УДК 517.946

А.П. Громик, викл., І.М. Конет, канд..фіз.-мат. наук

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатошарових просторових областей.

The method of integral transformations builds the exact analytical solution of stationary task of heat conductivity for the limited multi-layer space areas.

1. Вступ.

Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [5,7,14,15]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [12,8,9,10]. Стаціонарні температурні поля в необмежених двоскладових та тришарових просторових областях побудовано в працях [2,3,4,11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатошарових за декартовою координатою просторових областей.

2. Основна частина.

Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропній обмеженій $(n+1)$ - шаровій просторовій області математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$\Omega_3 = \{(x,y,z):\left(x,y\right)\in\Omega_2=\langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle; z\in K_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}\mathrm{I}_j\equiv\bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j); l_0\ge 0; l_k<l_{k+1}; l_{n+1}\equiv l<\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [6, 17]

$$\left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j-\chi_j^2T_j=-f_j(x,y,z); z\in\mathrm{I}_j; j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0)T_1\Big|_{z=l_0}=g_0(x,y),(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1})T_{n+1}\Big|_{z=l}=g_l(x,y) \tag{2}$$

та умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases}[(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1)T_k-T_{k+1}]\Big|_{z=l_k}=0,\\(\nu_k\frac{\partial T_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z})\Big|_{z=l_k}=0, k=\overline{1,n},\end{cases} \tag{3}$$

та відповідними крайовими умовами на межі Ω_2, де $a_{xj},a_{yj},a_{zj}\ge 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей $x,y,z\left(j=\overline{1,n+1}\right)$; $\chi_j^2\ge 0$ –коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f\left(x,y,z\right)=\left\{f_1\left(x,y,z\right),f_2\left(x,y,z\right),...,f_{n+1}\left(x,y,z\right)\right\}$ – інтенсивність теплових джерел; $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0;\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0\left(x,y\right),g_l\left(x,y\right)$ – задані обмежені неперервні функції в області Ω_2; R_k –коефіцієнти термоопору; $\nu_k,\nu_{k+1}\ge 0$ –коефіцієнти теплопровідності; $T\left(x,y,z\right)=\left\{T_1\left(x,y,z\right),T_2\left(x,y,z\right),...,T_{n+1}\left(x,y,z\right)\right\}$ – шукана температура.

1. $\Omega_2=\left(-\infty;+\infty\right)\times\left(-\infty;+\infty\right)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\Bigg|_{x=\pm\infty}=0; k=0,1; j=\overline{1,n+1} \tag{4}$$

щодо змінної x та умови

$$\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=\pm\infty}=0; k=0,1; j=\overline{1,n+1} \tag{5}$$

щодо змінної y.

Припустимо, що задані й шукані функції задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 10].

До задачі (1)-(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної x [16,13]:

$$F_x\left[g(x)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i\sigma x}dx\equiv\tilde{g}\left(\sigma\right), i=\sqrt{-1}, \tag{6}$$

$$F_x^{-1}\left[\tilde{g}\left(x\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}\left(\sigma\right)e^{i\sigma x}d\sigma\equiv g(x), \tag{7}$$

© А.П. Громик, І.М. Конет, 2008

$$F_x\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2F_x\left[g(x)\right]\equiv-\sigma^2\tilde{g}\left(\sigma\right). \tag{8}$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області $\Omega_3^{/}=\left\{(y,z): y\in(-\infty;+\infty); z\in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{T}_j-\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{T}_j=-\tilde{f}_j(\sigma,y,z);\ z\in\mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{9}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0)\tilde{T}_1\Big|_{z=l_0}=\tilde{g}_0(\sigma,y),(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1})\tilde{T}_{n+1}\Big|_{z=l}=\tilde{g}_l(\sigma,y), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^k\tilde{T}_j}{\partial y^k}\Big|_{y=\pm\infty}=0; k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \tag{11}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}[(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1)\tilde{T}_k-\tilde{T}_{k+1}]\Big|_{z=l_k}=0,\\ (\nu_k\frac{\partial\tilde{T}_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial\tilde{T}_{k+1}}{\partial z})\Big|_{z=l_k}=0, k=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{12}$$

До задачі (9)-(12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної y [16, 13]:

$$F_y\left[g(y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)e^{-isy}dy\equiv\tilde{g}\left(s\right), \tag{13}$$

$$F_y^{-1}\left[\tilde{g}\left(s\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}\left(s\right)e^{isy}ds\equiv g(y), \tag{14}$$

$$F_y\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2F_y\left[g(y)\right]\equiv-s^2\tilde{g}\left(s\right), \tag{15}$$

Інтегральний оператор F_y за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (9)-(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2\frac{d^2}{dz^2}-\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\right]\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s,z)=-\tilde{\tilde{f}}_j(\sigma,s,z);z\in\mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{16}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0\frac{d}{dz}+\beta_{11}^0)\tilde{\tilde{T}}_1\Big|_{z=l_0}=\tilde{\tilde{g}}_0\left(\sigma,s\right),(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dz}+\beta_{22}^{n+1})\tilde{\tilde{T}}_{n+1}\Big|_{z=l}=\tilde{\tilde{g}}_l\left(\sigma,s\right) \tag{17}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}[(R_k\frac{d}{dz}+1)\tilde{\tilde{T}}_k-\tilde{\tilde{T}}_{k+1}]\Big|_{z=l_k}=0,\\ (\nu_k\frac{d\tilde{\tilde{T}}_k}{dz}-\nu_{k+1}\frac{d\tilde{\tilde{T}}_{k+1}}{dz})\Big|_{z=l_k}=0, k=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{18}$$

До задачі (16)-(18) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0,l]$ з n точками спряження [10]:

$$F_{jn}[g(z)]=\int_{l_0}^{l}g(z)V(z,\lambda_j)\sigma(z)dz\equiv g_j, \tag{19}$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j]=\sum_{j=1}^{\infty}g_j\frac{V(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\equiv g(z), \tag{20}$$

$$F_{jn}[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \Theta(z-l_{i-1})\Theta(l_{i-1}-z)\frac{d^2 g}{dz^2}] \equiv \sum_{i=1}^{n+!} a_i^2 \int_{l_0}^{l} \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+!} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z) V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz -$$
$$-a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0,\lambda_j)(\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g)\Big|_{z=l_0} + a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l,\lambda_j)(\alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g)\Big|_{z=l}. \quad (21)$$

У рівностях (19)-(21) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i\ (z,\lambda_j)\Theta(z-l_{i-1})\Theta(l_i - z);\ \left\| V(z,\lambda_j) \right\|^2 \equiv \int_{l_0}^{l} V^2(z,\lambda_j)\sigma(z) dz = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z,\lambda_j)\sigma_i dz;$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \Theta(z-l_{i-1})\Theta(l_i - z);\ V_m(z,\lambda_j) = \prod_{i=m}^{n} c_{2i} q_{i+1,j} [w_{m-1,2}(\lambda_j)\cos(q_{mj} z) - w_{m-1,1}(\lambda_j)\sin(q_{mj} z)], m = \overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\lambda_j) = w_{n2}(\lambda_j)\cos(q_{n+1,j} z) - w_{n1}(\lambda_j)\sin(q_{n+1,j} z), c_{1k} = 1, c_{2k} = \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}, q_{sj} = a_s^{-1}(\lambda_j^2 + k_s^2)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj};$$

$$\sigma_k = \prod_{j=k}^{n} \frac{\nu_i a_{n+1}}{\nu_{i+1} a_k^2},\ \sigma_n = \frac{\nu_n a_{n+1}}{\nu_{n+1} a_n^2},\ \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}; v_{11}^{k1}(q_{sj} l_k) = -R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \cos(q_{sj} l_k); v_{21}^{k1}(q_{sj} l_k) = -q_{sj} \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{11}^{k2}(q_{sj} l_k) = R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \sin(q_{sj} l_k);\ v_{21}^{k2}(q_{sj} l_k) = q_{sj}\cos(q_{sj} l_k); v_{12}^{k2}(q_{sj} l_k) = \cos(q_{sj} l_k);\ v_{22}^{k2}(q_{sj} l_k) = \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{12}^{k1}(q_{sj} l_k) = -\frac{\nu_k}{\nu_{k+1}} q_{sj} \sin(q_{sj} l_k); \delta_{sm}^k (q_{kj} l_k, q_{k+1,j} l_k) = v_{11}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{22}^{km}(q_{k+1,j} l_k) - v_{21}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{12}^{km}(q_{k+1,j} l_k);$$

$$v_{22}^{k1}(q_{sj} l_k) = \frac{\nu_k}{\nu_{k+1}} q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); w_{01}(\lambda_j) = -v_{11}^{01}(q_{1j} l_0);\quad w_{02}(\lambda_j) = -v_{11}^{02}(q_{1j} l_0);$$

$$w_{sm}(\lambda_j) = w_{s-1,2}(\lambda_j)\delta_{1m}^s (q_{sj} l_s, q_{s+1,j} l_s) - w_{s-1,1}(\lambda_j)\delta_{2m}^s (q_{sj} l_s, q_{s+1,j} l_s);$$

λ_j - утворюючі дискретний спектр корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}(\lambda) l) w_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}(\lambda) l) w_{n2}(\lambda) = 0;$$

$\Theta(x)$ - одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (16) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} (a_1^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_1^2(\sigma,s))\tilde{\tilde{T}}_1(\sigma,s,z) \\ (a_2^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_2^2(\sigma,s))\tilde{\tilde{T}}_2(\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (a_{n+1}^2 \frac{d^2}{dz^2} - q_{n+1}^2(\sigma,s))\tilde{\tilde{T}}_{n+1}(\sigma,s,z) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{f}}_1(\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{f}}_1(\sigma,s,z) \\ \dots\dots \\ \tilde{\tilde{f}}_{n+1}(\sigma,s,z) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

де $q_j^2(\sigma,s) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2;\ a_j^2 \equiv a_{zj}^2;\ j = \overline{1,n+1}.$

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (19), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z,\lambda_j)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z,\lambda_j)\sigma_2 dz \dots \int_{l_{n-1}}^{l_n} \dots V_n(z,\lambda_j)\sigma_n dz \int_{l_n}^{l} \dots V_{n+1}(z,\lambda_j)\sigma_{n+1} dz \right]. \quad (23)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до системи (22). Внаслідок тотожності (21), одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_j^2 + k_i^2 + q_i^2(\sigma,s))\tilde{\tilde{T}}_{ij}(\sigma,s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\tilde{f}}_{ij}(\sigma,s) - \frac{a_1^2\sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s) + \frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s), \quad (24)$$

де $\tilde{\tilde{T}}_{ij}(\sigma,s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z) V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ \tilde{\tilde{f}}_{ij}(\sigma,s) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{\tilde{f}}_i(\sigma,s) V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz; i = \overline{1,n+1}.$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$, і покладемо всюди $k_i^2 = q_1^2 - q_j^2\ (i = \overline{1,n+1})$. Рівняння (24) набуває вигляду

$$(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s) = \tilde{\tilde{f}}_j(\sigma,s) - \frac{a_1^2\sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s) + \frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s), \quad (25)$$

де $\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\tilde{T}}_{ij}(\sigma,s), \tilde{\tilde{f}}_j(\sigma,s) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\tilde{f}}_{ij}(\sigma,s).$

Із рівняння (25) знаходимо функцію

$$\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)=\frac{\tilde{\tilde{f}}_j(\sigma,s)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}-\frac{a_1^2\sigma_1V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)}{\alpha_{11}^0(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2)}+\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s)}{\alpha_{22}^{n+1}(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2)}. \quad (26)$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[...]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{\infty}...\frac{V_1(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}...\frac{V_2(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}...\frac{V_{n+1}(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}\end{bmatrix}. \quad (27)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (27) до матриці-елементу $[\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)]$, де функція $\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)$ визначена формулою (26). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (16)-(18):

$$\tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\tilde{\tilde{f}}_j(\sigma,s)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}-\frac{a_1^2\sigma_1V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)}{\alpha_{11}^0(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}V_{n+1}(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s)}{\alpha_{22}^{n+1}(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2)}\right\}\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2};i=\overline{1,n+1}. \quad (28)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z)$, визначених формулами (28), обернені оператори F_y^{-1} та F_x^{-1}, одержуємо функції

$$T_i(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k\rho d\xi d\eta d\zeta+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)g_0(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)g_l(\xi,\eta)d\xi d\eta;i=\overline{1,n+1}, \quad (29)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (29) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\|V(z,\lambda_j)\|^2}\frac{\cos(|x-\xi|\sigma)\cos(|y-\eta|s)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}d\sigma ds;i,k=\overline{1,n+1}, \quad (30)$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)=-a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{i1}(x,\xi,y,\eta,z,l_0), \quad (31)$$

та компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)=-a_{n+1}^2\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}E_{i,n+1}(x,\xi,y,\eta,z,l) \quad (32)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(5).

Зауваження 1. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 2. При $R_k=0(k=\overline{1,n})$ безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. У випадку $a_{xj}^2=a_{yj}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2\geq 0$ формули (29) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропній обмеженій $(n+1)$ – шаровій просторовій області.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0;\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (29) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z=l_0, z=l$ крайової умови 1-го роду $(\alpha_{11}^0=0,\beta_{11}^0=1,$

$g_0\left(x,y\right)=\alpha_{11}^0 g_0'\left(x,y\right);\alpha_{22}^{n+1}=0,\beta_{22}^{n+1}=1,g_l\left(x,y\right)=\alpha_{22}^{n+1}g_l'\left(x,y\right)\Big)$, 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0=-1,\beta_{11}^0=1,\alpha_{22}^{n+1}=1,\beta_{22}^{n+1}=0\right)$ й 3-го роду $\left(\alpha_{11}^0=-1,\beta_{11}^0\equiv h_1>0,\alpha_{22}^{n+1}=1,\beta_{22}^{n+1}\equiv h_2>0\right)$ та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Аналіз розв'язку (29) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(x,y,z\right)\left(j=\overline{1,n+1}\right),g_0\left(x,y\right)$ та $g_l\left(x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

2. $\Omega_2=\left(-\infty;+\infty\right)\times\left(0;+\infty\right)$. Уцьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються умови (4) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)T_j\Big|_{y=0}=g_j\left(x,z\right),\left.\frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\right|_{y=+\infty}=0;k=0,1;j=\overline{1,n+1} \tag{33}$$

щодо змінної y, де

$h\geq 0$ - коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0;$ $g_j\left(x,z\right)=hT_j^c\left(x,z\right),T_j^c\left(x,z\right)$ - температура середовища на поверхні $y=0.$

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість та задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 10].

До задачі (1)-(4), (33) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є щодо змінної $x.$ Інтегральний оператор F_x за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(4), (33) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області $\Omega_3'=\left\{(y,z):y\in(0;+\infty);z\in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) за крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=0}=\tilde{g}_j\left(\sigma,z\right),\left.\frac{\partial^k\tilde{T}_j}{\partial y^k}\right|_{y=+\infty}=0;k=0,1;j=\overline{1,n+1} \tag{34}$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (34), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної y [13]:

$$F_{+y}[g(y)]=\int_0^\infty g(y)K_y(y,s)dy\equiv\tilde{g}(s), \tag{35}$$

$$F_{+y}^{-1}[\tilde{g}(s)]=\int_0^\infty \tilde{g}(s)K_y(y,s)ds\equiv g(y), \tag{36}$$

$$K_{+y}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2\tilde{g}\left(s\right)+K_y\left(0,s\right)\left.\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\right|_{y=0}, \tag{37}$$

де ядро перетворення

$$K(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s\cos sz+h\sin sz}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (35) внаслідок тотожності (37) крайовій задачі (9), (10), (34), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2\frac{d^2}{dz^2}-\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\right]\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s,z)=-\tilde{\tilde{\Im}}_j(\sigma,s,z);z\in \mathrm{I}_j;j=\overline{1,n+1} \tag{38}$$

за крайовими умовами (17) та умовами спряження (18), де

$$\tilde{\tilde{\Im}}_j(\sigma,s,z)=\tilde{\tilde{f}}_j(\sigma,s,z)+a_{yj}^2K_y\left(0,s\right)\tilde{g}_j\left(\sigma,z\right);j=\overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (38), (17), (18) збігається із задачею (16)-(18). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $\left[l_0,l\right]$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (38), (17), (18) відповідно до формул (28) визначають функції

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{&\frac{\tilde{\tilde{\Im}}_j\left(\sigma,s\right)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}-\frac{a_1^2\sigma_1V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0\left(\sigma,s\right)}{\alpha_{11}^0(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2)}+\\&+\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}V_{n+1}(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l\left(\sigma,s\right)}{\alpha_{22}^{n+1}(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2)}\Bigg\}\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2};i=\overline{1,n+1}.\end{aligned} \tag{39}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z)$, визначених формулами (39), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_x^{-1}, одержуємо функції

$$T_i(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k\rho d\xi d\eta d\zeta+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)g_0(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)g_l(\xi,\eta)d\xi d\eta+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}(x,\xi,y,z,\zeta)g_k(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta;i=\overline{1,n+1}, \tag{40}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (40) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\frac{\cos\left(|x-\xi|\sigma\right)K_y\left(y,s\right)K_e\left(\eta,s\right)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}d\sigma ds;i,k=\overline{1,n+1}, \tag{41}$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)=-a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{i1}(x,\xi,y,\eta,z,l_0), \tag{42}$$

компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)=-a_{n+1}^2\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}E_{i,n+1}(x,\xi,y,\eta,z,l) \tag{43}$$

та компоненти ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(x,\xi,y,0,z,\zeta) \tag{44}$$

еліптичної крайової задачі (1)-(4), (33).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметр h дає можливість виділяти із формул (40) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $y=0$ крайової умови 1-го роду $\left(h\to\infty\right)$ та 2-го роду $\left(h=0\right)$; 3) аналіз розв'язку (40) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(x,y,z\right),g_j\left(x,z\right)\ \left(j=\overline{1,n+1}\right),g_0\left(x,y\right)$ та $g_l\left(x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

3. $\Omega_2=\left(-\infty;+\infty\right)\times\left(0;b\right)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються умови (4) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)T_j\Big|_{y=0}=g_{1j}\left(x,z\right),\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)T_j\Big|_{y=b}=g_{2j}\left(x,z\right);\ j=\overline{1,n+1} \tag{45}$$

щодо змінної y, де $h_1\ge 0$ - коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $g_{1j}\left(x,z\right)=h_1T_j^{c1}\left(x,z\right),T_j^{c1}\left(x,z\right)$ - температура середовища на поверхні $y=0$; $h_2\ge 0$ - коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=b$; $g_{2j}\left(x,z\right)=h_2T_j^{c2}\left(x,z\right),T_j^{c2}\left(x,z\right)$ - температура середовища на поверхні $y=b$.

Припустимо, що задані й шукані функції мають необхідну гладкість та задовольняють умовам застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 5].

До задачі (1)-(4), (45) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є щодо змінної x. Інтегральний оператор F_x за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(4), (45) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області $\Omega_3'=\left\{(y,z):y\in(0;b);z\in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) за крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=0}=\tilde{g}_{1j}\left(\sigma,z\right),\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=b}=\tilde{g}_{2j}\left(\sigma,z\right);\ j=\overline{1,n+1} \tag{46}$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (46), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $\left[0;b\right]$ щодо змінної y [13]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)]=\int_0^b g(y)\mathrm{V}_k(y)dy\equiv g_k, \tag{47}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k]=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{\mathrm{V}_k(y)}{\left\|\mathrm{V}_k\right\|^2}\equiv g(y), \tag{48}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-\gamma_k^2g_k+\mathrm{V}_k(o)\left(-\frac{d}{dz}+h_1\right)g\Big|_{y=0}+\mathrm{V}_k(b)\left(\frac{d}{dy}+h_2\right)g\Big|_{y=b}, \tag{49}$$

де ядро перетворення

$$\mathrm{V}_k(y)=\frac{\gamma_k\cos(\gamma_k y)+h_1\sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2+h_1^2}},\left\|\mathrm{V}_k\right\|^2\equiv\int_0^b\mathrm{V}_k^{\,2}\left(y\right)dy=\frac{b}{2}+\frac{\left(h_1+h_2\right)\left(\gamma_k^2+h_1h_2\right)}{2\left(\gamma_k^2+h_1^2\right)\left(\gamma_k^2+h_2^2\right)},$$

$\left\{\gamma_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\mathrm{ctg}\left(\gamma b\right)=\frac{\gamma^2-h_1h_2}{\gamma(h_1+h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (47) внаслідок тотожності (49) крайовій задачі (9), (10), (46), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2\frac{d^2}{dz^2}-\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2\right)\right]\tilde{T}_{jk}(\sigma,z)=-\tilde{G}_{jk}(\sigma,z);z\in \mathrm{I}_j;\,j=\overline{1,n+1} \tag{50}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0\frac{d}{dz}+\beta_{11}^0)\tilde{T}_{1k}\Big|_{z=l_0}=\tilde{g}_{ok}\left(\sigma\right),(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dz}+\beta_{22}^{n+1})\tilde{T}_{n+1,k}\Big|_{z=l}=\tilde{g}_{lk}\left(\sigma\right) \tag{51}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} [(R_p\dfrac{d}{dz}+1)\tilde{T}_{pk}-\tilde{T}_{p+1,k}]\Big|_{z=l_p}=0, \\ (\nu_p\dfrac{d\tilde{T}_{pk}}{dz}-\nu_{p+1}\dfrac{d\tilde{T}_{p+1,k}}{dz})\Big|_{z=l_p}=0,\,p=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{52}$$

де

$$\tilde{G}_{jk}(\sigma,z)=\tilde{f}_{jk}(\sigma,z)+a_{yj}^2V_k\left(0\right)\tilde{g}_{1j}(\sigma,z)+a_{yj}^2V_k\left(b\right)\tilde{g}_{2j}(\sigma,z);\,j=\overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (50)-(52) збігається із задачею (16)-(18). Отже, відповідно до формул (28), єдиний обмежений розв'язок задачі (50)-(52) визначають функції

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{ik}(\sigma,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg\{&\frac{\tilde{G}_{kj}\left(\sigma\right)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2}-\frac{a_1^2\sigma_1V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}\left(\sigma,s\right)}{\alpha_{11}^0(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2)}+\\ &+\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}V_{n+1}(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}\left(\sigma,s\right)}{\alpha_{22}^{n+1}(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2)}\Bigg\}\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2};i=\overline{1,n+1}.\end{aligned} \tag{53}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{T}_{ik}(\sigma,z)$, визначених формулами (53), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та F_x^{-1}, одержуємо функції

$$\begin{aligned}T_i(x,y,z)=&\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k\rho d\xi d\eta d\zeta+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)g_0(\xi,\eta)d\xi d\eta+\\ &+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)g_l(\xi,\eta)d\xi d\eta+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}^1(x,\xi,y,z,\zeta)g_{1k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta+\\ &+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}^2(x,\xi,y,z,\zeta)g_{2k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta+;i=\overline{1,n+1},\end{aligned} \tag{54}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутій області.

У формулах (54) беруть участь:

компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\times\frac{\cos\left(\left|x-\xi\right|\sigma\right)\mathrm{V}_r\left(y\right)\mathrm{V}_r\left(\eta\right)}{\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_r^2+\chi_1^2\right)\left\|\mathrm{V}_r\right\|^2}d\sigma ds;i,k=\overline{1,n+1}, \tag{55}$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)=-a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{i1}(x,\xi,y,\eta,z,l_0), \tag{56}$$

компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)=-a_{n+1}^2\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}E_{i,n+1}(x,\xi,y,\eta,z,l), \tag{57}$$

компоненти лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^1(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(x,\xi,y,0,z,\zeta) \tag{58}$$

та компоненти правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^2(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(x,\xi,y,b,z,\zeta) \qquad (59)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(4), (45).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри $h_j\left(j=1,2\right)$ дають можливість виділяти із формул (54) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $y=0, y=b$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (54) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(x,y,z\right), g_{1j}\left(x,z\right), g_{2j}\left(x,z\right) \quad \left(j=\overline{1,n+1}\right), g_0\left(x,y\right)$ та $g_l\left(x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

3. Висновки.

При найбільш загальних припущеннях в межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків стаціонарних задач в обмежених багатошарових просторових областях. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. – 517с. 2. *Громик А.П., Конет І.М.* Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 13. – С. 52-65. 3. *Громик А.П., Конет І.М.* Крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 36-50. 4. *Громик А.П., Конет І.М.* Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Наукові праці Кам'янець-Подільського державного університету. Збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів і аспірантів. Випуск 5.: В 3-х томах. – Кам'янець-Подільський: К-ПДУ, 2006, Т. 1. – С. 94-95. 5. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с. 6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 448 с. 7. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с. 8. *Конет І.М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с. 9. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с. 10. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Температурні поля в Кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с. 11. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях //Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., – Чернівці: Прут, 2006. – Вип.14. – С.84-96. 12. *Ленюк М.П.*Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с. 13. *Ленюк М.П.* Интегральные преобразования з разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 14. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с. 15. *Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с. 16. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Из-во иностр. лит., 1956. . – 668 с. 17. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

Надійшла до редколегії 04.10.2007р.