УДК 517.944:532.546

В. Попов, канд. фіз.-мат. наук, доц., Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, доц., І. Гап'як, студ.
mph_mmf@.univ.kiev.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З НЕГЛАДКИМИ МЕЖАМИ

Здійснено чисельний експеримент щодо різних варіантів застосування методу граничних інтегральних рівнянь на прикладі крайової задачі Діріхле для гармонічної функції в області з негладкою межею. Отримано чисельні розв'язки тестової задачі, що враховують особливість крайової задачі, а також розв'язок, що не враховує цю особливість. Проаналізовано результати чисельного експерименту.

A numerical experiment for different variants of using the boundary integral equations method on example of Dirikhle boundary value problem for harmonic function in the field with non-smooth boundary is fulfilled. Numerical solutions of test problem that take into account the particularity of the boundary value problem are obtained as well as solution, not taking into account this particularity. The results of numerical experiment are analyzed.

1. Вступ.

Лінійні крайові задачі в областях, межа яких містить кутові точки, можуть виникати при моделюванні багатьох механічних та фізичних процесів, що зумовлює актуальність дослідження їх впливу на шуканий розв'язок.

Суть методу граничних інтегральних рівнянь [5], використаного в даній роботі, полягає в зведені крайової задачі до інтегрального рівняння на основі використання тотожності Гріна. Вказаним методом задачу для області з негладкою межею можна розв'язувати кількома способами, наприклад:

- використовувати тотожність Гріна для областей з кусково-гладкою межею;
- згладжувати область і використовувати тотожність Гріна для областей з гладкою межею;
- використовувати тотожність Гріна для областей з гладкою межею без урахування зламу межі конкретної області.

Для вибору способу чисельного розв'язування крайових задач описаного типу необхідно отримати відповідні розв'язки та здійснити їх аналіз.

2. Постановка задачі.

Розглянемо задачу знаходження гармонічної функції $\varphi(x,y)$ в замкненій області D, якщо на її межі ∂D задана одна з класичних лінійних крайових умов:

$$\begin{aligned} &\varphi(x,y)=f(x,y),\\ &\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial n}=g(x,y), \qquad\qquad (x,y)\in\partial D. \\ &\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial n}+h\varphi(x,y)=\omega(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

Вважаємо, що межа ∂D є кусково-гладкою лінією.

3. Чисельне розв'язування задачі.

З основної тотожності Гріна для гармонічної функції у двовимірному випадку маємо [4]:

$$\Omega(P)\varphi(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\left\{\frac{\partial}{\partial n_Q}\varphi(Q)\ln\frac{1}{r(P,Q)}-\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\ln\frac{1}{r(P,Q)}\right\}ds(Q), \tag{2}$$

де $\Omega(P)=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad P\in D,\\ \dfrac{\beta(P)}{2\pi}, & \text{якщо} \quad P\in\partial D,\\ 0, & \text{якщо} \quad P\notin\overline{D}.\end{cases}$

Тут $\ln\dfrac{1}{r(P,Q)}$ – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа; $r(P,Q)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ – відстань між точками $Q(x,y)$ і $P(x_0,y_0)$; $P(x_0,y_0)$ – довільна фіксована точка; $Q(x,y)$ – точка інтегрування; n_Q – зовнішня нормаль; $\beta(P)$ – кут, під яким видно область з точки P (якщо межа гладка, то $\beta(P)=\pi$). У випадку об'ємної задачі величину $\beta(P)$ ще називають тілесним кутом [4].

Рівність (2) (для випадку $P\in\partial D$) і одна з крайових умов (1) утворюють систему рівнянь для знаходження на ∂D двох функцій φ і $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$. З цієї системи отримується одне інтегральне рівняння, яке для задачі Діріхле є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, а для задачі Неймана і третьої крайової задачі – інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду.

Для отримання конкретних результатів та вивчення впливу кутових точок межі на розв'язок розглядається задача Діріхле для області $D=(-1,1)\times(-1,1)$:

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi(x,y)=0, \qquad (x,y)\in D,\\ &\varphi(x,y)=f(x,y),\ \ (x,y)\in\partial D. \end{aligned} \tag{3}$$

З метою спрощень при формуванні інтегрального рівняння функцію $f(x,y)$ вибираємо з властивістю симетрії:

$$\begin{aligned} &f(x,y)=f(-x,y),\\ &f(x,y)=f(x,-y), \end{aligned} \quad (x,y)\in\partial D. \tag{4}$$

Розглянемо тотожність (2), коли точка $P\in\partial D$. З урахуванням крайової умови інтегральне рівняння для знаходження розв'язку має вигляд:

$$\int_{\partial D}\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial n_Q}\ln\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right)ds(Q)=\beta(P)f(P)+\int_{\partial D}f(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\ln\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right)ds(Q). \tag{5}$$

Легко показати, що функція $\dfrac{\partial\varphi(Q)}{\partial n_Q}$, $Q\in\partial D$, як і розв'язок $\varphi(x,y)$, має на межі області ∂D властивість симетрії (4). Позначимо $g(Q)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n_Q}$. Враховуючи симетрію крайових умов, в (5) зручно перейти від інтегрування по всій межі ∂D до інтегрування лише по її чверті ∂D_1 – частині межі, що лежить у першому квадранті площини та містить кутову точку P^* з кутом $\beta(P^*)=\dfrac{\pi}{2}$.

Позначимо через $K(t,s)$ ядро інтегрального рівняння, а через $u(s)$ – його праву частину. В результаті отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_0^L g(t)K(t,s)dt=u(s),\quad s\in[0,L], \tag{6}$$

де L – довжина дуги ∂D_1.

Задача (6), як відомо, є некоректною. Для розв'язання рівняння (6) використовується метод регуляризації Тихонова першого порядку [2, 6]. Замість точної правої частини (6) розглянемо функцію u_δ таку, що $\rho_{L_2}(u_\delta,u)\le\delta$, де

$$\rho_{L_2}(u_\delta,u)=\left\{\int_0^L[u_\delta(x)-u(x)]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо згладжуючий функціонал (функціонал Тихонова)

$$M^\alpha[g,u_\delta]=\|Ag-u_\delta\|^2_{L_2}+\alpha\Omega[g], \tag{7}$$

де введено позначення

$$\Omega[g]=\int_0^L\left[q(s)g^2(s)+p(s)\left(\frac{dg}{ds}\right)^2\right]ds. \tag{8}$$

Тут $q(s)$ і $p(s)$ – задані невід'ємні неперервні функції такі, що $\forall s\in[0,L]$ $q^2(s)+p^2(s)\ne0$ і $p(s)\ge p_0>0$, де p_0 – число. Функціонал $\Omega[g]$ називають стабілізуючим функціоналом, а $\alpha>0$ є параметром регуляризації. Використовуючи теорію регуляризації, приходимо до задачі мінімізації функціонала $M^\alpha[g,u_\delta]$, а саме, враховуючи необхідну умову мінімуму функціонала $M^\alpha[g,u_\delta]$ та здійснюючи необхідні обчислення, отримуємо інтегро-диференціальне рівняння [6]

$$\int_0^L\left(\int_0^L K(z,s)K(z,t)dz\right)g(t)dt+\alpha[g(s)-pg''(s)]=\int_0^L K(z,s)u_\delta(z)dz, \tag{9}$$

для розв'язків якого виконуються крайові умови одного з наступних чотирьох типів:

$$g(0)=0,\quad g(L)=0, \tag{10}$$

$$g(0)=0,\quad g'(L)=0, \tag{11}$$

$$g'(0)=0,\quad g(L)=0, \tag{12}$$

$$g'(0)=0,\quad g'(L)=0. \tag{13}$$

Візьмемо за стабілізуючий функціонал $\Omega[z]$ функціонал вигляду $\Omega[g]=\int_0^L[g^2+p(g')]ds$, $\quad p=\text{const}>0$.

Для того, щоб невідома функція рівняння (9) задовольняла одну з крайових умов (10)–(13) (наприклад, умову (10)), необхідно розглянути функцію $g_1=g-g^*$, де $g^*=g(0)+\dfrac{t}{L}(g(L)-g(0))$, $t\in[0,L]$. Таким чином, регуляризований розв'язок g_1 задовольняє умову (10) і інтегральне рівняння Фредгольма II роду:

$$\int_0^L\left(\int_0^L K(z,s)K(z,t)dz\right)g_1(t)dt+\alpha\left[g_1(s)-pg_1''(s)\right]=\int_0^L K(z,s)u_\delta(z)dz\,. \tag{14}$$

Для чисельної реалізації рівняння (14) необхідно передбачити параметризацію межі ∂D_1 та її аналогу – згладжувальної кривої. Крім того, та чи інша апроксимація шуканої функції вимагає введення сітки точок на межі інтегрування. В даній роботі використовується нерівномірне розбиття зі згущенням точок біля точки P^*. Це можна зробити за допомогою формули [3]

$$z_i=L\frac{e^{\frac{\gamma i}{n}}-1}{e^\gamma-1},\ i=\overline{0,n}\,, \tag{15}$$

де n – кількість проміжків, на які розбивається відрізок $[0,L]$, параметр γ відповідає за згущення координат сітки біля одного з кінців відрізку $[0,L]$.

Шукана функція з рівняння (14) знаходиться методом колокації [3].

Використовуючи триточкові формули чисельного диференціювання, з (14) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{j=1}^n\overline{K}(s_1,t_j)(z_j-z_{j-1})g_j+\alpha g_1-2p\alpha\left(\frac{g_1}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)(s_1-s_4)}((s_1-s_3)+(s_1-s_4)+(s_1-s_2))+\right.$$

$$+\frac{g_2}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)(s_2-s_4)}((s_1-s_3)+(s_1-s_4))+\frac{g_3}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_3-s_4)}((s_1-s_4)+(s_1-s_2))+$$

$$\left.+\frac{g_4}{(s_4-s_1)(s_4-s_3)(s_4-s_2)}((s_1-s_3)+(s_1-s_2))\right)=F_1,$$

$$\sum_{j=1}^n\overline{K}(s_i,t_j)(z_j-z_{j-1})g_j+\alpha g_i-2p\alpha\left(\frac{g_{i-1}}{(s_{i-1}-s_i)(s_{i-1}-s_{i+1})}+\frac{g_i}{(s_i-s_{i-1})(s_i-s_{i+1})}+\right.$$

$$\left.+\frac{2g_{i+1}}{(s_{i+1}-s_{i-1})(s_{i+1}-s_i)}\right)=F_i,\qquad i=\overline{2,n-1},$$

$$\sum_{j=1}^n\overline{K}(s_n,t_j)(z_j-z_{j-1})g_j+\alpha g_n-2p\alpha\left(\frac{g_{n-3}}{(s_{n-3}-s_{n-2})(s_{n-3}-s_{n-1})(s_{n-3}-s_n)}((s_n-s_{n-2})+(s_n-s_{n-1}))+\right.$$

$$+\frac{g_{n-2}}{(s_{n-2}-s_{n-3})(s_{n-2}-s_{n-1})(s_{n-2}-s_n)}((s_n-s_{n-1})+(s_n-s_{n-3}))+\frac{g_{n-1}}{(s_{n-1}-s_{n-3})(s_{n-1}-s_{n-2})(s_{n-1}-s_n)}((s_n-s_{n-2})+(s_n-s_{n-3}))+$$

$$\left.+\frac{g_n}{(s_n-s_{n-3})(s_n-s_{n-2})(s_n-s_{n-1})}((s_n-s_{n-3})+(s_n-s_{n-2})+(s_n-s_{n-1}))\right)=F_n,$$

де позначено

$$t_j=\frac{z_j-z_{j-1}}{2}.\quad F_i=\int_0^L K(z,s_i)u_\delta(z)dz\,,\ i=\overline{1,n}\,;\ \ \overline{K}(s_i,t_j)=\int_0^L K(z,s_i)K(z,t_j)dz,\ \ i,j=\overline{1,n}\,.$$

Значення $\overline{K}(s_i,t_j)$ та F_i, $i,j=\overline{1,n}$ обчислюються за допомогою найпростіших квадратурних формул, наприклад формул трапецій [1, 3]

$$\overline{K}(s_i,t_j)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}}K(z,s_i)K(z,t_j)dz=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{z_{k+1}-z_k}{2}\left(K(z_{k+1},s_i)K(z_{k+1},t_j)+K(z_k,s_i)K(z_k,t_j)\right)\right),$$

$$F_i=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}}K(z,s_i)u_\delta(z)dz=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{z_{k+1}-z_k}{2}\left(K(z_{k+1},s_i)u_\delta(z_{k+1})+K(z_k,s_i)u_\delta(z_k)\right)\right).$$

При такому обчисленні інтегралів виникає ситуація, коли вузли s_i (або t_j) належать проміжку інтегрування $[z_k,z_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$, що може привести до суттєвих похибок, якщо не враховувати слабку особливість ядер (логарифмічну особливість). Врахування слабкої особливості при інтегруванні здійснюється заміною підінтегральної змінної.

Розв'язуючи СЛАР методом Жордана, отримаємо розподіл нормальної похідної гармонічної функції на межі області. Шукана функція $\varphi(x,y)$ при необхідності обчислюється квадратурами в будь-якій внутрішній точці $P\in D$ за допомогою тотожності (2).

4. Аналіз результатів розв'язування задачі.

Для задачі Діріхле розглянуто тестову гармонічну функцію $\varphi(x,y)=\mathrm{ch}x\cdot\sin y$, $(x,y)\in\overline{D}=[-1,1]\times[-1,1]$. Її нормальною похідною на межі ∂D буде функція:

$$g(x,y)=n_x\mathrm{sh}x\cdot\sin y+n_y\mathrm{ch}x\cdot\cos y\,,\ \ (x,y)\in\partial D\,.$$

Із застосуванням описаного алгоритму знайдено наближений розв'язок $g_\alpha(x,y)$.

На рис.1-3 подано графіки залежності похибки наближеного розв'язку $Y_1 = \|g - g_\alpha\|_C$ від параметра регуляризації α:

a) крива 1 відповідає випадку, коли наближений розв’язок знаходився по незгладжуваній межі;
b) крива 2 відповідає випадку, коли наближений розв’язок знаходився по згладжуваній межі;
c) крива 3 відповідає випадку, коли наближений розв’язок знаходився по незгладжуваній межі, причому при його обчисленні множник $\beta(x, y)$ в рівнянні (5) не враховувався.

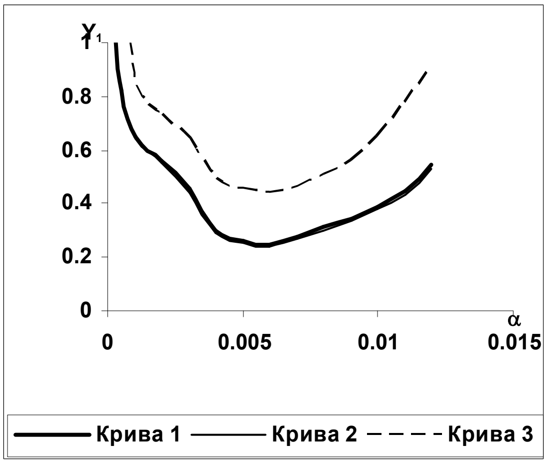

Рис. 1. Залежності похибки розв’язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування $r = 0{,}002$)

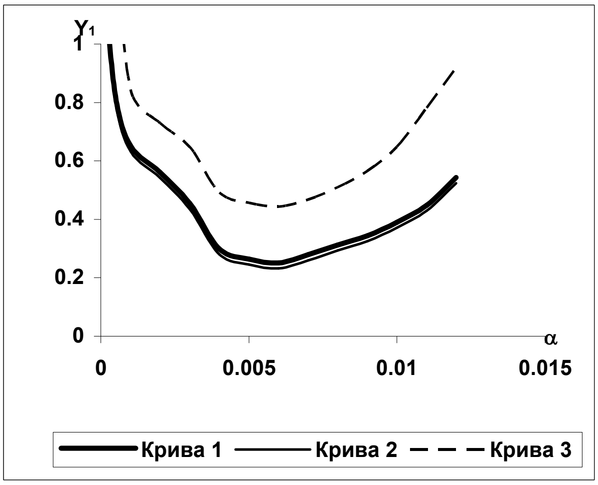

Рис. 2. Залежності похибки розв’язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування $r = 0.006$)

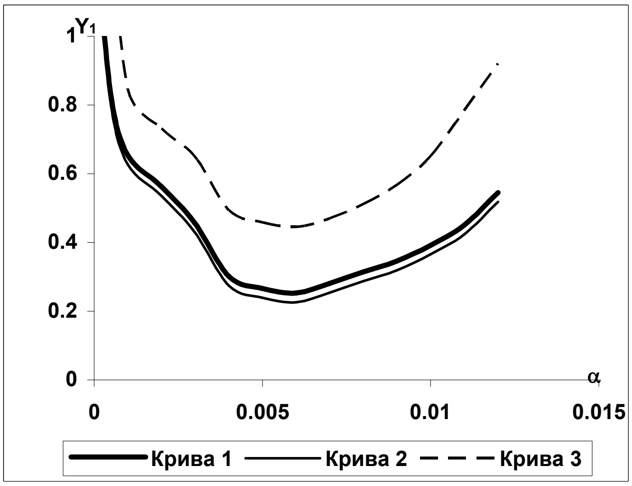

Рис. 3. Залежності похибки розв’язків від параметра регуляризації (крива 2: радіус дуги згладжування $r = 0{,}008$)

5. Висновки.

При знаходженні розв'язку в області з межею, яка містить кутові точки, потрібно враховувати кут зламу – множник $\beta(x, y)$ у рівнянні (5). Альтернативою цьому є згладжування межі області. Графіки похибок свідчать про те, що із зменшенням радіуса дуги згладжування кутової точки можна прийти до істотно точніших результатів.

1. *Арушанян И.О.* Применение метода квадратур для решения граничных интегральных уравнений плоской теории упругости на многоугольниках. – М., 2003. 2. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: справочное пособие. – К., 1986. 3. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М., 1978. 4. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М., 1970. 5. *Риццо Ф.* Метод граничных интегральных уравнений – современный вычислительный метод прикладной механики // Механика. Новое в зарубежной науке. – 1978. – №15. 6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М., 1979.

Надійшла до редколегії 12.11.2007р