УДК 512.534.5

В.Дереч, канд. фіз.-мат. наук
derech@svitonline.com

ВАРІАНТИ ІНВЕРСНИХ НАПІВГРУП СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Нехай S – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінчену довжину. Для фіксованого елемента c визначимо на S операцію $*_c$ згідно правила $x *_c y = xcy$, а множину S з операцією $*_c$, яка є напівгрупою, позначимо через $(S, *_c)$. Для $(S, *_c)$ знайдено необхідні і достатні умови того, що $(S, *_a) \cong (S, *_b)$.

Let S be an inverse semigroup whose semilattice of idempotents is of finite length. For fixed element c from S defines operation $*_c$ on S via $x *_c y = xcy$. The set S with operation $*_c$ is, obviously, a semigroup which we denote by $(S, *_c)$. Necessary and sufficient conditions in order that $(S, *_a) \cong (S, *_b)$ are founded.

1. Вступ.

Нехай S – довільна напівгрупа. Зафіксуємо елемент $a \in S$ і визначимо нову бінарну операцію $*_a$ згідно правила $x *_a y = xay$. Легко перевірити, що операція $*_a$ є асоціативною. Напівгрупа $(S, *_a)$ називається варіантом напівгрупи S.

Одне з найважливіших питань, яке виникає при вивченні варіантів напівгрупи, формулюється таким чином: нехай a і b – елементи напівгрупи S. За яких умов напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ будуть ізоморфними? У випадку скінченної інверсної симетричної напівгрупи (вона позначається через IS_n) відповідь на це питання дано в [4, теорема 1]. Сформулюємо її:

Результат [4, теорема 1] Напівгрупи $(IS_n, *_\alpha)$ і $(IS_n, *_\beta)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $rank(\alpha) = rank(\beta)$.

В даній замітці отримано узагальнення згаданого вище результату. Основні результати даної статті анонсовано в [5].

1. Означення, термінологія і формулювання потрібних результатів

Напіврешітку E називають напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує таке натуральне число n, що довжина будь-якого ланцюжка напіврешітки E не перевищує n.

Нехай P – впорядкована множина скінченної довжини з найменшим елементом 0. Довжина максимально-го за кількістю елементів ланцюжка, що з'єднує 0 і елемент x, називається висотою елемента x і позначається через $h(x)$.

Нехай S – довільна напівгрупа, N_0 – множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $rank : S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких елементів $a, b \in S$ виконується нерівність $rank(a \cdot b) \le \min\{rank(a), rank(b)\}$. Число $rank(x)$ називається рангом елемента x.

Нехай S – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $rank(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ – висота ідемпотента aa^{-1} в напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою (див. [2]). В даній статті використовується поняття рангу елемента інверсної напівгрупи саме в такому сенсі.

Зазначимо, що для скінченної симетричної інверсної напівгрупи поняття рангу перетворення згідно класичного означення і означення, сформульованого вище, – збігаються. Аналогічне зауваження має місце і для $PAut(V)$ – напівгрупи всіх часткових автоморфізмів скінченновимірного векторного простору V.

Відзначимо деякі властивості рангової функції (див. [2]), які надалі використовуються без відповідних посилань: якщо S – інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінчену довжину, то для довільних $a, b \in S$ мають місце такі властивості:

1) якщо $a < b$, то $rank(a) < rank(b)$, де через $a < b$ позначено строгий канонічний порядок на інверсній напівгрупі S;
2) для кожного елемента $a \in S$ має місце рівність $rank(a) = rank(a^{-1}) = rank(aa^{-1}) = rank(a^{-1}a)$.

Множина всіх ідемпотентів напівгрупи $(S, \circ)$ позначається через $E(S, \circ)$. Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в монографії [3].

2. Основний результат

Спочатку доведемо декілька лем.

Лема 1. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи $(S, \cdot)$, то $E(S, *_a) \subseteq E(S, \cdot)$.

Доведення. Нехай $x \in E(S, *_a)$, тоді $xax = x$. Отже $axa = x^{-1}$ і $xa \in E(S, \cdot)$. Звідси $x^{-1} = axa = aaxa = ax^{-1}$. Таким чином, $x = xa \in E(S, \cdot)$.

Лема 2. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи $(S, \cdot)$, то $E(S, *_a) = \{x : x \le a\}$, де відношення $\le$ є канонічним порядком на $(S, \cdot)$.

Доведення. Нехай $x \in E(S, *_a)$. Тоді $xax = x$. Згідно леми 1 елемент x є ідемпотентом напівгрупи $(S, \cdot)$, а тому $x = xax = xa$, тобто $x \le a$. Навпаки, якщо $x \le a$, то $xa = x$, звідки $xax = x$, тобто $x \in E(S, *_a)$.

Лема 3. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи $(S, \cdot)$, то на множині $E(S, *_a)$ операції $*_a$ і $\cdot$ збігаються.

Доведення. Нехай $x, y \in E(S, *_a)$. Тоді $x *_a y = xay$. Оскільки згідно леми 2 $x = xa$, то $x *_a y = xay = xy$.

Лема 4. Якщо a – ідемпотент інверсної напівгрупи $(S, \cdot)$, то будь-які два ідемпотенти напівгрупи $(S, *_a)$ комутують.

*Це твердження б*езпосередньо випливає з леми 3.

Лема 5. Нехай $(S, \cdot)$ – інверсна напівгрупа скінченного рангу, $a, b \in E(S, \cdot)$. Якщо напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ ізоморфні, то $rank(a) = rank(b)$.

Доведення. З леми 4 випливає, що множини $E(S, *_a)$ і $E(S, *_b)$ є піднапівгрупами відповідно напівгруп $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$. Оскільки за умовою напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ ізоморфні, то ізоморфні і піднапівгрупи їх ідемпотентів, тобто $E(S, *_a) \cong E(S, *_b)$.

Згідно леми 2 $E(S, *_a) = \{x : x \le a\}$ і $E(S, *_b) = \{x : x \le b\}$, де $\le$ – канонічний порядок на інверсній напівгрупі $(S, \cdot)$. Оскільки згідно леми 3 операція $*_a$ на множині $E(S, *_a)$ збігається з операцією $\cdot$, а операція $*_b$ на множині $E(S, *_b)$ збігається з операцією $\cdot$, то множини $\{x : x \le a\}$ і $\{x : x \le b\}$ ізоморфні як впорядковані множини. Звідси випливає, що $h(a) = h(b)$, де $h(a)$ – висота ідемпотента a. Отже, згідно означення рангу маємо $rank(a) = rank(b)$.

Теорема 1. Нехай інверсний моноїд S з групою оборотних елементів G задовольняє такі умови:

1) напіврешітка ідемпотентів моноїда S має скінченну довжину;
2) ідеали моноїда S лінійно впорядковані відносно включення;
3) для будь-якого $x \in S$ існує такий елемент $g \in G$, що $x \le g$.

Тоді для будь-яких a і b напівгрупи $(S, *_a)$ і $(S, *_b)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $rank(a) = rank(b)$.

Доведення. Нехай елементи $a, b \in S$ такі, що $rank(a) = rank(b)$. Тоді $SaS = SbS$ (див. [2], теорема 2). Отже існують такі елементи u і v, що $uav = b$. Запишемо останню рівність у вигляді $uaa^{-1}aa^{-1}av = b$. Позначимо uaa^{-1} через x і $a^{-1}av$ через y. Покажемо, що $rank(x) = rank(y) = rank(a) = rank(b)$. Справді, $rank(x) = rank(uaa^{-1}) \le rank(aa^{-1}) = rank(a)$. Якщо припустити, що $rank(uaa^{-1}) < rank(a)$, то $rank(a) =$ $= rank(b) = rank(uaa^{-1}aa^{-1}av) \le rank(uaa^{-1}) < rank(a)$. Маємо суперечність. Отже, $rank(x) = rank(a) = rank(b)$. Аналогічно, $rank(y) = rank(a) = rank(b)$. Таким чином $xay = b$, причому $rank(x) = rank(y) = rank(a)$. Звідси випливає, що

$$x^{-1}x = aa^{-1} \tag{1}$$

і

$$yy^{-1} = a^{-1}a . \tag{2}$$

Дійсно, припустимо, що $x^{-1}x \ne aa^{-1}$. Оскільки $rank(x^{-1}x) = rank(aa^{-1})$, то $x^{-1}xaa^{-1} < aa^{-1}$. Отже, $rank(x^{-1}xaa^{-1}) < rank(aa^{-1})$. Далі, $rank(b) = rank(xay) = rank(xx^{-1}xaa^{-1}ay) \le rank(x^{-1}xaa^{-1}) < rank(aa^{-1}) =$ $= rank(a)$. Отримали суперечність. Аналогічно доводиться справедливість рівності (2).

Згідно умови 3) теореми 1 існують такі оборотні елементи $g \in G$ і $q \in G$, що $x \le g$ і $y \le q$. Тому

$$xx^{-1} = gx^{-1} \tag{3}$$

і

$$y^{-1}y = y^{-1}q . \tag{4}$$

Згідно рівностей (1), (3) маємо $xa = xx^{-1}xa = gx^{-1}xa = gaa^{-1}a = ga$. Тобто

$$xa = ga . \tag{5}$$

Аналогічно з рівностей (4) і (2) отримуємо $ay = ayy^{-1}y = ayy^{-1}q = aa^{-1}aq = aq$.
Тобто

$$ay = aq . \tag{6}$$

Використовуючи рівності (5) і (6), одержуємо $b = xay = xaa^{-1}ay = gaa^{-1}aq = gaq$. Отже, $b = gaq$.

Далі, як в статті [4, теорема 1] визначимо перетворення за допомогою рівності $F(x)=q^{-1}xg^{-1}$. Легко перевірити, що перетворення F є ізоморфізмом між напівгрупами $(S,*_a)$ і $(S,*_b)$.

Доведемо тепер зворотне твердження. Нехай $(S,*_a)\cong(S,*_b)$. Оскільки $rank\left(aa^{-1}\right)=rank(a)$, то згідно доведеного вище $(S,*_a)\cong\left(S,*_{aa^{-1}}\right)$. Аналогічно, позаяк $rank\left(bb^{-1}\right)=rank(b)$, то $(S,*_b)\cong\left(S,*_{bb^{-1}}\right)$. Звідси випливає, що $\left(S,*_{aa^{-1}}\right)\cong\left(S,*_{bb^{-1}}\right)$. Оскільки aa^{-1} і bb^{-1} – ідемпотенти, то згідно леми 5 $rank\left(aa^{-1}\right)=rank\left(bb^{-1}\right)$. Таким чином $rank(a)=rank\left(aa^{-1}\right)=rank\left(bb^{-1}\right)=rank(b)$.

3. Наслідки

Нехай V – скінченновимірний лінійний простір. Позначимо через $PAut(V)$ інверсну напівгрупу всіх часткових автоморфізмів лінійного простору V відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. Відомо, що ідеали напівгрупи $PAut(V)$ лінійно впорядковані відносно включення. Скориставшись добре відомими класичними теоремами лінійної алгебри, легко показати, що виконується умова 3) теореми 1. Таким чином, маємо

Наслідок 1. Напівгрупи $\left(PAut(V),*_\alpha\right)$ і $\left(PAut(V),*_\beta\right)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $rank(\alpha)= \ =rank(\beta)$.

Нехай $\{A_1,A_2,...,A_m\}$ $(m\geq 2)$ – скінчена сім'я рівнопотужних множин, причому $A_i\cap A_j=\varnothing$, якщо $i\neq j$. Сконструюємо інверсну напівгрупу часткових взаємно однозначних перетворень на множині $\bigcup_{i=1}^{m}A_i$ наступним чином:

1) зафіксуємо деяку групу бієкцій G_1 на множині A_1;

2) для кожного A_k $(k\neq 1)$ фіксуємо бієкцію $\varphi_k:A_1\to A_k$.

Напівтрупу, що породжена множиною $G_1\cup\left\{\varphi_2,\varphi_3,...,\varphi_m,\varphi_2^{-1},\varphi_3^{-1},...,\varphi_m^{-1}\right\}$, позначимо через I. Очевидно, що порожнє перетворення належить I і є нулем напівгрупи I.

Легко перевірити, що напівгрупа I має такі властивості:

1) якщо $f\in I$, то $f^{-1}\in I$;
2) якщо $f\in I$ і $f\neq\varnothing$, то $dom(f)$ і $im(f)$ (тут $dom(f)$ і $im(f)$ відповідно область визначення і множина значень перетворення f) належать сімейству $\{A_i:i=1,2,...,m\}$;
3) для будь-яких A_k і A_r, що належать сімейству $\{A_i:i=1,2,...,m\}$, існує таке перетворення $\psi\in I$, що $dom(\psi)=A_k$ і $im(\psi)=A_r$.

Легко перевірити, що напівгрупа I є цілком 0-простою інверсною напівгрупою, тобто напівгрупою Брандта. Позначимо через $\Omega(I)$ оболонку зсувів напівгрупи I. Відомо [6, с. 209], що оболонка зсувів інверсної напівгрупи є інверсною напівгрупою. З основного результату статті [1] випливає, що напівгрупа $\Omega(I)$ є ідеалізатором напівгрупи I в симетричній напівгрупі всіх часткових перетворень множини $\bigcup_{i=1}^{m}A_i$. Тепер вже легко зрозуміти, що елементи напівгрупи $\Omega(I)$ є взаємно однозначними перетвореннями множини $\bigcup_{i=1}^{m}A_i$, кожне з яких є об'єднанням перетворень з напівгрупи I. Звідси випливає, що кожний ідемпотент напівгрупи $\Omega(I)$ є об'єднанням тотожних перетворень множин, що належать сімейству $\{A_i:i=1,2,...,m\}$. Отже кількість ідемпотентів напівгрупи $\Omega(I)$ скінчена, а тому напівгрупа $\Omega(I)$ задовольняє умову 1) теореми 1. Далі, елемент $\psi\in\Omega(I)$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $dom(\psi)=im(\psi)=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$. Звідси випливає, що напівгрупа $\Omega(I)$ задовольняє умову 3) теореми 1. Крім того легко показати, що ідеали напівгрупи $\Omega(I)$ лінійно впорядковані відносно включення. Таким чином, інверсна напівгрупа $\Omega(I)$ задовольняє усі умови теореми 1. Отже має місце таке твердження.

Наслідок 2. Напівгрупи $\left(\Omega(I),*_\alpha\right)$ і $\left(\Omega(I),*_\beta\right)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $rank(\alpha)=rank(\beta)$.

Зокрема, якщо G_1 є одноелементною групою, то $\Omega(I)$ ізоморфна симетричній інверсній напівгрупі на множині $\{1,2,...,m\}$. Звідси випливає теорема 1 зі статті [4].

Наслідок 3. Нехай S – інверсна напівгрупа скінченої довжини. Для будь-яких $a,b\in S$ $\left(S,*_a\right)\cong\left(S,*_b\right)$ тоді і тільки тоді, коли S – група.

Доведення. Якщо S – група, то, очевидно, що вона задовольняє усі умови теореми 1. Очевидно, що всі елементи групи мають нульовий ранг. Отже, згідно теореми 1 для будь-яких $a,b\in S$ $\left(S,*_a\right)\cong\left(S,*_b\right)$.

Нехай тепер S – інверсна напівгрупа скінченої довжини така, що для будь-яких елементів $a,b\in S$ $\left(S,*_a\right)\cong\left(S,*_b\right)$. Покажемо, що S є групою. Оскільки за умовою напівгрупа S має скінчену довжину, то напіврешітка її ідемпотентів містить найменший елемент e. Доведемо, що ідемпотент e єдиний в інверсній напівгрупі S. Скористаємося методом від супротивного і припустимо, що напівгрупа S містить принаймні ще один ідемпотент f. Розглянемо напівгрупи $\left(S,*_e\right)$ і $\left(S,*_f\right)$. Згідно леми 2 $E\left(S,*_e\right)=\left\{x\,|\,x\le e\right\}=\left\{e\right\}$ і $E\left(S,*_f\right)=\left\{x\,|\,x\le f\right\}$. Отже множина $E\left(S,*_e\right)$ одноелементна, а множина $E\left(S,*_f\right)$ містить принаймні два елементи e і f. Згідно припущення напівгрупи $\left(S,*_e\right)$ і $\left(S,*_f\right)$ізоморфні, а оскільки при ізоморфізмі ідемпотент переходить в ідемпотент, то маємо суперечність. Таким чином інверсна напівгрупа S містить точно один ідемпотент. Звідки легко випливає (див. наприклад, [6, с.88]), що S – група.

4. Приклади

Залишаючи незмінною умову 1) теореми 1, на прикладах покажемо, що умови 2) і 3) є суттєвими.

Приклад 1. Розглянемо впорядковану множину $\left\{1<2<3\right\}$. Позначимо через IO_3 інверсну напівгрупу всіх часткових монотонних ін'єкцій множини $\left\{1<2<3\right\}$. Легко перевірити, що для напівгрупи IO_3 виконується умова 2), але не виконується умова 3). Позначимо елемент $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in IO_3$ через α, а елемент $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\in IO_3$ через β. Згідно леми 2 $E\left(IO_3,*_\alpha\right)=\left\{\varnothing,\alpha\right\}$ і $E\left(IO_3,*_\beta\right)=\left\{\varnothing,\beta\right\}$. Покажемо, що напівгрупи $\left(IO_3,*_\alpha\right)$ і $\left(IO_3,*_\beta\right)$ не є ізоморфними. Скористаємося методом від супротивного і припустимо, що існує ізоморфізм f між напівгрупами $\left(IO_3,*_\alpha\right)$ і $\left(IO_3,*_\beta\right)$. Тоді, очевидно, $f\left(\alpha\right)=\beta$. Прямим підрахунком легко перевірити, що існує рівно 6 таких елементів $x\in\left(IO_3,*_\alpha\right)$, що $x^2=\alpha$ і рівно 4 таких елементів $y\in\left(IO_3,*_\beta\right)$, що $y^2=\beta$. Маємо суперечність. Таким чином умова 3) теореми 1 є суттєвою.

Приклад 2. Розглянемо інверсну напівгрупу часткових ін'єкцій множини $\left\{1,2,3\right\}$: $S=\left\{\varnothing,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$. Легко перевірити, що $A=\left\{\varnothing,\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\}$ і $B=\left\{\varnothing,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ є ідеалами напівгрупи S, причому $A\not\subset B$ і $B\not\subset A$. Тобто ідеали напівгрупи S не утворюють ланцюжок відносно включення. Очевидно, що $G=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$ є групою оборотних елементів напівгрупи S. Легко перевірити, що для напівгрупи S виконується умова 3). Нехай $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ і $\beta=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$. Очевидно, що $rank\left(\alpha\right)=rank\left(\beta\right)$. Легко перевірити, що напівгрупа $\left(S,*_\beta\right)$ містить рівно 7 таких елементів ρ, що $\rho*_\beta\rho=\varnothing$, а напівгрупа $\left(S,*_\alpha\right)$ містить рівно 5 таких елементів ω, що $\omega*_\alpha\omega=\varnothing$. Отже, напівгрупи $\left(S,*_\alpha\right)$ і $\left(S,*_\beta\right)$ не є ізоморфними. Таким чином, умова 2) теореми 1 є суттєвою.

5. Висновки

Вивчення варіантів напівгрупи дозволяє одержувати додаткову інформацію про структуру вихідної напів-групи. В даній замітці узагальнено один відомий результат [4, теорема 1] і окреслено межі застосування аналогу цієї теореми для інверсних напівгруп скінченного рангу.

1. Глускин Л.М. Идеалы полугрупп преобразований // Матем. сб. – 1959. – 47, № 3. – С. 111-130. 2. Дереч В.Д. Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченого рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 4 . – С. 469 – 473. 3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т.1 – 286 с. 4. Цяпута Г.Ю. Напівгрупи перетворень із деформованим множенням // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки – 2003.- № 3. – С. 82-88. 5. Derech V. Inverse semigroups with the deformed multiplication // 6th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts, Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 59-60. 6. Petrich M. Inverse semigroups. New York etc.: John Willey and Sons, 1984. – 674 p.

Надійшла до редколегії 17.03.2007р.