УДК 519.21

М.Моклячук, докт.фіз.-мат.н., Н.Щестюк канд. фіз.-мат наук
e-mail: mmp@univ.kiev.ua

РОБАСТНА ФІЛЬТРАЦІЯ ОДНОРІДНИХ ТА ОДНОРІДНО ЗВ'ЯЗАНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТУ

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала від невідомих значень однорідного випадкового поля за спостереженнями поля на фоні корельованого шуму. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала для різних класів випадкових полів.

Problem of estimation of the functional on the unknown values of a random field from observations of the homogeneous and correlated random fields is investigated. The least favourable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal linear estimates of the linear functional are found for various classes of random fields.

1. Вступ

Задачі оцінювання випадкових полів мають широке застосування при розгляді проблем кодування та обробки сигналів, проблем розпізнавання образів зображень, у задачах теорії автоматичного регулювання, метеорології, океанографії, статистичної гідромеханіки та економетрики. Теорію прогнозування стаціонарних процесів та випадкових полів досліджено у роботах Н. Вінера, Ю.А. Розанова, М. Г. Крейна , А. М. Яглома, М.П. Ядренка. Але запропоновані у тих роботах методи оцінювання стохастичних процесів та випадкових полів можна використовувати лише за умови відомої спектральної щільності . В більшості практичних задач точної інформації про спектральні щільності випадкових процесів (полів) немає, а є лише деякі статистичні характеристики процесів (полів). Тоді, в умовах спектральної невизначеності доцільно застосовувати підхід, за яким шукають оцінки, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей. Такий метод набув терміну мінімаксного. Огляд результатів з мінімаксної (робастної) обробки інформації можна знайти у С.А.Кассам та Г.В.Пур [1]. У статті Ю.Франка [5] проблема мінімаксної екстраполяції випадкової стаціонарної послідовності досліджена за допомогою методів субдиференціального числення. У роботах [2,3] досліджувались задачі оцінювання функціоналів від невідомих значень дискретних та неперервних випадкових полів за даними спостережень поля у спеціальних областях з шумом. Для знаходження мінімаксних оцінок було зроблено припущення про некорельованість полів, що спостерігаються. Проте в більшості випадків результати спостережень утворюють однорідне поле $\xi(u,\upsilon)$, що є корельованим з $\eta(u,\upsilon)$.

У даній роботі досліджується задача мінімаксної фільтрації лінійного функціоналу $A\xi=\sum\limits_{k,j\in E}a(k,j)\xi(k,j)$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(s,t)$, за даними спостережень поля $\xi(u,\upsilon)+\eta(u,\upsilon)$ при $(u,\upsilon)\in Z^2$, $\xi(u,v)$ та $\eta(u,\upsilon)$ – однорідні та однорідно зв'язані випадкові поля. За допомогою методів субдиференціального числення знайдені формули для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних (робастних) спектральних характеристик для певних класів спектральних щільностей.

2. Оптимальні лінійні оцінки функціоналів за умови відомої матриці спектральних щільностей.

Нехай спостерігається випадкове поле $\zeta(u,v)=\xi(u,v)+\eta(u,v)$ при $(u,\upsilon)\in Z^2$, де $\xi(u,v)$ та $\eta(u,v)$ – однорідні та однорідно зв'язані (у широкому розумінні) випадкові поля. Кореляційна структура таких полів визначається додатньо визначеною матрицею спектральних щільностей

$$W(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} f_{\xi\xi}(\lambda,\mu) & f_{\xi\eta}(\lambda,\mu) \\ f_{\eta\xi}(\lambda,\mu) & f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)\end{pmatrix} \tag{1}$$

Лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi=\sum\limits_{k,j\in E}a(k,j)\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,\upsilon)+\eta(u,\upsilon)$ при $(u,\upsilon)\in Z^2$ має вигляд $\hat{A}\,\xi=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(\lambda,\mu)\;Z_\zeta(d\lambda,d\mu)$, де $Z_\zeta(\Delta_1,\Delta_2)$ - ортогональна випадкова міра, $h(\lambda,\mu)$ - спектральна характеристика оцінки $\hat{A}\xi$. Функція $h(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2(f_{\zeta\zeta})$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+\upsilon\mu)}$ при $(u,\upsilon)\in Z^2$, $h(\lambda,\mu)=\sum\sum\limits_{(u,v)\in E}h(u,v)e^{-i(u\lambda+v\mu)}$. З умов ортогонального проектування , яким має задовольняти оптимальна функція $h(\lambda,\mu)$ випливає, що

$$h(\lambda,\mu)=\frac{A(\lambda,\mu)f_{\zeta\xi}(\lambda,\mu)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda,\ \mu)} \tag{2}$$

Спектральна характеристика $h(\lambda,\mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\,\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(W,h(W)) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|A(\lambda,\mu)|^2(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)f_{\zeta\zeta}(\lambda,\mu)-|f_{\xi\zeta}(\lambda,\mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)+2\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu \tag{3}$$

3. Мінімаксний підхід до задач лінійної оцінки функціоналів.

Якщо матриця спектральних щільностей $W(\lambda,\mu)$ (1) точно не відома, але відомо, що вона належить до деякого класу D_W матриць спектральних щільностей, то доцільно знаходити мінімаксні (робастні) оцінки, що дають найменшу похибку для всіх матриць з деякого класу D_W матриць можливих спектральних щільностей [5].

Для заданої множини матриць спектральних щільностей D_W матрицю $W_0(\lambda,\mu)$ будемо називати найменш сприятливою для оптимального оцінювання функціоналу $A\xi$, якщо $\Delta(W_0)=\Delta(h(W_0);W_0)=\max_{W_0\in D_W}\Delta(h(W);W)$. Спектральну характеристику $h^0(\lambda,\mu)$ оптимальної оцінки функціоналу $A\xi$ будемо називати мінімаксною (робастною), якщо $\min_{h\in H_D}\sup_{W\in D_W}\Delta(h;W) = \sup_{W\in D_W}\Delta(h^{0;}W)$.

Найменш сприятлива матриця W_0 з опуклої множини матриць спектральних щільностей D_W та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(W_0)$ утворюють сідлову точку (h^0,W_0) функції $\Delta(h;W)$ на множині $H_D\times D_W$. Нерівності сідлової точки $\Delta(h^0;W)\le\Delta(h^0;W_0)\le\Delta(h;W_0)$ для $\forall h\in H_D$ $\forall W\in D_W$ виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta(h(W_0);W_0) = \sup_{W\in D_W}\Delta(h(W_0);W). \tag{4}$$

Задача на умовний екстремум (4) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [5]

$$\Delta_D(W) = -\Delta(h(W_0);\ W)+\delta(W|D_w)\to\inf,$$

де $\delta((W)|D_W)$ - індикаторна функція множини D_W. Розв'язок цієї задачі визначається умовою $0\in\partial\Delta_D(W_0)$, де $\partial\Delta_D(W_0)$ – субдиференціал опуклого функціоналу $\partial\Delta_D(W)$ в точці W_0. Ця умова є необхідною та достатньою для того, щоб точка (W_0) належала множині мінімумів опуклої функції

4. Мінімаксні оцінки для фіксованих $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$.

Нехай щільності $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ фіксовані, а щільність $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)$ – невизначена. Розглядаючи (3) можна прийти до висновку, що $\forall\lambda\in[-\pi,\pi]$, $\forall\mu\in[-\pi,\pi]$ найменш сприятливою $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)$ буде $\operatorname{Re} f_{\xi\eta}(\lambda,\mu) = -|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|$. Зрозуміло, що в цьому випадку $\operatorname{Im} f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)=0$. Тоді розглянемо

$$\Delta(h(W_0);W) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|A(\lambda,\mu)|^2(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)-|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)-2|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|}d\lambda d\mu \tag{7}$$

як функцію від $|f_{\xi\eta}|$. Позначимо $f(\lambda,\mu)=|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|$, $c_0(f^0{}_{\xi\xi},f^0{}_{\eta\eta}) = f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$,

$$c_1(f^0{}_{\xi\xi},f^0{}_{\eta\eta}) = f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu).$$

Отже, (7) матиме вигляд $\Delta(h(f_0),f) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|A(\lambda,\mu)|^2(c_0(f_{\xi\xi},f_{\eta\eta})-f(\lambda,\mu)^2)}{c_1(f_{\xi\xi},f_{\eta\eta})-2f(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu$.

4.1 Найменш сприятливі щільності в класі $D_{2\varepsilon}(\lambda)$.

Нехай відомо, що $f=|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|$ належить моделі ε – околу в просторі L_2, тобто $f\in D_{2\varepsilon}$,

$$D_{2\varepsilon} = \left\{f(\lambda,\mu)\ \middle|\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda,\mu)-u(\lambda,\mu))^2\,d\mu\le\varepsilon(\lambda),\forall\lambda\in[-\pi,\pi]\right\},$$

де $u(\lambda,\mu)$ — невід'ємна функція на $L^\infty(\mu)$ для всіх $\lambda\in[-\pi,\pi]$, $\varepsilon>0$.

Відомо, що субдиференціал індикаторної функції $\delta(f|D_{2\varepsilon})$ у точці f_0 має вигляд [5]

$$\partial\delta(f_0|D_{2\varepsilon}) = \begin{cases}\{0\},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_0(\lambda,\mu)-u(\lambda,\mu))^2\,d\mu<\varepsilon(\lambda)\\ \{\gamma(\lambda)\phi_0\},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_0(\lambda,\mu)-u(\lambda,\mu))^2\,d\mu=\varepsilon(\lambda)\end{cases}, \tag{8}$$

де $\phi_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_0(\lambda,\mu)-u\ (\lambda,\mu))f(\lambda,\mu)\ d\mu$, $\gamma(\lambda)$ — невід'ємна вимірна функція Лагранжа..

За умови, що маємо фіксовані $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$, а отже обмежені $c_0(f^0{}_{\xi\xi},f^0{}_{\eta\eta})$, $c_1(f^0{}_{\xi\xi},f^0{}_{\eta\eta})$, функціонал $\Delta(h(f_0);\ f\ )$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі L_2. Задача визначення найменш сприятливої в $D_{2\varepsilon}(\lambda)$ спектральної щільності f_0 при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$ зводиться до знаходження мінімального значення функціоналу

$$\tilde{\Delta}(h(f_0)\ ;\ f)=-\Delta(h(f_0)\ ;\ f)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|A(\lambda,\mu)|^2(c_0(f_{\xi\xi},f_{\eta\eta})-f(\lambda,\mu)^2)}{c_1(f_{\xi\xi},f_{\eta\eta})-2f(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu .$$

на множині спектральних щільностей $D_{2\varepsilon}(\lambda)$. Для цього можна знайти мінімальне значення $\Delta(h(f_0);f)$ для кожного $\lambda\in[-\pi,\pi]$ в кожній точці множини $D_{2\varepsilon}(\lambda)$. Для всіх $\lambda\in[-\pi,\pi]$ маємо

$$\tilde{\Delta}'(h(f_0);f)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|A(\lambda,\mu)|^2\frac{f_0^2(\lambda,\mu)-c_1(f_{\xi\xi},f_{\eta\eta})f_0(\lambda,\mu)+c_0(f_{\xi\xi},f_{\eta\eta})}{(c_1(f_{\xi\xi},f_{\eta\eta})-2f_0(\lambda,\mu))^2}f(\lambda,\mu)d\mu .$$

Враховуючи (8) одержуємо, що $f_0\ (\lambda,\mu)\in D_{2\varepsilon}$ є найменш сприятливою щільністю , якщо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_0(\lambda,\mu)-u_1(\lambda,\mu))^2\ \ d\mu=\varepsilon_1(\lambda)\ \ \forall\lambda\in[-\pi,\pi] ,$$

та існує така $\gamma_1(\lambda)\geq 0$, що для всіх варіацій $f(\lambda,\mu)$ щільності $f_0(\lambda,\mu)$ та для $\forall\lambda\in[-\pi,\pi]$ виконується рівняння

$$\int_{-\pi}^{\pi}|A(\lambda,\mu)|^2\frac{f_0{}^2(\lambda,\mu)-c_1f_0(\lambda,\mu)+c_0}{(c_1-2f_0(\lambda,\mu))^2}f(\lambda,\mu)\ \ d\mu=\gamma_1(\lambda)\int_{-\pi}^{\pi}(f^0(\lambda,\mu)-u_1(\lambda,\mu))f(\lambda,\mu)\ \ d\mu\ .$$

Звідси

$$|A(\lambda,\mu)|^2\frac{f_0{}^2(\lambda,\mu)-c_1f_0(\lambda,\mu)+c_0}{(c_1-2f_0(\lambda,\mu))^2}=\gamma_1(\lambda)(f^0(\lambda,\mu)-u_1(\lambda,\mu)) \qquad (9).$$

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ є фіксованими, $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\in D_W=D_{2\varepsilon}(\lambda)$ та задовольняє умову мінімальності [4], то спектральна щільність $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)=-|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|$ є найменш сприятливою в $D_W=D_{2\varepsilon}(\lambda)$ при оптимальному лінійному оцінюванні функціонала $A\xi$, якщо $f_0\ (\lambda,\mu)\in D_{2\varepsilon}$ є розв'язком рівняння (9),

$\gamma_1(\lambda)\neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_0(\lambda,\mu)-u_1(\lambda,\mu))^2\ \ d\mu=\varepsilon_1(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$. Функція $h(f_0)$, обчислена за формулою (2), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

4.2 Найменш сприятливі щільності в класі $D_u^v(W)$.

Розглянемо задачу в класі спектральних щільностей $D_W=D_v^u(W)$.

$D_v^u(W)=\left\{f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\ \middle|\ v(\lambda,\mu)\leq|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|\leq u(\lambda,\mu)\right\}$, для фіксованих $f_{\xi\xi}$, $f_{\eta\eta}$.

Якщо дослідити функцію, визначену (7) на монотонність, то маємо, що підінтегральна функція $\frac{|A(\lambda,\mu)|^2(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)-|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|^2)}{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)+f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)-2|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|}$ як функція від $|f_{\xi\eta}|$ досягає екстремуму при

$$|f_{\xi\eta}|=\frac{f_{\xi\xi}+f_{\eta\eta}\pm\sqrt{(f_{\xi\xi}-f_{\eta\eta})^2}}{2}=\frac{f_{\xi\xi}+f_{\eta\eta}\pm|f_{\xi\xi}-f_{\eta\eta}|}{2}.$$

Зрозуміло, що супремум для підінтегральної функції буде досягатися для $\min(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu),f_{\eta\eta}(\lambda,\mu))$. Отже, функція, визначена (7) буде зростати при $|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|\leq\min(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu),f_{\eta\eta}(\lambda,\mu))$ і спадати при $|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|\geq\min(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu),f_{\eta\eta}(\lambda,\mu))$. Нерівність $|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)|\leq\sqrt{f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)}$ випливає з додатної визначеності матриці D_W .

Якщо позначити $L(\lambda,\mu)=\min(f_{\xi\xi}(\lambda,\mu), f_{\eta\eta}(\lambda,\mu))$, то найменш сприятливою буде щільність $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)=-\left|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\right|$, де

$$\left|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\right|=\begin{cases} v(\lambda,\mu), & L(\lambda,\mu)\le v(\lambda,\mu) \\ L(\lambda,\mu), & v(\lambda,\mu)\le L(\lambda,\mu)\le u(\lambda,\mu) \\ u(\lambda,\mu), & u(\lambda,\mu)\le L(\lambda,\mu) \end{cases} \tag{10}$$

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 2. Якщо $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ є фіксованими, а $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\in D_W = D_v^u(W)$, то спектральна щільність $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)=-\left|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\right|$, де $\left|f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)\right|$ задовольняє (10) буде найменш сприятливою в класі $D_W = D_v^u(W)$. Мінімаксну спектральну характеристику та середньоквадратичну похибку можна обчислити за формулами (2), (3) відповідно.

5. Висновки

У статті досліджується задача мінімаксного оцінювання функціонала $A\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля за спостереженнями поля на фоні корельованого шуму. За умови, що щільності $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ фіксовані, а щільність $f_{\xi\eta}(\lambda,\mu)$ належить моделі ε – околу в L_2 *або* класу $D_u^v(W)$ знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала $A\xi$. Надалі бажано дослідити випадок, коли точні значення щільностей $f_{\xi\xi}(\lambda,\mu)$, $f_{\eta\eta}(\lambda,\mu)$ також невідомо, але відомо деякі обмеження на ці щільності.

1. Кассам С.А., Пур Г.В. Робастные методы обработки сигналов: Обзор // Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике.- 1985.- Т.73. N 3.- С. 54-110. 2. Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю. Про задачу фільтрації випадкових полів// Вісник Київського університету, серія фіз.– мат. науки, – 2002, вип.№ 5, с. 116– 126. 3. Моклячук М.П., Щестюк Н.Ю. Про фільтрацію випадкових полів дискретного аргументу // Вісник. Математика. Механіка., – 2003, вип. № 9-10, с. 117– 123. 4. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы.- М.: Наука, 1990.- 272 с. 5. Franke J. Minimax robust prediction of discrete time series// Z. Wahr. Verw. Geb.- 1985.- Vol. 68.- P. 337-364.

Надійшла до редколегії 24.01.2008