УДК 519.21

І. Дарійчук, асп.
elijadar@rambler.ru

РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ З ІМОВІРНІСТЮ ОДИНИЦЯ ВЕЙВЛЕТ РОЗКЛАДУ ОДНОГО КЛАСУ ПЕРЕДГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Отримано умови рівномірної збіжності з імовірністю 1 вейвлет розкладів Θ -передгауссових випадкових процесів.

Conditions of uniform convergence with probability one of wavelet expansions of Θ -pre-Gaussian random processes defined on the space R are presented.

1. Вступ

Актуальною є задача про різноманітні розклади випадкових процесів за системами функцій. В [5] була використана загальна теорема про рівномірну збіжність вейвлет розкладів на скінченних інтервалах для функцій, які мають деякий степінь росту на нескінченності, для вивчення умов рівномірної збіжності з імовірністю один вейвлет розкладів φ -субгауссових випадкових процесів. Становить інтерес узагальнення цих результатів для нових класів випадкових процесів.

В статті отримано умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів іншого класу випадкових процесів - Θ - передгауссових. Спочатку розглядаються умови рівномірної збіжності на скінченному інтервалі вейвлет розкладів невипадкових функцій, які мають деяку степінь росту на нескінченності [1]. Потім ці умови пов'язуються з Θ - передгауссовими випадковими процесами для отримання умов рівномірної збіжності з імовірністю 1 вейвлет розкладів випадкових процесів на скінченних інтервалах.

2. Основні відомості з вейвлет аналізу

Нехай $\phi(x) \in L_2(R)$ - деяка функція для перетворення Фур'є $\hat{\phi}(y)$, для якої виконуються умови: $\hat{\phi}(0) \neq 0$, $\hat{\phi}(y)$ неперервна в точці 0 і майже скрізь $\sum_{k \in \mathrm{Z}} |\hat{\phi}(y+2k\pi)|^2 = 1$. Тоді якщо існує така 2π-періодична функція $m_0(x) \in L_2([0,2\pi])$, що справджується рівність $\hat{\phi}(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right)$, то функцію $\phi(x)$ називають f -вейвлетом, а функцію $\psi(x)$, яка є оберненим перетворенням Фур'є функції $\hat{\psi}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2}+\pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\}\hat{\phi}\left(\frac{y}{2}\right)$, - m -вейвлетом.

Нехай ϕ є f -вейвлетом. Кажуть [1], що виконується умова S для ϕ, якщо існує така незростаюча функція $\Phi(x)$, $x \geq 0$, для якої $\int_R \Phi(|x|)dx < +\infty$ і справджується нерівність $|\phi(x)| \leq \Phi(|x|)$. В подальшому суттєво використовується такий результат [5].

Теорема 1. Нехай виконується умова S для f -вейвлету ϕ та m -вейвлету ψ, що відповідає ϕ; $c(x)$, $x \in \mathrm{R}$ - така опукла функція, що: а) $c(x) > 1$, $x \in \mathrm{R}$; б) $c(x)$ зростає для $x > 0$; в) $\int_{\mathrm{R}} c(x)\Phi(|x|)dx < +\infty$; г) існує така додатна функція $y(t)$, $t > 0$, що для досить великих x: $c(kx) \leq c(x)y(k)$, де $k > 0$ - деяка константа.

Якщо $f(x)$, $x \in \mathrm{R}$, є такою вимірною на R функцією, що $|f(x)| < c(x)$ для $x \in \mathrm{R}$ і $f(x)$ неперервна на кожному інтервалі $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, то тоді рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$

$$f_m(x) \equiv \sum_{k \in \mathrm{Z}} \alpha_{0k}\phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k \in \mathrm{Z}} \beta_{jk}\psi_{jk}(x) \xrightarrow[m \to \infty]{} f(x)$$

де $\alpha_{0k} = \int_{\mathrm{R}} f(x)\overline{\phi_{0k}(x)}dx$, $\beta_{jk} = \int_{\mathrm{R}} f(x)\overline{\psi_{jk}(x)}dx$, $\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k)$, $\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathrm{Z}$.

3. Основна теорема про Θ -передгауссові випадкові процеси

Нехай (Ω, F, P) стандартний імовірнісний простір. Випадкову величину $\xi = \xi(\omega)$, $E\xi = 0$, називають передгауссовою, якщо існують такі числа $H > 0$ і $a > 0$, що нерівність $E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}$ виконується для всіх $\lambda \in (-H, H)$. Клас передгауссових випадкових величин, визначених на стандартному імовірнісному просторі позначають $\mathrm{Prg}(\Omega)$.

Означення 1 [2]. Випадковий процес називається *передгауссовим*, якщо всі випадкові величини $X(t)$, $t \in T$ є передгауссовими.

Нехай $X = (X(t), t \in T)$ є передгауссовим випадковим процесом. Позначимо

$$\theta_1(t) \equiv \Theta(X(t)), \quad \theta(t,s) \equiv \Theta(X(t) - X(s)), \quad t,s \in T.$$

Означення 2 [2]. Характеристики передгауссового процесу X підпорядковані переднормі Θ, якщо існують такі константи $\gamma > 0$ й $a \geq 1$, що для $|\lambda| < \gamma\theta_1^{-a}(t)$:

$E\exp\{\lambda X(t)\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2\theta_1^2(t)}{2}\right\}$, (1) а для $|\lambda| < \gamma\theta^{-a}(t,s)$: $E\exp\{\lambda(X(t)-X(s))\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2\theta^2(t,s)}{2}\right\}, \quad t,s\in T.$ (2)

Такі процеси називають Θ-передгауссовими.

Наступні дві теореми, які містять умови вибіркової неперервності процесу X в сенсі означень 3.1.11, 3.1.12 в [2], використовуються для доведення основної теореми 4 про рівномірну збіжність вейвлет розкладів випадкових процесів.

Теорема 2. Нехай $X(t)$, $t\in T$, - сепарабельний Θ-передгауссовий випадковий процес, $H(u)$ - u-ентропія на (T,θ), $a\ge 1$, $\delta \equiv \min(a,2)$. Якщо для всіх $\varepsilon > 0$ виконується умова

$$\int_0^{\varepsilon} H^{\frac{1}{\delta}}(u)du < +\infty, \tag{3}$$

то процес $X(t)$, $t\in T$, є вибірково неперервним з імовірністю 1 на (T,θ).

Теорема 2 є частинним випадком леми 2 та теореми 2 зі статті [4].

Теорема 3. Нехай $T=[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, а $X=(X(t), t\in T)$ - сепарабельний Θ-передгауссовий випадковий процес. Якщо існує неспадна функція $\sigma(h)$, $h>0$, $\sigma(0)=0$, така, що

$$\sup_{\{t,s\in T:|t-s|\le h\}} \Theta(X(t)-X(s)) \le \sigma(h), \tag{4}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \ln^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du < +\infty \tag{5}$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$, де $\delta \equiv \min(a,2)$, $a\ge 1$, то траєкторії процесу X є неперервними з імовірністю 1 в просторі (T,θ).

Доведення. Якщо процес X є сепарабельним на $[a,b]$, то з (4) випливає, що він є сепарабельним на (T,θ).

Для u-ентропії $H(u)=\ln N(u)$ маємо таку нерівність на $[a,b]$

$$N(u) \le \frac{b-a}{2u}+1, \tag{6}$$

тому виконання умови (3) випливає з виконання умови (5).

4. Збіжність вейвлет розкладів

Використовуючи теорему 1 про збіжність вейвлет розкладів детермінованих функцій та теорему 3 про вибіркову неперервність випадкових процесів, можна довести теореми про рівномірну збіжність з імовірністю 1 вейвлет розкладів Θ-передгауссових випадкових процесів.

Теорема 4. Нехай $X \equiv (X(t), t\in \mathrm{R})$ - Θ-передгауссовий випадковий процес, $\mathrm{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$ - розбиття числової прямої, де $B_k = [a_k, a_{k+1})$, $a_{k+1}-a_k \ge s_1$, $k\in \mathrm{Z}$, $s_1 > 0$ - деяка константа, і крім того виконуються такі умови:

1) існують такі неперервні зростаючі функції $\sigma_k(x)$, $x>0$, $\sigma_k(0)=0$, що на кожному B_k

$$\sup_{\{t,s\in B_k:|t-s|\le h\}} \Theta(X(t)-X(s)) \le \sigma_k(h);$$

2) існують числа $\delta = \min(a,2)$, $a\ge 1$ (див. озн. 2), $w_{0k} \equiv \sigma_k(\sup_{t\in B_k}|t_{0k}-t|)$, $t_{0k}\in B_k$ такі, що збігається ентропійний інтеграл

$$\int_0^{\varepsilon} H^{\frac{1}{\delta}}\left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)du < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0; \tag{7}$$

3) існує додатна опукла функція $c(t)$, $t\in\mathrm{R}$, що для досить великих x: $c(kx) \le c(x)y(k)$, де $y(x)$, $x>0$ - деяка невід'ємна функція, $k>0$ - деяка стала, і крім того існують такі числа $0 < A_k < \min\left(1, w_{0k}^{2(2-a)}\right)$, $p_k \in (0,1)$, $\kappa \in (0,1)$, що збігаються такі ряди:

$$\sum_{k\in Z}\frac{\theta_1(t_{0k})}{c^{\kappa}(a_k)}, \quad \sum_{k\in Z}\frac{w_{0k}}{c^{\kappa}(a_k)(1-p_k)}, \quad \sum_{k\in Z}\frac{\psi_k(p_k)}{c(a_k)(1-p_k)}, \tag{8}$$

де $\psi_k(p_k) \equiv \frac{w_{0k}}{(1-p_k)R_k}\max\left(w_{0k}J_{\frac{1}{\delta}}(w_{0k}p_k); \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_k}\gamma}\frac{(1-p_k)R_k}{w_{0k}}\left[w_{0k}J_{\frac{1}{\delta}}(w_{0k}p_k)\right]^{\delta}\right)+$

$$+(1-p_k)R_kJ_{1-\frac{1}{\delta}}(w_{0k}p_k), \quad J_r(\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}H^r\left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)du, \; R_k \equiv \theta_1(t_{0k}) + \frac{w_{0k}}{1-p_k}; \tag{9}$$

3) на інтервалі $I \equiv [a,b]$ існує така неспадна функція $\sigma_I(x)$, $x>0$, $\sigma_I(0)=0$, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\{t,s\in I:|t-s|\le h\}} \Theta(X(t)-X(s)) \le \sigma_I(h), \quad \int_0^{\varepsilon} \ln^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{b-a}{2\sigma_I^{(-1)}(u)}+1\right)du < +\infty; \tag{10}$$

4) ϕ є f-вейвлетом, а ψ - m-вейвлетом, що відповідає ϕ, для яких виконується умова S та $\int_{\mathrm{R}} c(x)\Phi(|x|)dx < +\infty.$

Тоді з імовірністю 1 існують величини $\alpha_{0k} = \int_{\mathrm{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}dt, \quad \beta_{jk} = \int_{\mathrm{R}} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}dt$ і має місце збіжність

$$X_m(x) \equiv \sum_{k\in Z}\alpha_{0k}\phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in Z}\beta_{jk}\psi_{jk}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} X(x)$$

рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$.

Доведення. З теореми 3 та припущення (10) випливає, що траєкторії процесу X є неперервними з імовірністю 1. З теореми 3.1 [3] та умов (7), (8) випливає, що з ймовірністю 1 $|X(t)| < \xi c(t),$ (11) де $\xi > 0$ і $P\{\xi<\infty\}=1$. Таким чином, твердження теореми 4 випливає з (11) та теореми 1.

Розглянемо тепер квазістаціонарний (стаціонарний) випадковий процес. Очевидно, що умови теореми 4 повинні значно спроститися, що і буде показано в наступній теоремі 5, яка є дуже важливим частинним випадком для застосування.

Теорема 5. Нехай $\mathrm{R} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$ - розбиття числової прямої з теореми 4, причому $|B_k| \le |B_{k+1}|$, $X = (X(t), t\in\mathrm{R})$ - квазістаціонарний (стаціонарний) сепарабельний Θ-передгауссовий випадковий процес, для якого існує неперервна зростаюча функція $\sigma(x)$, $x>0$, $\sigma(0)=0$ та константа w, що

$$\sup_{|t-s|\le h}\Theta(X(t)-X(s)) = \sup_{|t-s|\le h}\theta(t,s) \le \sigma(h), \quad \sup_{t\in\mathrm{R}}\theta_1(t) \le \tau < +\infty,$$

$$\sup_{k\in Z}\sigma\left(\sup_{t,s\in B_k}|t-s|\right) = \sup_{k\in Z}\sigma\left(|a_{k+1}-a_k|\right) \le w < +\infty, \tag{12}$$

і, крім того, виконується умова 4) теореми 4, існують числа $\delta=\min(a,2)$, $1\le a\le 2$ (див. озн. 2) $p\in(0,1)$, $\kappa\in(0,1)$ такі, що збігається інтеграл

$$\int_0^{\varepsilon}\ln^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du < +\infty, \quad \varepsilon>0, \tag{13}$$

та така додатна зростаюча функція $c(t)$, $t\in\mathrm{R}$, що для достатньо великих x: $c(kx)\le c(x)y(k)$, де $y(t)$, $t>0$ - деяка додатна функція така, що збігаються ряди

$$\sum_{k\in Z}c^{-\kappa}(a_k); \quad \sum_{k\in Z}c^{-1}(a_k)\ln(a_{k+1}-a_k+1). \tag{14}$$

Тоді з імовірністю 1 існують величини $\alpha_{0k} = \int_{\mathrm{R}} X(t)\overline{\phi_{0k}(t)}dt, \quad \beta_{jk} = \int_{\mathrm{R}} X(t)\overline{\psi_{jk}(t)}dt$ і має місце збіжність

$X_m(x) \equiv \sum_{k\in Z}\alpha_{0k}\phi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in Z}\beta_{jk}\psi_{jk}(x) \underset{m\to\infty}{\to} X(x)$ рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha,\beta]$.

Доведення. Теорема 5 випливає з теореми 4. Дійсно, оскільки при $a\ge1$ і $\delta=\min(a,2)$ маємо $1\le\delta\le2$, $\frac{1}{2}\le\frac{1}{\delta}\le1$, $0\le 1-\frac{1}{\delta}\le\frac{1}{2}$, $N(\varepsilon)>1$ для всіх $\varepsilon>0$ і $N(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{\to}\infty$, то $H(\varepsilon)=\ln(N(\varepsilon))>0$ і $H(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{\to}\infty$.

Використаємо теореми 2 та 3. Якщо виконується умова (13), то також виконується і (7). Більше того, з (6) можна отримати, що $\varepsilon J_r(\varepsilon) \le \int_0^{\varepsilon}\ln^r\left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du$ та $\varepsilon J_{1-\frac{1}{\delta}}(\varepsilon) \le \varepsilon J_{\frac{1}{\delta}}(\varepsilon) \le \varepsilon J_1(\varepsilon)$ для будь-яких $\varepsilon>0$.

З (12) випливає

$$w_{0k} \equiv \sigma_k\left(\sup_{t\in B_k}|t_{0k}-t|\right) \le w. \tag{15}$$

Оскільки випадковий процес $X(t)$ є квазістаціонарним (стаціонарним), то при $1\le a\le2$ можна замість A_k, w_{0k} в (9) вибрати константи $A_0>0$ та $\hat{w}>0$ (див. (12), (15)). Тоді отримаємо

$$\psi_k(p) \le \frac{\hat{w}}{(1-p)} \max\left(\hat{w} J_{\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p); \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_0}\gamma} \frac{(1-p)R_k}{\hat{w}} \left[\hat{w} J_{\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p) \right]^{\delta} \right) + (1-p) R_k J_{1-\frac{1}{\delta}}(\hat{w}p),$$ де

$R_k \equiv \theta_1(t_{0k}) + \frac{w_{0k}}{1-p_k} \le \tau + \frac{\hat{w}}{1-p}$. Справді, оскільки $|B_k| \le |B_{k+1}|$, то $\left|w_{0k}^{2(2-a)}\right| \le \left|w_{0k+1}^{2(2-a)}\right|$ і $A_k \ge A_0 \ne 0$. Тому $\frac{1}{A_k} \le \frac{1}{A_0}$.
Таким чином

$$\psi_k(p) \le \max\left(\frac{\hat{w}}{\tau p(1-p) + p\hat{w}} \int_0^{\hat{w}p} H^{\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right) du; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A_0}\gamma p^{\delta}} \left[\int_0^{\hat{w}p} H^{\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right) du \right]^{\delta} + \frac{\tau(1-p)+\hat{w}}{\hat{w}p} \int_0^{\hat{w}p} H^{1-\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right) du \right),$$

за умови, що збігаються інтеграли $\int_0^{\varepsilon} H^{\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)du$, $\left[\int_0^{\varepsilon} H^{\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)du\right]^{\delta}$, $\int_0^{\varepsilon} H^{1-\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)du$.

Дійсно, з (13) випливає, що

$$\left[\int_0^{\varepsilon} H^{\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)du\right]^{\delta} \le \left[\int_0^{\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right]^{\frac{1}{\delta}}du\right]^{\delta} \le \left[\int_0^{\varepsilon}\left[\ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right)+\ln\left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right]^{\frac{1}{\delta}}du\right]^{\delta} \le$$

$$\le \left[\int_0^{\varepsilon}\left[\ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right)\right]^{\frac{1}{\delta}}du + \int_0^{\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right]^{\frac{1}{\delta}}du\right]^{\delta} = \left[\varepsilon\left[\ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right)\right]^{\frac{1}{\delta}} + \int_0^{\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right]^{\frac{1}{\delta}}du\right]^{\delta} \le$$

$$\le C_{\delta}\left[\varepsilon^{\delta}\ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right) + \left(\int_0^{\varepsilon}\ln^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du\right)^{\delta}\right] < +\infty, \quad (16)$$

де $C_{\delta} > 0$ - деяка константа. Отже, умова (7) виконується.

Слід зауважити, що $a_{k+1} - a_k \ge s_1$ і $0 < \ln(s_1+1) \le \ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right)$. З (16) та (14) випливає, що

$$\sum_{k\in Z}\left\{c^{-1}(a_k)\left[\int_0^{\varepsilon} H^{\frac{1}{\delta}}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)du\right]^{\delta}\right\} \le C_{\delta}\varepsilon^{\delta}\sum_{k\in Z}c^{-1}(a_k)\ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right) + C_{\delta}\sum_{k\in Z}c^{-1}(a_k)\left(\int_0^{\varepsilon}\ln^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du\right)^{\delta} < +\infty,$$

тобто виконуються і умови (8).

Очевидно, що (10) також виконується. Таким чином, всі умови теореми 4 виконуються і теорема 5 доведена.

Приклад. Нехай $X = (X(t), t \in \mathrm{R})$ - сепарабельний Θ-передгауссовий випадковий процес; $\sigma(h) = \frac{b_1}{\left(\ln\left(b_2 + \frac{1}{h}\right)\right)^{\beta}}$, де $b_1 > 0$, $b_2 \ge 2$, $\beta > \frac{1}{\delta}$; $c(t) = \ln^d(|t|)$, $d > \frac{1}{\kappa}$. Визначимо відрізки B_k так: $a_k = \mathrm{sign}(k)e^{|k|}$, $k \in \mathrm{Z}$. Тоді виконуються всі умови теореми 5 і справедливий її висновок, тобто з імовірністю 1 існують величини α_{0k}, β_{jk} і має місце збіжність $X_m(x) \underset{m\to\infty}{\to} X(x)$ рівномірно на кожному інтервалі $[\alpha, \beta]$.

Справді, обернена до $\sigma(h)$ функція має вигляд $\sigma^{(-1)}(h) = \frac{1}{\exp\left\{\left(\frac{b_1}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\} - b_2}$.

Оскільки $\frac{1}{2}\left(\exp\left\{\left(\frac{b_1}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\} - b_2\right) + 1 = \frac{1}{2}\exp\left\{\left(\frac{b_1}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\} - \frac{1}{2}b_2 + 1 \le \frac{1}{2}\exp\left\{\left(\frac{b_1}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\}$ для $b_2 \ge 2$, то умова (13) має вигляд

$$\int_0^{\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\left(\exp\left\{\left(\frac{b_1}{u}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\} - b_2\right)+1\right)\right]^{\frac{1}{\delta}}du \le \int_0^{\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{2} + \left(\frac{b_1}{u}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\delta}}du \le \int_0^{\varepsilon}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}}du + \int_0^{\varepsilon}\left(\frac{b_1}{u}\right)^{\frac{1}{\beta\delta}}du = \varepsilon\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}} + \frac{\beta\delta}{\beta\delta-1}b_1^{\frac{1}{\beta\delta}}\varepsilon^{\frac{\beta\delta-1}{\beta\delta}} < +\infty.$$

Очевидно, що $\frac{1}{c(a_k)} = \frac{1}{|k|^d}$ і $\ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right) = \ln(e^{k+1}-e^k+1) \le \ln(2e^k(e-1)) = k + C_1$, де $C_1 > 0$ - деяка константа.

Розглянемо перший ряд в (14): $\sum_{k\in Z\setminus\{0\}} c^{-\kappa}(a_k) = \sum_{k\in Z\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^{\kappa d}}$, який збігається для $\kappa d > 1+\delta_1$, де $\kappa \in (0,1)$, а $\delta_1 > 0$ - деяка константа. Тоді другий ряд в (14), тобто ряд $\sum_{k\in Z\setminus\{0\}} c^{-1}(a_k)\ln\left(a_{k+1}-a_k+1\right) \le \sum_{k\in Z\setminus\{0\}} \frac{k}{|k|^{d}} = \sum_{k\in Z\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^{d-1}}$ збігається для $d-1 > 1+\delta_2$, де $\delta_2 > 0$ - деяка константа.

Отже, умова (14) виконується для $d > \frac{1}{\kappa} + \frac{\delta_1}{\kappa}$, $\kappa \in (0,1)$, що і слід було показати.

5. Висновки

В даній статті отримано умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів Θ-передгауссових випадкових процесів на скінчених інтервалах. В подальших дослідженнях становить інтерес уточнення теореми 4 та доведення відповідних теорем про збіжність вейвлет розкладів Θ-передгауссових випадкових процесів. Слід зазначити, що важливим буде отримання подібних результатів для інших класів випадкових процесів.

1. Козаченко Ю. В. Лекції з вейвлет аналізу. –К., 2004. 2. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes, AMS, Providence, RI., 2000. 3. Dariychuk I.V., Kozachenko Yu. V. Estimates for the distribution of the supremum of a Θ-pre-Gaussian random processes // Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 15, No. 2, 2008. 4. Kozachenko Yu. V., Livins'ka O.I. Analytic properties of certain classes of stochastic processes from the space $Pred_{\varphi}(\Omega)$ // Theor. Probability and Math. Statist., No. 51, 1995. 5. Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M., Vasylyk O. I. On uniform convergence of wavelet expansions of φ-sub-Gaussian random processes // Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 14, No. 3, 2005.

Надійшла до редколегії 19.11.2007