УДК 517.9

Ю. Вакал, студ., І. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук
Vakal@ipnet.ua, pio@univ.kiev.ua

ОЦІНКА ХАУСДОРФОВОЇ РОЗМІРНОСТІ МНОЖИНИ КОЛМОГОРОВСЬКИХ ТОРІВ, ЧАСТОТИ ЯКИХ ПОГАНО АПРОКСИМУЮТЬСЯ РАЦІОНАЛЬНИМИ ЧИСЛАМИ

Для гамільтонової системи з двома ступенями волі, близької до цілком інтегровної, оціненено розмірність Хаусдорфа множини колмогоровських торів, для яких відношення частот квазіперіодичних рухів погано апроксимується раціональними числами. Показано, що зазначена розмірність відрізняється від розмірності фазового простору на величину, пропорційну кореню шостого степеня з амплітуди збурення.

For Hamiltonian system with two degrees of freedom which is close to a completely integrable one, the Hausdorff dimension of a set of Kolmogorov tori for which the ratio of frequencies of quasiperiodic motions is badly approximable by rational numbers is estimated. It is shown that the above dimension differs from that of the phase space by the value proportional to the root of sixth degree of perturbation amplitude.

1. Вступ.

В останні десятиліття значну увагу дослідників, які працюють в галузі нелінійної динаміки, привертають задачі, пов'язані з вивченням механізмів переходу від регулярної до хаотичної поведінки нелінійних систем. Виявилося, що такий перехід, як правило, супроводжується виникненням у фазовому просторі структур фрактального типу [2; 3; 4; 6; 9; 20].

Однією з визначальних характеристик фрактальної множини є розмірність Хаусдорфа (Хаусдорфа-Безіковича), яка набуває дробових значень і не збігається з топологічною розмірністю [5; 7; 19].

Класичними прикладами фракталів є самоподібні множини канторового типу: трихотомічна множина Кантора, килим та губка Серпінського тощо. Досконалі ніде не щільні множини канторового типу природно з'являються у теорії Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ), а також в інших задачах математичної фізики, в яких виникає відома проблема малих знаменників [1]. Так, частоти ω квазіперіодичних рухів колмогоровської множини інваріантних торів (ця множина складається з інваріантних торів збуреної гамільтонової системи, близької до невиродженої цілком інтегровної гамільтонової системи) належать (несамоподібній) канторовій множині вигляду

$$\Omega_\alpha^\tau = \{\omega \in \Omega : \left|\langle k,\omega\rangle\right| \ge \alpha |k|^{-\tau}\ \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}\},$$

де $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область зміни частот незбуреної системи, n – кількість ступенів волі, τ і α – додатні числа, $\langle , \rangle$ – скалярний добуток в $\mathbf{R}^n$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|$. Зауважимо, що α при фіксованому τ може бути величиною порядку $\sqrt{\varepsilon}$, де ε – амплітуда збурення ($0 < \varepsilon << 1$) [1; 21].

Тривалий час у КАМ-теорії основна увага приділялася метричним характеристикам колмогоровської множини. Оскільки при фіксованому $\tau > n-1$ міра Лебега доповнення до множини Ω_α^τ не перевищує величини порядку α, то при $\varepsilon \to 0$ відносна міра колмогоровської множини прямує до 1. Водночас для $\tau < n-1$ множина $\Omega^\tau = \bigcup_{\alpha>0} \Omega_\alpha^\tau$ узагалі є порожньою.

Відзначимо, яким би не було малим, але фіксованим $\varepsilon > 0$, КАМ-теорія не гарантує, що існують тори з частотами $\omega \in \Omega_\alpha^{\tau+1} \setminus \Omega_\alpha^\tau$ при як завгодно великому $\tau > n-1$. Це пояснюється тим, що збурення спричиняє руйнування не лише строго резонансних торів, для яких частоти задовольняють точні рівності $\langle k,\omega\rangle = 0$ з деякими $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$, але й торів, частоти яких досить добре апроксимуються раціональним числами. Теорія руйнування інваріантних торів та перехід до хаотичної динаміки зараз знаходяться в стадії активного розвитку. Теоретичні та експериментальні дослідження дають підстави для таких висновків: із зростанням величини збурення спочатку руйнуються ті тори, які краще апроксимуються раціональними числами; при цьому у фазовому просторі з'являються щілини, вільні від інваріантних торів; у щілинах між збуреними торами виникають хаотичні рухи, а якщо число ступенів волі перевищує 2, то в щілинах може виникнути явище так званої дифузії Арнольда; під дією збурень, які наростають, деформовані тори можуть поступово втрачати гладкість, перетворюючись урешті-решт на канторо-тори; останніми мають руйнуватися тори, частоти яких найгірше апроксимуються раціональними числами, тобто тори з частотами, які належать Ω_α^{n-1} з максимально можливим α; зокрема, у випадку двох ступенів волі останніми руйнуються тори з відношенням частот, рівним золотому перерізу $(\sqrt{5}-1)/2$ [1; 13; 16; 17; 18].

Викладене вище підтверджує важливість вивчення властивостей таких двох множин: 1) так званої виключної множини E^τ, утвореної частотами ω, кожна з яких має властивість: яке б не було $\alpha > 0$ знайдеться $k \in \mathbf{Z}^n$ таке, що $\left|\langle k,\omega\rangle\right| < \alpha |k|^{-\tau}$; 2) множини Ω^{n-1}. Властивості зазначених множин та їхніх узагальнень вже давно вивчаються в теорії діофантових наближень. Зокрема, ще у 1929 В. Ярніком [14] та в 1934 році незалежно А.С. Безіковичем [10] було показано, що хаусдорфова розмірність множини

$$W^\tau = \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : |\lambda - p/q| < q^{-\tau} \quad \textit{для нескінченної множини} \quad (p/q) \in \mathbf{Q} \right\}$$

дорівнює $2/\tau$, якщо $\tau \ge 2$, і $W^\tau = \mathbf{R}$, якщо $\tau \le 2$. В. Ярніком [15] було також виявлено, що множина

$$B = \bigcup_{\alpha>0}\left\{\lambda \in \mathbf{R} : |\lambda - p/q| \ge \alpha q^{-2} \quad \forall\ (p/q) \in \mathbf{Q}\right\},$$

(множина дійсних чисел, які погано апроксимуються раціональними числами) має нульову лебегову міру, але її хаусдорфова розмірність дорівнює 1. Про багатовимірні аналоги тверджень такого типу, зокрема для множини Ω^{n-1}, та про їхній зв'язок з КАМ-теорією йдеться в [11; 12].

Як уже зазначалося вище, природно було б висловити припущення, що тори з частотами, які погано апроксимуються раціональними числами, є найбільш стійкими щодо збурень. Виникає питання: якою є хаусдорфова розмірність множини таких торів? Наскільки відрізняється вона від розмірності фазового простору?

2. Постановка задачі.

Відповідь на поставлене питання не випливає безпосередньо з результатів, про які йшлося вище: адже КАМ-теорія гарантує існування збурених торів не з будь-якими частотами $\omega \in \Omega^{n-1}$, а лише з тими, які належать Ω_{α}^{n-1} при $\alpha = C\sqrt{\varepsilon}$, де C – деяка додатна стала. Отже, перш за все потрібно оцінити в залежності від ε хаусдорфову розмірність множини Ω_{α}^{n-1}, де $\alpha = C\sqrt{\varepsilon}$.

Надалі обмежимось аналізом випадку $n = 2$.

Розглянемо гамільтоніан вигляду $H(p,q,\varepsilon) = h(p) + f_{\varepsilon}(p,q)$, $f_{\varepsilon}(p,q) = \varepsilon f_1(p,q,\varepsilon)$ для малих значень параметра збурення ε , де $p = (p_1, p_2)$ – змінні дії, які пробігають область $D \subset \mathbf{R}^2$, а $q = (q_1, q_2)|\mathrm{mod}\, 2\pi$ – спряжені кутові змінні на торі $\mathbf{T}^2$, так що f_{ε} має період 2π по кожній компоненті q_1, q_2 . Крім того, припускається, що H є дійсно аналітичним за всіма аргументами на $\overline{D} \times \mathbf{T}^2 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, де ε_0 деяке додатне число.

Припускатимемо, що інтегровний гамільтоніан h невироджений у тому сенсі, що частотне відображення h'_p є дифеоморфізмом $D \to \Omega$. Тоді для кожного $\tau \ge 1$ існує стала $\delta > 0$ така, що для $0 < \varepsilon < \delta\alpha^2$ всі тори незбуреної системи з частотами $\omega := (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_{\alpha}^{\tau}$ виживають, є лагранжевими і лише трохи деформуються. Крім того, вони ліпшицево неперевно залежать від ω і, якщо $\tau > 1$, заповнюють множину, міра якої відрізняється від міри $D \times \mathbf{T}^n$ на величину $O(\alpha)$ [1]. Зрозуміло, що серед торів, які виживають є й усі ті, для яких відношення частот $\lambda = \omega_2 / \omega_1$ належить визначеній вище множині B . Міра Лебега множини таких торів дорівнює нулю. Задача полягає в оцінці розмірності Хаусдорфа цієї множини торів.

3. Основний результат.

Основний результат даної статті складає така теорема.

Теорема. *При зроблених вище припущеннях щодо функції* $H = h + f_{\varepsilon}$ *існує така стала* $C_0 > 0$ *, що множина інваріантних торів системи з гамільтоніаном* H, *які несуть на собі квазіперіодичні рухи з частотами* ω_1, ω_2 *і відношення яких* ω_2 / ω_1 *належить множині* B *, має розмірність Хаусдорфа не меншу, ніж* $4 - C_0\sqrt[6]{\varepsilon}$ *, при* $\varepsilon \to 0.$

Доведення. Позначимо через $\Omega - \delta$ множину, яка складається з точок, які входять до Ω разом зі своїми δ-околами. Як відомо [21], існують числа $\varepsilon_* > 0$ і $C > 0$, і при кожному $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*)$ існує дифеоморфізм $\Psi : \Omega \times \mathbf{T}^2 \mapsto D \times \mathbf{T}^2$, який відображає множину $\hat{\Omega}(\varepsilon) \times \mathbf{T}^2$, де $\hat{\Omega}(\varepsilon) := \left\{\omega \in \Omega - C\sqrt{\varepsilon} : |\langle k, \omega\rangle| \ge C\sqrt{\varepsilon}|k|^{-1} \ \forall k \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}\right\}$, в колмогоровську множину, причому образом тора $\{(\omega_1, \omega_2) \in \hat{\Omega}(\varepsilon)\} \times \mathbf{T}^2$ є інваріантний тор збуреної системи, який несе на собі квазіперіодичні рухи з частотами ω_1, ω_2 . Без обмеження загальності міркувань будемо вважати, що область Ω міститься в першому квадранті координатної площини. Відображення, яке точці $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ зіставляє точку $(\omega_1, \omega_2 / \omega_1)$ є дифеоморфізмом. Цей дифеоморфізм переводить $\hat{\Omega}(\varepsilon)$ в множину, яка при відповідному виборі додатних чисел a, b, c, d містить у собі прямий добуток

$$\{\omega_1 \in (a,b)\} \times \hat{B}(\varepsilon), \ \text{ де } \ \hat{B}(\varepsilon) := \left\{\lambda \in (c,d) : \left|\lambda - \frac{p}{q}\right| \ge \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{aq^2} \ \ \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}\right\} \subset B.$$

Таким чином, колмогоровська множина містить підмножину торів, для яких відношення частот належить множині $\hat{B}(\varepsilon)$. Оскільки ліпеоморфізм і, зокрема, дифеоморфізм, зберігає хаусдорфову розмірність (її ми будемо позначати через $\dim_H$), а хаусдорфова розмірність прямого добутку множин не менша ніж сума хаусдорфових розмірностей співмножників, то для доведення теореми досить показати, що $\dim_H \hat{B}(\varepsilon) > 1 - C_0\sqrt[6]{\varepsilon}$.

Для кожного $N > 0$ позначимо через B_N множину тих чисел $\lambda \in (c,d)$, які мають властивість: якщо $[a_0; a_1, a_2, ...]$ – зображення числа λ у вигляді ланцюгового дробу, то $a_j \le N$ для всіх $j = 1,2,...$ Як встановив В. Ярнік [15], для кожного $N \ge 8$ виконується нерівність

$$1-\frac{4}{N\log 2} \le \dim_H B_N \le 1-\frac{1}{8N\log N}. \quad (1)$$

З іншого боку, в [8, с. 51] показано, що для кожного $\lambda \in B_N$ справджується нерівність

$$\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{(N+2)(N+1)^2 q^2} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

Звідси випливає, що множина $\hat{B}(\varepsilon)$ містить множину $B_{N(\varepsilon)}$, де $N(\varepsilon)$ – корінь рівняння $(N+2)(N+1)^2 = a/\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)$. Але тоді існує стала $C_1 > 0$ така, що при всіх досить малих $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $N(\varepsilon) \ge 1/\left(C_1\sqrt[6]{\varepsilon}\right)$. З урахуванням оцінки (1) маємо $\dim_H \hat{B}(\varepsilon) \ge \dim_H B_{N(\varepsilon)} > 1 - 4C_1\sqrt[6]{\varepsilon}/\log 2.$

Теорему доведено.

Висновки.

Проблеми обчислення розмірності множин фрактального типу мають безпосереднє відношення до задач нелінійної динаміки, зокрема до КАМ-теорії і проблеми «малих знаменників». Методи, розроблені для обчислення хаусдорфових розмірностей фрактальних множин, які є об'єктом вивчення теорії діофантових наближень, виявилися придатними і для одержання нових результатів у теорії Колмогорова–Арнольда–Мозера.

У роботі було розглянуто гамільтонову систему з двома ступенями волі, близьку до цілком інтегровної. Узагальненню отриманого результату на випадок більшого числа ступенів волі буде присвячено окрему статтю.

У зв'язку із проведеним дослідженням виникає така задача: чи існує таке ε, при якому тори збуреної системи утворюють множину міри нуль, однак хаусдорфова розмірність цієї множини, близька до розмірності фазового простору?

Роботу виконано за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (договір № Ф25.212-2008).

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М., 2002. 2. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. – М., 1988. 3. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М., 2000. 4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М., 1984. 5. *Морозов А.Д.* Ведение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск, 2002. 6. *Мун Ф.* Хаотические колебания. – М., 1990. 7. *Турбин А.Ф., Працевитый А.Ф.* Фрактальные множества, функции распределения. – К., 1992. 8. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – Москва, 1961. 9. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. – М., 1988. 10. Besicovitch A.S. Sets of fractional dimensions (IV): on rational approximation to real numbers// J. Lond. Math. Soc. – 1934. – Vol. 9. – P. 126–131. 11. *Dodson M.M., Vickers J.A.G.* Exeptional sets in Kolmogorov–Arnol'd–Moser theory// J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19. – P. 349-374. 12. *Dodson M.M., Pöschel J., Rynne B.P., Vickers J.A.G.* The Hausdorff dimension of small divisors for lower dimensional KAM-tori // Proc. R. Soc. Lond. – 1992. – Vol. 439. – P. 359–371. 13. *Escande D.F., Doveil F.* Renormalization method for computing the threshold of the large scale stochastic instability in two degree of freedom Hamiltonian systems// J.Stat. Phys. – 1981. – Vol. 26. – P. 257–284. 14. *Jarnik V.* Diophantishen Approximationen und Hausdorffsches Mass// Mat. Sbornik. – 1929. – Vol. 36. – P. 371–382. 15. *Jarnik V.* Zur metrischen Theorie der diophantischen Apprtoximationen// Prace Mat.-Fiz. - 1929. – Vol. 9. - P. 91-106. 16. *Kadanoff* L.P. Scaling for a critical Kolmogorov-Arnold-Moser trajectory// Phys. Rev. Lett. – Vol. 47. – 1981. – P. 1641–1643. 17. *Khanin K., Sinai Ya.G.* Renormalization group methods in the theory of dynamical systems// Int. J. Mod. Phys. B. – 1988. – Vol. 2. – P. 147-165. 18. Koch H. A renormalization group fix point assotiated with the break up of golden invariant tori// Discrete Contin. Syst. – 2004. – Vol. 11. – P. 881–909. 19. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. – New York, 1982. 20. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. – Cambridge, 1993. 21. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets// Commun. Pure and Appl. Math. – 1982. – Vol. 35. P. 653–696.

Надійшла до редколегії 03.12.2007