УДК 517.91

О.О.Пришляк, докт.фіз.-мат.наук
prishlyak@yahoo.com

ФУНКЦІЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ НА ПОВЕРХНЯХ З МЕЖЕЮ

Побудовано повний топологічний інваріант функцій загального положення на поверхнях з межею.

We construct the complete topological invariant of functions in general position on surfaces with boundary.

1.Вступ.

Якщо M – гладкий замкнений многовид, то функція Морса на ньому буде функцією загального положення, якщо на кожному її критичному рівні міститься одна критична точка. Такі функції утворюють відкриту скрізь щільну множину. За лемою Морса [2], для невиродженої критичної точки p існує локальна система координат ($x_1,\dots,x_n$), в якій функція має вигляд $f(x_1,\dots,x_n) = f(p)-x_1^2-...-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+...+x_n^2$.

Нехай M — гладкий компактний n-вимірний многовид з межею ∂M. Функція f: $M\to \mathbf{R}$ є функцією загального положення, якщо

а) усі її критичні точки — невироджені і не лежать на межі ∂M,

б) обмеження f_∂ функції f на ∂M є функцією Морса загального положення,

в) критичний рівень функції f містить одну критичну точку цієї функції і не містить критичних точок функції f_∂.

Нехай $x\in\partial M$ — критична точка f_∂. Індексом ind x цієї критичної точки називається пара (λ,δ), де λ — звичайний індекс, а δ= +1, якщо вектор gradf_x спрямований назовні і δ = -1, якщо gradf_x спрямований в усередину многовиду M. Якщо $x\notin\partial M$ — критична точка f, то індекс визначається звичайним чином. Аналогічно лемі Морса в околі невиродженої критичної точки f_∂ існує локальна система координат ($x_1,\dots,x_n$), $x_n\geq 0$, в якій функція f має вигляд $f(x_1,\dots,x_n) = f(p)-x_1^2-...-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+...+x_{n-1}^2+\delta x_n$ [4].

Нехай f,g:$M\to\mathbf{R}$ - гладкі функції. Функції f і g називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми ψ: $M\to M$, ζ:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такі, що $f\zeta= g\psi$.

Критерії топологічної еквівалентності функцій Морсу на компактних двовимірних многовидах отримані у роботах [1,5,6], а тривимірних у [3].

Основною мета роботи – дати топологічну класифікацію функцій загального положення на поверхнях (двовимірних многовидах) з межею.

2. Локальна класифікація.

В цьому розділі розглядається питання еквівалентності функцій на поверхні в околі зв'язної компоненти критичного рівня. Можливі 4 типи критичних точок на межі, що відрізняються індексом. Для функції висоти вони зображені на рис. 1.

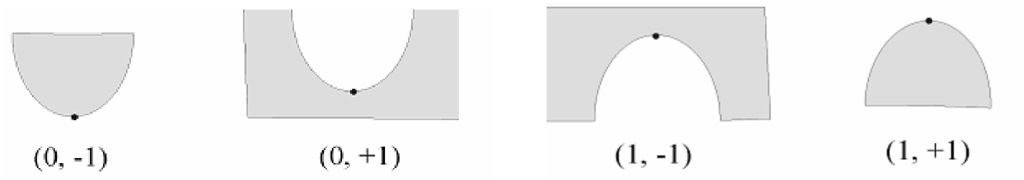

Рис. 1.

Нехай компонента рівня не є локальний мінімум чи максимум. Тоді вона може містити лише такі критичні точки: 1) внутрішні критичні точки, 2) критичні точки на краю індекса (0, +1), 3) критичні точки на краю індекса (1, -1). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція f має критичне значення 0, а окіл компоненти критичного рівня є компонентою множини f^{-1}([-ε,ε]). Компоненти $\partial_- M$ = =f^{-1}(-ε) є колами та відрізками. Їх ми будемо називати нижніми. Кола та відрізки з $\partial_+ M$ =f^{-1}(ε) будемо називати верхніми. Побудуємо аналог хордової діаграми на нижніх колах та відрізках. Для цього розглянемо поле grad f у деякій рімановій метриці. Стійкі многовиди особливих точок індексу 1 утворюють хорди (криві) з кінцями на нижніх колах чи внутрішніх точках нижніх відрізків. Компонента межі ∂M, яка містить точку індексу (1, -1) є хордою, що з'єднує кінці нижніх відрізків За допомогою поля grad f знайдемо проекції точок індексу (0, +1) на $\partial_- M$ (перетин інтегральних траєкторій, що проходять через ці точки з $\partial_- M$). Зменшуючи за необхідності ε, доможемося того, що ці проекції будуть лежати на нижніх колах та відрізках. Орієнтація поверхні і напрямок поля градієнта визначають орієнтацію кіл та відрізків.

Означення. Об'єднання орієнтованих кіл та відрізків з'єднаних хордами, з виділеними на колах та відрізках точками, називається *хордовою m-діаграмою*. При цьому, якщо кінець хорди є кінцем відрізка, то і інший кінець хорди є кінцем деякого відрізка.

Дві m-діаграми називаються ізоморфними, якщо існує їх гомеоморфізм, який відображає кола на кола, відрізки на відрізки, хорди на хорди, а виділені точки на виділені точки і зберігає орієнтації кіл та відрізків.

Лема. Дві функції загального положення є топологічно еквівалентними в околі критичного рівня, якщо відповідні їм хордові m-діаграми є ізоморфними.

Доведення. *Необхідність* випливає з побудови. *Достатність.* Без обмеження загальності будемо вважати, що функції мають однакове критичне значення і приймають однакові значення на границі околу критичного рівня. Зафіксуємо ріманову метрику на поверхнях. Ізоморфізм m-діаграм задає відповідність між інтегральними траєкторіями (крім нестійких многовидів сідловин точок) полів градієнтів. При цьому, оскільки хорди та виділені точки відображаються на хорди та виділені точки, то стійкі многовиди критичних точок переходять в стійкі многовиди. Відповідність між траєкторіями задає гомеоморфізм між їх об'єднаннями за таким правилом: точки на відповідних траєкторіях переходять одна в одну, якщо вони мають однакові значення в цих точках. Відповідність орієнтацій дозволяє продовжити гомеоморфізм з об'єднання траєкторій, між якими задана відповідність, на нестійкі многовиди сідлових точок і, таким чином, побудувати шуканий гомеоморфізм околів. Верхні кола та відрізки задають цикли та маршрути на діаграмі, які будемо називати верхні цикли та маршрути.

3. Глобальна класифікація.

Побудуємо граф Ріба функції загального положення *f*. Для цього введемо таке відношення еквівалентності на *M*: дві точки еквівалентні, якщо вони належать одній компоненті лінії рівня функції. Тоді граф Ріба є факторпростір $G_f = M/\sim$. На графі Ріба є природна орієнтація ребер, породжена зростанням функції на відповідних лініях рівня. Крім того, ребра графа розфарбовано в два кольори (розбито на два типи): 1) ребра, для яких компоненти рівня є колами, 2) ребра, для яких компоненти рівня - відрізки.

Розглянемо вершини графа, валентність яких не перевищує 3. Вершини валентності 1 відповідають локальним мінімумам (витоки) чи максимумам (стоки). При цьому, якщо інцидентне їй ребро має перший тип, то відповідна критична точка -внутрішня, а, якщо другий, то вона лежить на краю. Для вершин, валентність яких більше 1, існує принаймні одне ребро, яке входить в неї, і одне, яке виходить з неї. Ребра валентності 2 мають два інцидентних ребра різних типів. При цьому відповідна критична точка має індекс (0, +1), якщо ребро другого типу виходить, і індекс (1, -1), якщо ребро другого типу входить в неї.

Для вершин валентності 3 є такі можливості:

1) всі інцидентні їй ребра мають перший тип. Тоді критична точка є внутрішня і має індекс 1;
2) два ребра другого типу входять (виходять), а одне першого - виходить (входить). Тоді можливо два варіанти:
   a) дві критичні точки на краю індексу (1, -1) ((0, +1)) - дві хорди, кожна з яких з'єднує кінці двох різних відрізків,
   b) дві критичні точки на краю індексу (1, -1) ((0, +1)) і одна індексу 1 - дві хорди, кожна з яких з'єднує кінці одного з двох відрізків і третя хорда з'єднує дві внутрішні точки різних відрізків (Рис. 2);

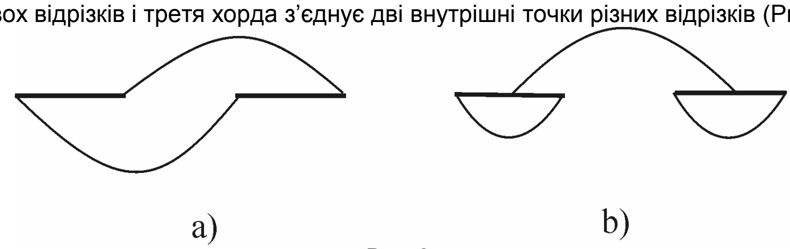

Рис. 2.

3) одне ребро другого типу входить, одне ребро другого типу виходить, а третє ребро має перший тип. Можливі два варіанти: a) одна критична точка, яка є внутрішньою індексу 1, b) три критичні точки, індекси яких 1, (1, -1) і (0, +1);
4) всі три інцидентні до вершини ребра мають другий тип. Тоді можливі такі варіанти: a) одна критична точка, яка лежить на краю і має тип (0, +1), якщо два ребра виходить і одне входить, b) одна точка типу (1, -1) в іншому випадку, c) дві точки типу (1, -1) і одна (0, +1), d) одна точка типу (1, -1) і дві типу (0, +1);
5) два ребра першого типу, одне з яких входить і одне виходить, і одне другого типу - виходить (входить). Тоді маємо дві критичні точки: одна на краю індексу (1, -1) ((0, +1)) а друга внутрішня індексу 1.

Якщо валентність вершини більше 3, то необхідно фіксувати хордові m-діаграми, як в п.1. При цьому будемо фіксувати такі біекції: 1) між нижніми колами і вхідними ребрами першого типу, 2) між нижніми відрізками та вхідними ребрами другого типу, 3) між циклами і вихідними ребрами першого типу, 4) максимальними маршрутами і вихідними ребрами другого типу. Як і для звичайних функцій m-функція задає упорядкування (відображення на множину {1, 2, …, N}) вершин графа Ріба.

Розрізняючим графом функції загального положення на компактній орієнтованій поверхні називається побудований за нею (як вище) орієнтований граф Ріба, з розфарбуванням його ребер у два кольори, упорядкуванням вершин, оснащенням вершин валентності більше 2 хордовою m-діаграмою і завданням біекцій інцидентних до цих вершин ребер з відповідними елементами хордової m-діаграми. Два розрізняючих графи називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм графів Ріба, що зберігає орієнтації та розфарбування ребер, упорядкування вершин, оснащення вершин та комутує з заданими біекціями.

Теорема. *Дві функції загального положення на компактній орієнтованій поверхні топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли існує ізоморфізм їх розрізняючих графів.*

Доведення. *Необхідність.* Топологічна еквівалентність функцій загального положення, за побудовою, породжує ізоморфізм розрізняючих графів.

Достатність. Для кожної пари відповідних вершин (відповідність задається ізоморфізмом m-графів) побудуємо, як в п.1, гомеоморфізми околів відповідних компонент критичних рівнів. При цьому гомеоморфізмі компоненти границі переходять в такі компоненти границі, що відповідні їм ребра m-графу переходять один в одного при ізоморфізмі m-графів. Тоді ця відповідність, зважаючи на упорядкування вершин та орієнтації ребер, дозволяє продовжити гомеоморфізми з околів критичних рівнів на решту поверхні (що є об'єднанням циліндрів $S^1\times[0,1]$ та квадратів $[0,1]\times[0,1]$).

4. Приклади підрахувань.

Будемо позначати ребра першого типу звичайною стрілочкою в кінці ребра, а другого - порожньою в середині. Можливі дві функції, у яких по дві критичні точки – одна на сфері, а інша на двовимірному диску. Можливі дві функції з трьома критичними точками, їх графи відрізняються лише орієнтацією ребер. Тому будемо зображати лише один такий граф. На рис. 3 зображено графи функцій з 2 та 3 критичними точками. Графи функцій з 4 критичними точками зображено на рис. 4.

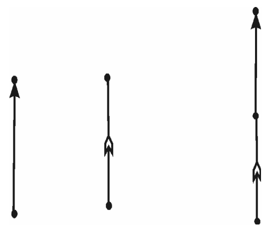

Рис. 3.

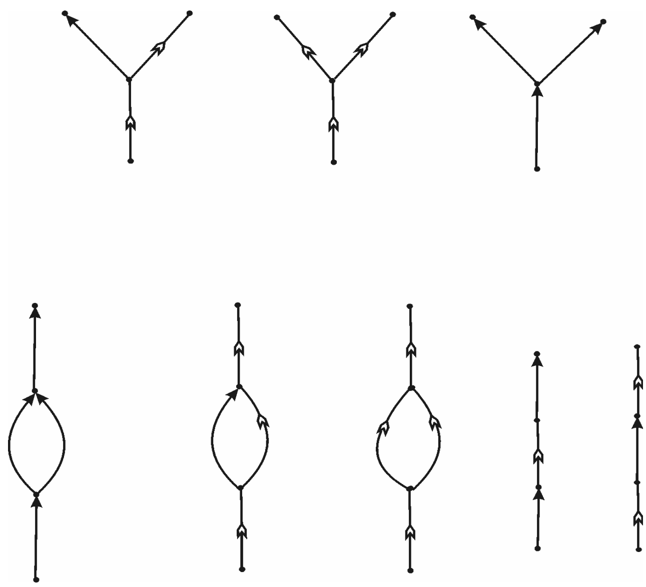

Рис. 4.

На першому графі можливі два різні упорядкування вершин і дві орієнтації ребер (всього 4 не еквівалентних функцій). Наступні два графи мають по одному упорядкуванню і дві орієнтації (по 2 функції). Решта графів задають по одній функції. Отже, існує 13 топологічно не еквівалентних функцій загального положення з 4 критичними точками.

Для функцій з 5 критичними точками існує 9 графів та 22 топологічно нееквівалентні функції.

5.Висновок.

Отримано топологічну класифікацію функцій загального положення на компактних орієнтованих поверхнях з межею.

1. Максименко С.І. Еквівалентність m-функцій на поверхнях// Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Киев, 1998,- С.128-134. **2.** *Милнор Дж.* Теория Морса. - М.: Мир, 1964. - 184 с. **3.** *Пришляк А.О.* Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы совр. мат. Праці Ін-ту математики НАНУ, Т.25, Киев, 1998,- С.94-103. **4.** *Jankowski A., Rubinsztein R.* Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary// Comm. Math. XVI, 1972, p.99-112. **5.** *Kulinich E.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Methods of Func. An. and Topology, N1, 1998.- P.22-28. **6.** *Sharko V.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces// Int. conference at Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory, 1996.-P.19-23.

Надійшла до редколегії 01.10.2007р.