УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, О. Зражевський, асп.
E-mail: vsa@univ.kiev.ua

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА ПЛОЩИНІ.

Розглянута задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині на основі їх спектрального розкладу. Обчислено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових полів. Наведена теорема про середньоквадратичну оцінку апроксимації таких випадкових полів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині.

The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the plane realizations has been considered, which was build on the base of it spectral decomposition. It has been calculate the spectral coefficients for the typical random fields examples . It has been give the theorem about the mean - square estimator of this random fields approximation by the partial sums.. It has been constructed the model and statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields algorithm.

1. Вступ

Розглядається задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині, розроблена на основі спектрального розкладу таких полів. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для деяких практично важливих прикладів кореляційних функцій випадкових полів, які використовуються у моделюючому алгоритмі.

Нехай $\xi(x)$ ($x \in R^2$) - дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле на площині. Як відомо [6], кореляційну функцію однорідного та ізотропного випадкового поля можна подати у вигляді інтегралу:

$$B(\rho) = \int_0^\infty J_0(\rho u) d\Phi(u), \tag{1}$$

де $\Phi(u)$ – обмежена незростаюча функція, що називається **спектральною функцією** випадкового поля, а $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Припустимо, що випадкове поле $\xi(x)$ - неперервне в середньому квадратичному. Позначимо через r та φ ($r \in R_+$,$\varphi \in [0, 2\pi]$) – полярні координати точки x на площині. При цьому, відстань між точками $x_1 = (r_1,\varphi_1)$ та $x_2 = (r_2,\varphi_2)$ буде рівною $\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\ r_1 r_2 \cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)}$. Тоді справедливе наступне твердження:

Теорема 1. Неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині $\xi(r,\varphi)$ можна подати у вигляді **спектрального розкладу:**

$$\xi(r,\varphi) = \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\nu^k} \left(\cos k\varphi \int_0^\infty J_k(ru) Z^1{}_k(du) + \sin k\varphi \int_0^\infty J_k(ru) Z^2{}_k(du) \right), \tag{2}$$

де $\nu^k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 2, & k > 0, \end{cases}$ $\left\{ Z^i{}_k(.) \right\}_{k=0}^{+\infty}$ $(i = 1,\ 2)$ - послідовність дійснозначних ортогональних випадкових мір на підмножинах Бореля із інтервалу $[0,+\infty)$, таких, що виконується умова:

$\mathrm{M} Z^i{}_k(S_1) Z^j{}_n(S_2) = \delta_i^j \delta_k^n \Phi(S_1 \cap S_2), (i, j = 1,\ 2)$, для будь-яких множин Бореля S_1 та S_2 із інтервалу $[0,+\infty)$, причому: $\Phi(S) = \int_S d\Phi((u)$. Доведення теореми міститься в роботі [4] .

Кореляційна функція такого випадкового поля має вигляд:

$$B(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathrm{M}\xi(r_1,\varphi_1)\xi(r_2,\varphi_2) = \int_0^\infty J_0(2ur \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) d\Phi(u) \cdot \tag{3}$$

Спектральні коефіцієнти в цьому випадку можна виразити через спектральну функцію так:

$$b_k(r) = 2\int_{0_-}^\infty J_k^2(ru) d\Phi(u). \tag{4}$$

Якщо скористатись співвідношенням 6.681 [2] та врахувати вираз (3), отримаємо зображення спектральних коефіцієнтів через кореляційну функцію, що залежить від $\sin\varphi$

$$b_k(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathrm{B}(2r \sin\varphi)\ \cos 2k\varphi d\varphi.\ k = 1,2,... \tag{5}$$

Можна також використати до виразу (4) співвідношення 6.681.5 [2] . Тоді матимемо зображення спектральних коефіцієнтів через кореляційну функцію, що залежить від $\cos\varphi$

$$b_k(r) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^\pi B(2r \cos\varphi) \cos 2k\varphi d\varphi,\ \ k = 1,2,... \tag{6}$$

Після теоретичних викладок перейдемо до розгляду прикладів кореляційних функцій для такого типу випадкових полів.

Приклад 1. Нехай спектральна функція $\Phi(u)$ – **ступінчата** функція, яка має скінчене число **p** стрибків (стрибки - в точках $c_1, c_2, ..., c_p$, а величини стрибків – $u_1, u_2, \dots, u_p$).
Тоді відповідна кореляційна функція зображається формулою:

$$B\ \ (\varphi_1 - \varphi_2) = \sum_{k=1}^p J_0\ \ (2\ \ c_k r \left| \sin\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right|)\ \ u_k. \tag{7}$$

Приклад 2. В геологічних науках знаходять застосування кореляційні функції випадкових полів, які називаються функціями **експоненціального** типу. Вони мають наступний вигляд:

$$B(t) = e^{-at}, \;\; a > 0. \tag{8}$$

Приклад 3. Розглянемо кореляційні функції , які називаються **Гауссівськими** кривими. Вони зображаються наступною формулою:

$$B(t) = e^{-at^2}, \;\; a > 0. \tag{9}$$

Приклад 4. Заслуговує уваги кореляційна функція **модифікованого Бесселевого** типу:

$$B(\rho) = a\rho K_1(a\rho), \;\; a > 0, \tag{10}$$

де $K_1(x)$ – функція Ганкеля.

Приклад 5. Наступна кореляційна функція виражається через добре відому **Бесселеву** функцію першого роду. Вона зображається формулою:

$$B(\rho) = \frac{2J_1(a\rho)}{a\rho}, \;\; a > 0. \tag{11}$$

Приклад 6. Наведемо широко відому кореляційну функцію, яка зветься **моделлю Коші**. Узагальнена **модель Коші** має вигляд:

$$B(\rho) = \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{-\alpha}, \;\; \alpha > 0, \; a > 0. \tag{12}$$

Ми будемо використовувати модель Коші при значенні параметра $\alpha = 1/2$. Вона виражається формулою:

$$B(\rho) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}, \;\; a > 0. \tag{13}$$

Спектральні коефіцієнти для прикладів 1-6 обчислено в роботі [4]. Далі наведено дуже важливі для практичного застосування приклади кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині та виведено формули для відповідних спектральних коефіцієнтів

Приклад 7. Часто знаходять застосування кореляційні функції **поліноміального** типу. Найпростішим прикладом такого типу є так звана **сферична** модель:

$$B(\rho) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\rho}{a} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^3, & \rho \le a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \tag{14}$$

При **a** $\in$ **[** π, $+\infty$ **)** знайдемо спектральні коефіцієнти кореляційної функції за формулою (5). Тоді отримаємо вираз:

$$b_k(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - 3\,\frac{r}{a}\,\sin\varphi + 4\left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin^3\varphi\right)\cos 2k\varphi\; d\varphi. \;\; k = 1, 2, ... \tag{15}$$

Для обчислення цього інтегралу скористаємося значенням табличного інтегралу із роботи [2, с. 388] :

$$\int_0^{\pi}\sin^{\nu-1}x\,\cos a x dx = \frac{\pi\,\cos\dfrac{a\,\pi}{2}}{2^{\nu-1}\,\nu\,\beta\left(\dfrac{\nu + a + 1}{2}, \dfrac{\nu - a + 1}{2}\right)}$$

Після деяких спрощень із (15) отримаємо вираз для спектральних коефіцієнтів кореляційної функції, що розглядається:

$$b_k(r) = \frac{r\,\cos k\,\pi\,(2\,r^2 - a^2\,(9 - 4\,k^2))}{8\,a^3\,\beta\left(\dfrac{5}{2} + k, \dfrac{5}{2} - k\right)}, \; k = 0, 1, 2, ..., \tag{16}$$

де $\beta(x, y)$ - бета-функція.

Приклад 8. На практиці часто зустрічається модель випадкових полів, яка має назву **експоненціально затухаючої косинусоїди**. Така кореляційна функція має вигляд:

$$B(\rho) = c\, e^{-a\rho}\cos\omega\rho, \; c > 0, \; a > 0, \; \omega > 0. \tag{17}$$

Знайдемо відповідні спектральні коефіцієнти кореляційної функції за формулою (6). Тоді отримаємо вираз:

$$b_k(r) = (-1)^k\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} c\exp(-a\;2\;r\cos\varphi)\cos(\omega 2\;r\cos\varphi)\cos 2k\varphi\; d\varphi, \; k = 1, 2, ... \tag{18}$$

Позначивши через $\alpha = a\;2\;r$ та $\beta = \omega\;2\;r$, обчислимо наступний інтеграл:

$$I = \int_0^{\pi} c\exp(-\alpha\cos\varphi)\cos(\beta\cos\varphi)\cos 2k\varphi\; d\varphi, \; k = 1, 2, ... \tag{19}$$

Скориставшись наступною формулою : $\cos(\beta\cos\varphi) = \frac{1}{2}\left[\exp(i\beta\cos\varphi) + \exp(-i\beta\cos\varphi)\right]$, розіб'ємо інтеграл (19) на два інтеграли I_1 та I_2:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{\exp\left[(-\alpha + i\beta)\cos\varphi\right] + \exp\left[(-\alpha - i\beta)\cos\varphi\right]\right\}\cos 2k\varphi\; d\varphi = \left(I_1 + I_2\right)/2, \; k = 1, 2, ... \tag{20}$$

Для обчислення першого інтегралу введемо наступне позначення : $\gamma_1 = -\alpha + \beta$. Тоді маємо:

$$I_{\ 1} = \int_0^{\pi} \exp\ \left(\gamma_1 \cos\ \ \varphi\right)\ \cos 2k\varphi\ \ d\varphi = \left| \begin{matrix} t = \cos\varphi & d\varphi = \dfrac{dt}{-\sqrt{1-t^2}} \\ d = -\sin\varphi\ \ d\varphi & \end{matrix} \right| =$$

$$I_{\ 1} = \int_1^{-1} \exp\ \left(\gamma_1\ \ t\right)\ \cos\ \ \left(2\ \ k \arccos t\right)\ \frac{dt}{-\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{1} \exp\ \left(\gamma_1\ \ t\right)\ \cos\ \ \left(2\ \ k \arccos t\right)\ \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (21)$$

Оскільки в підінтегральному виразі містяться многочлени Чебишева першого роду:

$$T_{\ 2\ k}\ (t) = 2\ \ k \arccos t,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ldots \qquad (22)$$

то внаслідок використання табличного інтегралу [5, с. 453] :

$$\int_{-a}^{a} \exp\left(i\,p\,x\right)\ T_n\left(\frac{x}{a}\right)\ \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = i^n \pi\, J_n\left(a\,p\right), \quad a > 0,$$

остаточно для першого інтегралу I_1 маємо вираз:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \exp\ \left(\gamma\ \ t\right)\ T_{2k}\ \ (t)\ \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = i^{2k}\ \ \pi\ \ J_{2k}\left(-i\ \ \gamma_1\right)\ = \left(-i\right)^k\ \ \pi\ \ J_{2k}\left(-i\ \ \gamma_1\right),\ a > 0. \qquad (23)$$

Аналогічно для другого інтегралу I_2 із формули (20) отримаємо:

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \exp\ \left(\gamma_2\ \ t\right)\ T_{2k}\ \ (t)\ \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left(-i\right)^k\ \ \pi\ \ J_{2k}\left(-i\ \ \gamma_2\right)\ ,\ \partial e\ \ \gamma_2 = -\alpha - i\beta. \qquad (24)$$

Підставляючи (23) та (24) у вираз (20), маємо для інтегралу I наступний вираз:

$$I\ = \frac{1}{2}\ \left(-i\right)^k\ \ \pi\ \left[J_{2k}\left(\beta + i\alpha\right)\ + J_{2k}\left(-\beta + i\alpha\right)\right]. \qquad (25)$$

Отже, враховуючи (25), можна отримати формулу для обчислення спектральних коефіцієнтів випадкових полів із кореляційною функцією типу **експоненціально затухаючої косинусоїди** у вигляді :

$$b_k(r) = c\ \left[J_{2k}\left(2\omega r + i\,2\,k\,r\right) + J_{2k}\left(-2\omega r + i\,2\,k\,r\right)\right]. \qquad (26)$$

Результати обчислень спектральних коефіцієнтів для практично важливих кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині наведено вnаступній таблиці.

***Таблиця 1*. Кореляційні та спектральні функції і відповідні спектральні коефіцієнти однорідних ізотропних випадкових полів на площині.**

N N	$B(\rho)$	$\Phi\ \ (\lambda)$	$b_k(r)$
1 1	$\sum_{m=1}^{s} p_m\ \ J_0\ \ (\ 2\ \ c_m\ \ \rho\ \ \left\lvert \sin\frac{\varphi}{2} \right\rvert\ ),$ $\sum_{m=1}^{s} p_m = 1,\ p_m > 0,\ \ c_m \geq 0.$	$\begin{cases} 0,\ \lambda \leq c_1, \\ \sum_{m=1}^{i} p_m,\ c_i < \lambda \leq c_{i+1},\ i = \overline{1, s-1} \\ 1,\ \lambda > c_s \end{cases}$	$2\ \ \sum_{m=1}^{s} p_m J_k^2\ \ (c_m\ \ \ r)$
2 2	$\exp\ \left\{\ -c\ \ \rho\right\},\ c > 0\ \ ,\ n \geq 1$	$\dfrac{c}{\pi}\ \dfrac{\lambda}{\left(\ \lambda^2 + c^2\ \right)^{\frac{3}{2}}}$	$2\ \ J_{2k}\ \ \ (2\ \ i\ \ c\ \ r)$
3 3	$\exp\ \left\{-c\ \ \rho^2\right\},\ c > 0$	$\Phi'(\lambda) = \dfrac{\lambda}{2\ \ c}\ \ \exp\ \left\{-\ \dfrac{\lambda^2}{2\ \ c}\right\}$	$\exp\ \left\{\ -2\ \ c\ \ \ r^2\right\}\ \ I_k\ \ \ (2\ \ \ c\ \ r^2)$ $I_k(x)$ – модифікована функція Бесселя
4 4	$2\ \ \dfrac{J_1(c\ \ \ \rho)}{c\ \ \ \rho}\ ,\ c \geq 0.$	$\begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{c}\right)^2, & 0 < \lambda < c, \\ 1, & \lambda \geq c. \end{cases}$	$2\left\lfloor J_k^2\ (c\,r) - J_{k+1}\ (c\,r)\ J_{k-1}(c\,r)\ \right\rfloor$
5 5	$c\ \ \rho\ \ \ K_1(c\ \ \ \rho),\ \ c > 0$	$\Phi'(\lambda)\ = 2\ \ \dfrac{c^2\lambda}{\left(\ \lambda^2 + c^2\ \right)^2}$	$2\ +\ 2\ \ (\ \ k - 2\ \ )\ \ K_k\left(c\ \ \ r\right)\ \ I_k\left(c\ \ \ r\right)$ де $\boldsymbol{K_1(x)}$ – функція Ганкеля
6 6	$\dfrac{c}{\sqrt{\rho^2 + c^2}},\ c > 0,\ \ n > 1.$	$\Phi'(\lambda)\ = c\ \ \ e^{-c\,\lambda}$	$\dfrac{2}{\pi}\ \dfrac{c}{r}\ \ Q_{k-\frac{1}{2}}\ \left(\dfrac{c^2 + 2\ \ r^2}{2\ \ r^2}\right),$ де $\boldsymbol{Q_p(y)}$ – функція Лежандра
7 7	$\begin{cases} 1\ -\ \dfrac{3}{2}\ \dfrac{\rho}{a}\ \ +\ \ \dfrac{1}{2}\ \left(\dfrac{\rho}{a}\right)^3, & \rho \leq a; \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$		$\dfrac{r\ \ \cos k\ \ \ \pi\ \ (2\ \ r^2 -\ a^2\ \ (9\ -\ 4\ \ k^2)\ )}{8\ \ a^3\ \ \ \beta\ \ \left(\dfrac{5}{2}\ +\ k,\ \dfrac{5}{2}\ -\ k\right)}$ де β ***(x,y)*** - бета-функція
8 8	$c\ \ e^{-a\,\rho}\ \ \cos\ \ \omega\rho\ ,$ $c\ ,\ a\ ,\ \omega > 0,\ \ \rho \in \left[\ \ 0,\ 1\right]$		$c\ \left[\ J_{2k}\ \ \ (2\ \ \ \omega\ \ \ r + i\ \ \ 2a\ \ \ r) +\right.$ $\left.+\ \ J_{2k}\ \ \ (-2\ \ \ \omega r\ \ +\ \ i\ \ \ 2\ \ \ a\ \ \ r)\ \ \right]$

Отримані спектральні коефіцієнти можна використовувати для статистичного моделювання випадкових полів за алгоритмом, сформульованим у роботі [7] . Наведемо його.

За статистичну **модель** випадкового поля, що розглядається, приймається часткова сума ряду (2) виду:

$$\xi_N(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{N}\sqrt{\nu_k}\left[\cos k\varphi\int_0^\infty J_k(\lambda r)\, Z_k^1(d\lambda)+\sin k\varphi\int_0^\infty J_k(\lambda r)\, Z_k^2(d\lambda)\right], \tag{27}$$

де **N** – деяке натуральне число.

При цьому значення числа **N** визначається за допомогою нерівності, яка є оцінкою наближення випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ частковими сумами $\xi_N(r,\varphi)$ в середньому квадратичному. Таке число має відповідати наперед заданому як завгодно малому числу **ε -** точності наближення. Згадана нерівність отримана в роботі [7] (доведення наведено далі).

Теорема 2. Нехай виконується умова $\int_0^\infty \lambda^2\, d\Phi(\lambda)<+\infty$.Тоді справедлива оцінка:

$$M\left[\xi(r,\varphi)-\xi_N(r,\varphi)\right]^2\le\frac{1}{\pi N}\left(\frac{1}{2}r\mu_1+r^2\mu_2\right), \tag{28}$$

де $\mu_k=\int_0^\infty \lambda^k d\Phi(\lambda)$.

Доведення:

Для доведення достатньо зауважити, що: $M\int_{|x|\le Q}\left[\xi(r,\varphi)-\xi_N(r,\varphi)\right]^2 dx=2\sum_{k=N+1}^{\infty}\int_0^\infty J_k^2(\lambda r)\,d\Phi(\lambda)$

та застосувати твердження наступної леми .

Лема . Для кожного дійсного та натурального справедлива нерівність:

$$\sum_{kN+1}^{\infty}J_k^2(z)\le\frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right). \tag{29}$$

Доведення: Приймемо до уваги теорему додавання для бесселевих функцій - співвідношення 8.531 [1]:

$$J_0\left(\lambda\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\right)=J_0(\lambda r_1)J_0(\lambda r_2)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k(\lambda r_1)J_k(\lambda r_2)\cos k(\varphi_1-\varphi_2).$$

Звідси випливає, що : $J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)=J_0^2(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_k^2(z)\cos k\varphi.$

Це означає, що$\left\{2J_k^2(z),\ m\ge1\right\}$ є послідовність коефіцієнтів Фур'є функції $J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

Друга похідна цієї функції дорівнює:

$$\left[J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]''=\frac{1}{2}z\sin\frac{\varphi}{2}J_1\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{2}z^2\cos^2 k\varphi\left[J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)-J_2\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Звідси випливає: $\sup_{-\pi\le\varphi\le\pi}\left[J_0\left(2z\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]''\le\frac{1}{2}|z|+z^2.$ Тому справедлива нерівність: $2J_k(z)\le\dfrac{\frac{1}{2}|z|+z^2}{k^2\pi}.$

Отже, остаточно отримаємо: $\sum_{k=N+1}^{\infty}J_k^2(z)\le\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right)\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le$

$$\le\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right)\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{\pi N}\left(\frac{1}{2}|z|+z^2\right).$$

Лема **доведена**.

На основі моделі (27) та оцінки (28) можна побудувано алгоритм статистичного моделювання гауссівського однорідного ізотропного випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ на площині, яке задається своїми статистичними характеристиками: математичним сподіванням та кореляційною функцією.

2. Алгоритм.

1. Визначається значення числа **N**, відповідно наперед заданому числу **ε,** за допомогою нерівності (28) :

$$\frac{1}{\pi N}\left(\frac{1}{2}r\mu_1+r^2\mu_2\right)\le\varepsilon$$

, де **r** – радіус точки площини, в якій генерується реалізація випадкового поля $\xi(r,\varphi)$.

2. Обчислюються спектральні коефіцієнти $b_k(r)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ для прикладу кореляційної функції, що моделюється.

3. Генеруються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{\zeta_k(r),\ k=0,1,2,\ldots,N\}$ та $\{\eta_k(r),\ k=0,1,2,\ldots,N\}$.

4. Обчислюються значення реалізації у вигляді суми при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин :

$$\xi_N(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{N}\sqrt{\nu_k b_k(r)}\left[\zeta_k(r)\cos k\varphi+\eta_k(r)\sin k\varphi\right]. \tag{30}$$

5. Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ за допомогою програм **S-Plus, GeoR** і порівнюється із заданою кореляційною функцією $B(\rho)$, а також проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

3.Висновки

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу ,а не лише з гаусівським.

1.Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.- М., 1974. 2. *Вижва З.О.* Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 1) //Вісн. Київ. ун-ту. Математика і Механіка. – 2003. - Вип.10. – С.85-91. 3. *Вижва З.О.* Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 2) //Вісн. Київ. ун-ту. Математика і Механіка. —2004. - Вип. 11-12. – С.20-24. 4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М., 1971. 5. *Прудников А.П., БричковЮ.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды: специальные функции. - М, 1983. 6.*Ядренко М.И.* Спектральная теория случайных полей. - К., 1980. 7. *Grikh Z.,Yadrenko M., Yadrenko O.* About Approximation and Statistical Simulation of Izotropic Fields. //Rand. Operators and Stoh. Eq.- 1993. - Vol. 1, No. 1, - P. 37-45.

Надійшла до редколегії 02.10.2007