Phi\vee\Psi_J(d) = T$ та $\Sigma_J(d) = T$ для деяких інтерпретації J та $d\in{}^VA$ $\Leftrightarrow$ $\Phi_J(d) = T$ та $\Sigma_J(d) = T$ для деяких J та $d\in{}^VA$ або $\Psi_J(d) = T$ та $\Sigma_J(d) = T$ для деяких J та $d\in{}^VA$ $\Leftrightarrow$ Φ,Σ має модель або Ψ,Σ має модель.

Форма $\neg\vee$. Покажемо: $\neg(\Phi\vee\Psi),\Sigma$ має модель $\Leftrightarrow$ $\neg\Phi,\neg\Psi,\Sigma$ має модель.

Для довільних інтерпретації J та $d\in{}^VA$ маємо $\neg(\Phi\vee\Psi)_J(d) = T \Leftrightarrow \neg\Phi_J(d) = T$ та $\neg\Psi_J(d) = T$. Звідси отримуємо: $\neg(\Phi\vee\Psi),\Sigma$ має модель $\Leftrightarrow$ $\neg(\Phi\vee\Psi)_J(d) = T$ та $\Sigma_J(d) = T$ для деяких інтерпретації J та $d\in{}^VA$ $\Leftrightarrow$ $\neg\Phi_J(d) = T$, $\neg\Psi_J(d) = T$ та $\Sigma_J(d) = T$ для деяких J та $d\in{}^VA$ $\Leftrightarrow$ $\neg\Phi,\neg\Psi,\Sigma$ має модель.

Форма $\exists$. За умови $z\in fu(\Sigma,\exists x\Phi)$ покажемо: $\exists x\Phi,\Sigma$ має модель $\Leftrightarrow$ $R_z^x(\Phi),\neg\varepsilon z,\Sigma$ має модель.

Доведемо $\Rightarrow$. Нехай $\exists x\Phi,\Sigma$ має модель, тобто існують інтерпретація J та $d\in{}^VA$ такі, що $\exists x\Phi_J(d) = T$ та $\Sigma_J(d) = T$. Але $z\in fu(\Sigma,\exists x\Phi)$, тому для кожного $a\in A$ маємо $\exists x\Phi_J(d\nabla z\mapsto a) = T$ та $\Sigma_J(d\nabla z\mapsto a) = T$. Із $\exists x\Phi_J(d\nabla z\mapsto a) = T$ тоді $\Phi_J(d\nabla z\mapsto a\nabla x\mapsto b)$ для деякого $b\in A$, звідки $\Phi_J(d\nabla z\mapsto a\nabla x\mapsto b) = T$. Тоді при $a = b$ маємо $\Phi_J(d\nabla z\mapsto b\nabla x\mapsto b) = T$ та $\Sigma_J(d\nabla z\mapsto b) = T$ Із останнього $R_z^x(\Phi)_J(d\nabla z\mapsto b) = T$. Проте $\neg\varepsilon z(d\nabla z\mapsto b) = T$, тому $R_z^x(\Phi),\neg\varepsilon z,\Sigma$ має модель.

Доведемо $\Leftarrow$. Нехай $R_z^x(\Phi),\neg\varepsilon z,\Sigma$ має модель, тобто існують інтерпретація J та $d\in{}^VA$ такі: $R_z^x(\Phi)_J(d) = T$, $\neg\varepsilon z(d) = T$, $\Sigma_J(d) = T$. Із $\neg\varepsilon z(d) = T$ маємо $d(z) = b$ для деякого $b\in A$, із $R_z^x(\Phi)_J(d) = T$ маємо $\Phi_J(d\nabla x\mapsto d(z)) = T$, звідки $\Phi_J(d\nabla x\mapsto b) = T$, що дає $\exists x\Phi_J(d) = T$. Отже, $\exists x\Phi,\Sigma$ має модель.

Форма $\neg\exists$. Покажемо: $\neg\exists x\Phi,\neg\varepsilon y,\Sigma$ має модель $\Leftrightarrow$ $\neg\exists x\Phi,\neg R_y^x(\Phi),\neg\varepsilon y,\Sigma$ має модель.

Твердження $\Leftarrow$ очевидне. Доведемо твердження $\Rightarrow$. Нехай $\neg\exists x\Phi,\neg\varepsilon y,\Sigma$ має модель, тобто існують інтерпретація J та $d\in{}^VA$ такі, що $\neg\exists x\Phi_J(d) = T$, $\neg\varepsilon y(d) = T$ та $\Sigma_J(d) = T$. Із $\neg\varepsilon y(d) = T$ отримуємо $d(y) = b$ для деякого $b\in A$. Із $\neg\exists x\Phi_J(d) = T$ отримуємо $\exists x\Phi_J(d) = F$, звідки $\Phi_J(d\nabla x\mapsto a) = F$ для кожного $a\in A$, зокрема, $\Phi_J(d\nabla x\mapsto b) = F$, що дає $\Phi_J(d\nabla x\mapsto d(y)) = F$. Звідси $R_y^x(\Phi)_J(d) = F$, тому $\neg R_y^x(\Phi)_J(d) = T$. Таким чином, $\neg\exists x\Phi,\neg R_y^x(\Phi),\neg\varepsilon y,\Sigma$ має модель.

Форма εd. Покажемо: Σ має модель $\Leftrightarrow$ $\varepsilon x,\Sigma$ має модель або $\neg\varepsilon x,\Sigma$ має модель.

Твердження $\Leftarrow$ очевидне. Доведемо твердження $\Rightarrow$.

Нехай Σ має модель, тобто існують інтерпретація J та $d\in{}^VA$ такі, що $\Sigma_J(d) = T$. Можливі два випадки.

Якщо $x\in asn(d)$, то $\neg\varepsilon x(d) = T$, звідки $\neg\varepsilon x,\Sigma$ має модель. Якщо $x\notin asn(d)$, то $\varepsilon x(d) = T$, звідки $\varepsilon x,\Sigma$ має модель.

Побудова семантичного дерева. Теорема коректності. Опишемо побудову семантичного дерева для заданої множини формул Σ (скінченної або зліченної). При цій побудові форми застосовуються від висновку (множина формул під рискою) до засновків (множина формул над рискою), тобто ми спрощуємо виділену формулу чи розкладаємо її на компоненти. Побудова дерева розбита на етапи. Вона починається з кореня – множини Σ. Кожне застосування форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул.

Формули вигляду εx та $\neg\varepsilon x$ індукуються формами елімінації кванторів та формами ε-розподілу, тому вони не можуть бути в складі початкової множини формул Σ.

На початку виведення множини Σ виконуємо первісне означення – збагачуємо Σ формулою $\neg\varepsilon z$ такою, що $z\in fu(\Sigma)$, тобто переходимо до множини $\neg\varepsilon z,\Delta$. Це дає непорожність множини означених імен для кожної вершини, окрім кореня дерева, що надалі гарантує застосовність форм $\neg\exists$. Коректність первісного означення гарантує властивість εv.

На початку кожного етапу для кожної незамкненої множини-листа дерева робимо крок доступу: додаємо наступну формулу до списку доступних. На початку побудови доступна лише єдина формула.

Перед кожним виконанням форми перевіряємо, чи буде відповідна множина-лист замкненою.

При появі замкненої множини формул процес побудови семантичного дерева на цьому шляху обривається.

Якщо всі листи побудованого семантичного дерева замкнені, то ми отримали замкнене семантичне дерево, побудова завершена позитивно.

Якщо ні, то у випадку побудови семантичного дерева для скінченної множини формул додатково перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною множиною. Незамкнена вершина Ω будованого дерева для Σ – *фінальна*, якщо до неї вже незастосовна жодна форма, або якщо кожне застосування форми до Ω не вводить нових формул, відмінних від формул вершин на шляху від Σ до Ω. Поява фінальної множини означає ситуацію повторення незамкненої множини на даному шляху. Це сигналізує про наявність в семантичному дереві шляху (від кореня до даної фінальної множини), всі вершини якого незамкнені. Такий шлях назвемо *незамкненим.* Його поява засвідчує: побудова семантичного дерева завершена негативно.

Нехай на початок етапу після додавання до листа нової доступної формули маємо множину формул η. Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули η. До кожної активної формули далі застосовуємо відповідну форму. Після застосування форми утворені нею формули на даному етапі пасивні, до таких формул на цьому етапі форми не застосовуються. При появі відповідної ситуації усуваємо тотожні реномінації, тотожні пари імен та пари імен реномінацій з неістотним верхнім іменем, застосовуючи належну допоміжну форму R, $\neg$R, RI, $\neg$RI, RU, $\neg$RU.

Застосування форм елімінації кванторів має особливості.

Нехай Ξ – множина доступних формул на шляху від кореня до даної η. Нехай $Vl = val(\Xi)$, $Ud = ud(\Xi)$.

При застосуванні форми $\exists$ кожен раз беремо нове тотально неістотне ім'я z.

Кожна форма $\neg\exists$ виконується багатократно, для кожного нового $y \in Vl$.

Якщо в момент переходу до виконання форми $\neg\exists$ маємо $Ud \neq \varnothing$, то наявні *нерозподілені* імена. Тому за допомогою εd-форми робимо всеможливі розподіли імен із Ud на означені та неозначені. Це веде до побудови піддерева висоти $m = |Ud|$ з вершиною η, звідки отримуємо 2^m наступників множини η. Далі в кожному з цих наступників виконуємо відповідну форму $\neg\exists$.

Після виконання кожної форми перевіряємо множину-вершину на замкненість. При появі замкненої множини до неї незастосовна жодна форма, процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Таким чином, при побудові семантичного дерева можливі такі випадки:

1) побудову завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;

2) побудову завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево;

3) побудова не завершується, маємо нескінченне дерево. За лемою Кеніга [8] нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях.

У випадках 2) і 3) в семантичному дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені множини формул. Кожна з формул початкової множини-кореня Σ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Теорема 3 (коректності). Нехай множина формул Σ вивідна. Тоді Σ невиконувана.

Нехай множина формул Σ вивідна, тоді для Σ побудовано замкнене семантичне дерево. Із процесу побудови дерева випливає: кожна множина-вершина Λ цього лерева невиконувана. Для листів семантичного дерева це випливає з визначення замкненої множини формул. Збереження формами невиконуваності множини формул (від засновків до висновку) випливає з теореми 2. Таким чином, корінь дерева – множина формул Σ – теж невиконувана.

Повнота числень виконуваних множин. Теорема повноти *QSF*-числень опирається на теорему про існування моделі виконуваності для множини формул незамкненого шляху. Для доведення теореми про існування моделі використовується метод модельних (хінтікківських) множин.

Теорема 4. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у семантичному дереві, збудованій для множини формул Σ, нехай H – множина всіх формул цього шляху. Тоді існують інтерпретація $J = (A, I)$ та $\delta \in {}^{V}\!A$ такі:

$\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\neg\Phi \in H \Rightarrow \neg\Phi_A(\delta) = T$.

Таку пару (A, δ) назвемо *S*-моделлю множини формул Σ.

Доведення. Задамо $W = val(H) = \{y \in nm(H) \mid \neg\varepsilon y \in H\}$ та $Un = unv(H) = \{y \in nm(H) \mid \varepsilon y \in H\}$. Якщо $Un = \varnothing$ (тоді форми $\neg\exists$, тому й форми εd, не застосовувались), то візьмемо $W = nm(H)$.

Усі множини формул шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості С. Застосування форм до формул шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула на шляху $\wp$ буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною формою. Отже, для H виконується така умова коректності:

НС) не існує *Rs*-*Un*-еквівалентних формул Ψ та Ξ таких, що $\Psi \in H$ та $\neg\Xi \in H$;

зокрема, не існує формули Φ (зокрема, примітивної) такої, що $\Phi \in H$ та $\neg\Phi \in H$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої відбуваються згідно з відповідною формою декомпозиції, тому для H виконуються такі умови переходу:

HR) $R(\Phi) \in H \Rightarrow \Phi \in H$; $\neg R(\Phi) \in H \Rightarrow \neg\Phi \in H$;

HRI) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in H \Rightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$; $\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in H \Rightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$;

HRU) за умови $y \in \nu(\Phi)$ маємо: $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in H \Rightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$; $\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in H \Rightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$;

HRR) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in H \Rightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi) \in H$; $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in H \Rightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi) \in H$;

HR$\neg$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$; $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in H \Rightarrow \neg\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$;

HR$\vee$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi) \in H$; $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \neg(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)) \in H$;

HR$\exists$s)за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ маємо: $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi) \in H \Rightarrow \exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$; $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi) \in H \Rightarrow \neg\exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in H$;

HR∃)за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ маємо: $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H \Rightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in H$; $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H \Rightarrow \neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in H$;

H¬¬) $\neg\neg\Phi \in H \Rightarrow \Phi \in H$;

H∨) $\Phi\vee\Psi \in H \Rightarrow \Phi \in H$ або $\Psi \in H$; $\neg(\Phi\vee\Psi) \in H \Rightarrow \neg\Phi \in H$ та $\neg\Psi \in H$;

H∃) $\exists x\Phi \in H \Rightarrow$ існує $y \in W$ таке, що $R_y^x(\Phi) \in H$; $\neg\exists x\Phi \in H \Rightarrow \neg R_y^x(\Phi) \in H$ для всіх $y \in W$;

Множину формул *H*, для якої виконуються наведені умови, назвемо *S*-модельною.
Побудуємо *S*-модель за *S*-модельною множиною *H*.
Візьмемо множину *A* таку, що $|A| = |W|$, та ін'єктивну $\delta \in {}^V A$ з $asn(\delta) = W$. Така *A* дублює *W*.
Для предикатів-індикаторів маємо: $\varepsilon y \in H \Rightarrow \varepsilon y(\delta) = T$; $\neg\varepsilon y \in H \Rightarrow \neg\varepsilon y(\delta) = T$;

Задамо значення базових предикатів та їх заперечень на δ та на іменних множинах вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$:

– $p \in H \Rightarrow p_J(\delta) = T$, $\neg p \in H \Rightarrow \neg p_J(\delta) = T$;

– $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow p_J(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$; $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in H \Rightarrow \neg p_J(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$.

Для примітивних формул та їх заперечень твердження теореми випливає з визначення базових предикатів.
Далі доводимо традиційно: індукцією за складністю формули згідно з пунктами визначення множини *H*.
Наведемо для прикладу доведення для пп. HRI, HRR, HR∃, H¬¬, H∨, H∃.

Нехай $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H$. За HRI $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$. За припущенням індукції для δ $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J(\delta) = T$, звідки $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_J(\delta) = T$. Нехай $\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H$. За HRI $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H$. За припущенням індукції для δ тоді $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J(\delta) = T$, звідки $\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_J(\delta) = T$.

Нехай $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H$. За HRR тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi) \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)_J(\delta) = T$, звідки $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_J(\delta) = T$. Нехай $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H$. За HRR тоді $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi) \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)_J(\delta) = T$, звідки $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_J(\delta) = T$.

Нехай $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H$ та $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$. За HR∃ маємо $\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in H$. За припущенням індукції для δ тоді $\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)_J(\delta) = T$, звідки $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_J(\delta) = T$. Нехай $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in H$ та $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$. За HR∃ тоді $\neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)_J(\delta) = T$, звідки $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_J(\delta) = T$.

Нехай $\neg\neg\Phi \in H$. За H¬¬ тоді $\Phi \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $\Phi_J(\delta) = T$, звідки $\neg\neg\Phi_J(\delta) = T$.

Нехай $\Phi\vee\Psi \in H$. За H∨ тоді $\Phi \in H$ або $\Psi \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $\Phi_J(\delta) = T$ або $\Psi_J(\delta) = T$, звідки $\Phi\vee\Psi_J(\delta) = T$. Нехай $\neg(\Phi\vee\Psi) \in H$. За H∨ тоді $\neg\Phi \in H$ та $\neg\Psi \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg\Phi_J(\delta) = T$ та $\neg\Psi_J(\delta) = T$, звідки $\neg(\Phi\vee\Psi)_J(\delta) = T$.

Нехай $\exists x\Phi \in H$. За H∃ тоді існує $y \in W$ таке, що $\exists x\Phi \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $R_y^x(\Phi)_J(\delta) = T$. Звідси $\Phi_J(\delta\nabla x \mapsto \delta(y)) = T$. Однак $\delta(y)\downarrow$ згідно з $\delta \in {}^W A$ та $y \in W$, тому для $a = \delta(y)$ отримуємо $\Phi_J(\delta\nabla x \mapsto a) = T$, звідки $\exists x\Phi_J(\delta) = T$.

Нехай $\neg\exists x\Phi \in H$. За H∃ тоді для всіх $y \in W$ маємо $\neg R_y^x(\Phi) \in H$. За припущенням індукції для δ маємо $\neg R_y^x(\Phi)_J(\delta) = T$ для всіх $y \in W$. Звідси $R_y^x(\Phi)_J(\delta) = F$ для всіх $y \in W$, тому $\Phi_J(\delta\nabla x \mapsto \delta(y)) = F$ для всіх $y \in W$. Згідно з $\delta \in A^W$ маємо $\delta(y)\downarrow$ для всіх $y \in W$. Позаяк δ є бієкцією $W \to A$, то кожне $b \in A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W$. Отже, $\Phi_J(\delta\nabla x \mapsto b) = F$ для всіх $b \in A$, тому $\exists x\Phi_J(\delta) = F$, що дає $\neg\exists x\Phi_J(\delta) = T$.

На основі теореми про моделі отримуємо теорему повноти для *QSF*-числень.

Теорема 5 (повноти). Нехай Σ невиконувана. Тоді Σ має замкнене семантичне дерево.

Доведення. Припустимо супротивне: Σ не виконувана, проте семантичне дерево δ для Σ незамкнена. Отже, в δ існує незамкнений шлях. Нехай *H* – множина всіх формул цього шляху. Зрозуміло, що $\Sigma \subseteq H$. За теоремою 4 існує *S*-модель (*J*, δ) така: $\Phi \in H \Rightarrow \Phi_J(\delta) = T$ та $\neg\Phi \in H \Rightarrow \neg\Phi_J(\delta) = T$. Згідно з $\Sigma \subseteq H$ тоді $\Phi_J(\delta) = T$ для всіх $\Phi \in \Sigma$. Це суперечить невиконуваності Σ.

Висновки. В роботі побудовано спеціальні числення секвенційного типу для перевірки виконуваності множин формул в чистих першопорядкових логіках квазіарних предикатів – числення виконуваних множин. Виведення в цих численнях мають вигляд дерев, вершинами яких є множини формул. Такі дерева названо семантичними. Аксіомами пропонованих числень є замкнені (суперечливі) множини формул, правилами виведення – форми декомпозиції.

Проаналізовано застосовність традиційних секвенційних числень та числень виконуваних множин. Числення виконуваних множин застосовні лише для логік однозначних предикатів, адже методи перевірки виконуваності не працюють в логіках неоднозначних предикатів через тривіальність в цих логіках самого поняття виконуваності. Секвенційні числення використовуємо для перевірки наявності логічного наслідку, такі числення побудовано для різних відношень логічного наслідку в логіках як однозначних, так і тотальних чи часткових неоднозначних предикатів.

Для пропонованих числень виконуваних множин наведено умови замкненості множини формул та форми декомпозиції, описано побудову виведення. Для таких числень доведено теореми коректності й повноти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Handbook* of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford Univ. Press. – Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Нікітченко М. С., Шкільняк С. С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008.
3. *Шкільняк С. С.* Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік // Пробл. програмування. – 2013, № 3.
4. *Шкільняк С. С.* Секвенційні системи логічного виведення першопорядкових логік часткових предикатів // Компьютерная математика. – 2013, Вып. 2.
5. *Beth E. W.* Semantic Entailment and Formal Derivability // Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen (Amsterdam). – 1955, 18, No 13.
6. *Кривий С. Л.* Дискретна математика. – К., 2014.
7. *Нікітченко М. С., Шкільняк С. С.* Прикладна логіка. – К., 2013.
8. *Клини С.* Математическая логика. – М., 1973.
9. *Nikitchenko M., Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347.

Стаття надійшла до редколегії 28.09.15

Никитченко Н. С., д-р физ.-мат. наук, проф.
Шкильняк С. С., д-р физ.-мат. наук, проф.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИСЧИСЛЕНИЯ СЕКВЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНИМОСТИ В ЛОГИКАХ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Построены специальные исчисления для проверки выполнимости множеств формул в чистых первопорядковых логиках квазиарных предикатов – исчисления выполнимых множеств. Проанализированы применимость традиционных секвенциальных исчислений и исчислений выполнимых множеств. Для предложенных исчислений доказаны теоремы корректности и полноты.

Ключевые слова: *логика, предикат, исчисление, выполнимость, корректность и полнота*

Nikitchenko M.S. , Dr. Sci. Phys. Math., Professor
Shkilniak S.S. , Dr. Sci. Phys. Math., Professor
Taras Shevchenko National University of Kyiv

SEQUENT TYPE CALCULI FOR CHECKING SATISFIABILITY IN LOGICS OF QUASI-ARY PREDICATES

Special sequent calculi to check satisfiability of sets of formulas in pure first-order logics of quasiary predicates are constructed. They are called calculi of satisfiable sets. Axioms of the proposed calculi are closed (inconsistent) sets of formulas; inferences rules are forms of decomposition. Applicability of such calculi and traditional sequent calculi are analyzed. In logics of non-deterministic predicates the traditional notion of satisfiability becomes trivial therefore calculi of satisfiable sets are used only for logics of deterministic predicates. Moreover, sequent calculi are built for different relations of logical consequence both for deterministic and total and partial non-deterministic predicates. For the proposed calculi closedness conditions of sets of formulas and forms of decomposition are described. Soundness and completeness theorems are proved for the proposed calculi.

Key words: *logic, predicate, calculus, satisfiability, validity and completeness*

УДК 519.925

В. М. Петрович, канд. техн. наук, наук. співроб.,
Н. М. Требіна, пров. інж.-математик, К. В. Двірничук, наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З НЕПОВНО ВИЗНАЧЕНИМ КРАЙОВИМ СТАНОМ

Сформульовано та розв'язано задачу побудови інтегрального за Лапласом зображення функції стану довільної неповно за крайовими умовами спостережуваної одновимірно розподіленої динамічної системи за умов повної інформації про її початковий стан. Виконана оцінка точності отриманого розв'язку та сформульовані умови його однозначності.

Ключові слова: лінійно розподілені просторово-часові системи, функції Гріна,динамічний процес.

Вступ. Започаткована в [1] та розвинена в [2, 3] методика математичного моделювання впливу початково-крайових збурень на стан лінійно розподіленої просторово-часової системи дозволяє [2, 3] успішно розв'язувати прямі та обернені задачі динаміки таких систем за умов неповноти інформації про їх початково-крайовий стан. Обов'язковим елементом цієї методики є наявність функції Гріна досліджуваного процесу в необмеженій просторово-часовій області. Особливості побудови [4] цієї функції вимагають повторного контурного інтегрування в комплексно визначеній області, що супроводжується певними математичними труднощами. Нижче дається використання методики [4] побудови згаданої функції для неповноспостережуваного за крайовими умовами динамічного процесу, розподіленого в одновимірній просторовій області, за наявності повної інформації про його початковий стан. Розв'язуються задачі математичного моделювання функції стану процесу за неповноти інформації про його крайові умови.

1. Розглянемо динаміку розподіленого в області $S_0^T = \{s = (x,t):\ x_0 < x < x_1,\ 0 \le t \le T\}$ процесу, функція $y(x,t)$ стану якого визначається співвідношеннями

$$L(\partial_x, \partial_t) y(x,t) = u(x,t)\,, \tag{1}$$

$$L_r^0(\partial_t) y(x,t)\Big|_{t=0} = Y_r^0(x)\ \ (r = \overline{1,R_0})\ x \in [x_0, x_1], \tag{2}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(x,t)\Big|_{x=X^\Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x,t)\ \ (\rho = \overline{1,R_\Gamma})\ x \in X^\Gamma\,, \tag{3}$$

в яких $L(\cdot)$, $L_r^0(\cdot)\ \ (r = \overline{1,R_0})$, $L_\rho^\Gamma(\cdot)\ \ (\rho = \overline{1,R_\Gamma})$ − лінійні диференціальні оператори, а $X^\Gamma = \{x_0, x_1\}$. Розглянемо той випадок, коли кількість R_0 початкових співвідношень (2) узгоджена з порядком диференціального оператора $L(\cdot)$ за змінною t. На кількість R_Γ крайових співвідношень (3) особливих обмежень не накладатимемо.

Зважаючи на те, що побудова точного розв'язку сформульованої вище задачі по знаходженню функції $y(x,t)$ за відомих $u(x,t), Y_r^0(x)\ \ (r = \overline{1,R_0})$ та $Y_\rho^\Gamma(x,t)\ \ (\rho = \overline{1,R_\Gamma})$ є проблематичною, знайдемо $y(x,t)$, яке б, точно задовольняючи співвідношення (1), (2), з крайовими умовами (3) узгоджувалося за середньоквадратичним критерієм незалежно від кількості останніх. А це означає, що мусять виконуватися умови

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_0^T (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(x,t)\Big|_{x=x_i} - Y_\rho^\Gamma(x_i,t))^2 dt \to \min_{y(x,t)} \tag{4}$$

при $x \in X^\Gamma$.